Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Об интегрируемости уравнений для неособых пар согласованных плоских метрик, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 2, 233–250

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 05:19:27

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕОСОБЫХ ПАР СОГЛАСОВАННЫХ ПЛОСКИХ МЕТРИК

Решена задача описания всех неособых пар согласованных плоских метрик (или, другими словами, неособых плоских пучков метрик) в общем N -компонентном случае. Эта задача эквивалентна задаче описания всех согласованных скобок Дубровина–Новикова (согласованных невырожденных локальных скобок Пуассона гидродинамического типа), играющих важную роль в теории интегрируемых систем гидродинамического типа, а также в современной дифференциальной геометрии и теории поля. Доказано, что все неособые пары согласованных плоских метрик описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений, которая является специальной нелинейной дифференциальной редукцией классических уравнений Ламе. Представлена схема интегрирования этой системы методом обратной задачи рассеяния. Процедура интегрирования основана на использовании метода Захарова интегрирования уравнений Ламе (версии метода обратной задачи рассеяния).

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной статье мы полностью решаем задачу описания неособых пар согласованных плоских метрик в общем N -компонентном случае. Мы представляем схему интегрирования нелинейных уравнений, описывающих все неособые пары согласованных плоских метрик (или, другими словами, все неособые плоские пучки метрик). Эта схема была анонсирована в нашей предыдущей статье [1]. Она основана на сведении рассматриваемой проблемы к интегрированию специальной редукции уравнений Ламе и использовании метода дифференциальных редукций Захарова в методе одевания (версии метода обратной задачи рассеяния) [2].

Мы будем использовать как контравариантные метрики $g^{ij}(u)$, $1 \leq i, j \leq N$, с верхними индексами, где $u = (u^1, \dots, u^N)$ – локальные координаты, так и ковариантные метрики $g_{ij}(u)$ с нижними индексами, при этом $g^{is}(u)g_{sj}(u) = \delta_j^i$. Индексы коэффициентов связностей Леви–Чивита $\Gamma_{jk}^i(u)$ (римановых связностей, порождаемых соответствующими метриками) и индексы тензоров римановой кривизны $R_{jkl}^i(u)$ поднимаются

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия; Department of Mathematics, University of Paderborn, Germany. E-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru, mokhov@uni-paderborn.de

и опускаются с помощью соответствующих им метрик:

$$\begin{aligned}\Gamma_k^{ij}(u) &= g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u), & \Gamma_{jk}^i(u) &= \frac{1}{2}g^{is}(u)\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s}\right), \\ R_{kl}^{ij}(u) &= g^{is}(u)R_{skl}^j(u), & R_{jkl}^i(u) &= \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} + \Gamma_{pk}^i(u)\Gamma_{jl}^p(u) - \Gamma_{pl}^i(u)\Gamma_{jk}^p(u).\end{aligned}$$

Любые смешанные тензоры типа (1,1) мы будем называть для удобства *аффинорами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [3], [4]. Две контравариантные плоские метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют *плоский пучок метрик*, если любая линейная комбинация этих метрик

$$g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u), \quad (1.1)$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, также является плоской метрикой, а коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита связаны таким же линейным соотношением:

$$\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u). \quad (1.2)$$

Мы также будем говорить в этом случае, что плоские метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ *согласованы*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [1]. Две контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны K_1 и K_2 , соответственно, называются *согласованными*, если любая линейная комбинация этих метрик (1.1) является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, а коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита связаны таким же линейным соотношением (1.2). Мы также будем говорить в этом случае, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют *пучок метрик постоянной римановой кривизны*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [1]. Две римановы или псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *согласованными*, если для любой линейной комбинации этих метрик (1.1) коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны такими же линейными соотношениями (1.2) и

$$R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,kl}^{ij}(u). \quad (1.3)$$

Мы также будем говорить в этом случае, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют *пучок метрик*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 [1]. Две римановы или псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *почти согласованными*, если для любой линейной комбинации этих метрик (1.1) выполняется соотношение (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Две римановы или псевдоримановы метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *неособой парой метрик*, если собственные значения этой пары метрик, т.е. корни уравнения на λ

$$\det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0, \quad (1.4)$$

различны. Пучок метрик называется *неособым*, если он образован неособой парой метрик.

Эти определения мотивированы теорией согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа. В случае, когда метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ плоские, т.е. $R_{1,jkl}^i(u) = R_{2,jkl}^i(u) = 0$, соотношение (1.3) превращается в условие, что произвольная линейная комбинация плоских метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ тоже является плоской метрикой, и определение 1.3 эквивалентно в этом случае известному определению плоского пучка метрик или, другими словами, определению согласованной пары локальных невырожденных пуассоновых структур гидродинамического типа [3] (см. также [4]–[10]). В случае, когда метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ – метрики постоянной римановой кривизны K_1 и K_2 , соответственно, т.е.

$$R_{1,kl}^{ij}(u) = K_1(\delta_l^i \delta_k^j - \delta_k^i \delta_l^j), \quad R_{2,kl}^{ij}(u) = K_2(\delta_l^i \delta_k^j - \delta_k^i \delta_l^j),$$

соотношение (1.3) превращается в условие, что произвольная линейная комбинация (1.1) метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, а определение 1.3 эквивалентно в этом случае определению 1.2 пучка метрик постоянной римановой кривизны или, другими словами, определению согласованной пары соответствующих нелокальных пуассоновых структур гидродинамического типа, введенных и изученных автором и Ферапонтовым [11] (см. также [12]–[16]). Согласованные метрики более общего типа соответствуют согласованным парам нелокальных пуассоновых структур гидродинамического типа, введенных и изученных Ферапонтовым [12]. Они возникают, например, при использовании оператора рекурсии, порождаемого парой согласованных пуассоновых структур гидродинамического типа и определяющего, как хорошо известно, бесконечную последовательность соответствующих согласованных пуассоновых структур.

Как было ранее отмечено автором [8]–[10], условие (1.3) следует из условия (1.2) в случае некоторых специальных редукций, связанных с уравнениями ассоциативности (см. также теорему 2.6 ниже). Конечно, это не случайно. При некоторых естественных и достаточно общих предположениях о метриках (в частности, достаточно, но не необходимо, чтобы собственные значения рассматриваемой пары метрик были различными) из почти согласованности метрик следует их согласованность, но в общем случае это, вообще говоря, неверно даже для плоских метрик (в работе [1] нами представлены соответствующие контрпримеры). В связи с этим мы подчеркиваем, что условие (1.2), которое значительно проще условия (1.3), “почти обеспечивает” согласованность метрик и заслуживает отдельного исследования, но в общем случае необходимо требовать также выполнения условия (1.3) для согласованности соответствующих пуассоновых структур гидродинамического типа. Интересно также выяснить, гарантирует ли условие (1.3) выполнение условия (1.2).

2. СОГЛАСОВАННЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ПУАССОНОВЫ СТРУКТУРЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА (КРАТКИЙ ОБЗОР)

Локальной пуассоновой структурой гидродинамического типа или структурой Дубровина–Новикова [17] называется произвольная локальная однородная скобка Пуассона первого порядка, т.е. скобка Пуассона вида

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta_x(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta(x-y), \quad (2.1)$$

где $u^1, \dots, u^N$ – локальные координаты на некотором гладком N -мерном многообразии M ; $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, – функции (поля) одной независимой переменной x ; коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b_k^{ij}(u)$ – гладкие функции локальных координат $u = (u^1, \dots, u^N)$ на M .

Другими словами, для произвольных функционалов $I[u]$ и $J[u]$ на пространстве полей $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, определяется скобка вида

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (2.2)$$

от которой требуется, чтобы она являлась скобкой Пуассона, т.е. была кососимметричной:

$$\{I, J\} = -\{J, I\}, \quad (2.3)$$

и удовлетворяла тождеству Якоби

$$\{\{I, J\}, K\} + \{\{J, K\}, I\} + \{\{K, I\}, J\} = 0 \quad (2.4)$$

для произвольных функционалов $I[u]$, $J[u]$ и $K[u]$. При этом кососимметричность (2.3) и тождество Якоби (2.4) накладывают очень жесткие условия на коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b_k^{ij}(u)$ скобки (2.2) (эти условия будут обсуждаться ниже).

Локальные пуассоновы структуры гидродинамического типа (2.1) введены и изучены Дубровиным и Новиковым в работе [17], где предложен соответствующий локальным структурам вида (2.1) общий локальный гамильтонов подход к так называемым *однородным системам гидродинамического типа*, т.е. к эволюционным квазилинейным системам дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$u_t^i = V_j^i(u) u_x^j. \quad (2.5)$$

Этот гамильтонов подход был мотивирован изучением уравнений Эйлера гидродинамики и уравнений усреднения Уизема, описывающих эволюцию медленно промодулированных многофазных решений дифференциальных уравнений с частными производными [18].

Локальная скобка (2.2) называется *невыврожденной*, если $\det g^{ij}(u) \neq 0$. Для общих невырожденных скобок вида (2.2) Дубровин и Новиков доказали следующую важную теорему.

ТЕОРЕМА 2.1 [17]. Если $\det g^{ij}(u) \neq 0$, то скобка (2.2) является скобкой Пуассона, т.е. она кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби тогда и только тогда, когда

- 1) $g^{ij}(u)$ – произвольная плоская псевдориманова контравариантная метрика (метрика нулевой римановой кривизны);
- 2) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита).

Следовательно, для любой невырожденной локальной пуассоновой структуры гидродинамического типа всегда существуют локальные координаты $v^1, \dots, v^N$ (плоские координаты метрики $g^{ij}(u)$), в которых все коэффициенты скобки постоянны:

$$\tilde{g}^{ij}(v) = \eta^{ij} = \text{const}, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i(v) = 0, \quad \tilde{b}_k^{ij}(v) = 0, \quad (2.6)$$

т.е. скобка имеет вид

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta v^i(x)} \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta J}{\delta v^j(x)} dx, \quad (2.7)$$

где η^{ij} – невырожденная симметричная постоянная матрица:

$$\eta^{ij} = \eta^{ji}, \quad \eta^{ij} = \text{const}, \quad \det(\eta^{ij}) \neq 0. \quad (2.8)$$

С другой стороны, еще в 1978 г. Магри [19] предложил бигамильтонов подход к интегрированию нелинейных систем, продемонстрировав, что интегрируемость тесно связана с бигамильтоновостью, т.е. с наличием у системы двух согласованных гамильтоновых представлений. Как показал Магри, согласованные скобки Пуассона порождают интегрируемые иерархии систем дифференциальных уравнений, и в связи с этим проблема описания согласованных пуассоновых структур является очень актуальной и важной в теории интегрируемых систем. В частности, бигамильтоновость системы порождает рекуррентные соотношения для законов сохранения этой системы.

Бигамильтонову подходу и построению согласованных пуассоновых структур для многих конкретных важных уравнений математической физики и теории поля посвящена обширная литература (см. [19], а также работы [20]–[24] и ссылки в них). Что касается задачи описания достаточно широких определенных классов согласованных пуассоновых структур, то, по-видимому, впервые она была рассмотрена в работах [25], [26] (см. также [27], [28]), где была поставлена и полностью решена задача описания всех согласованных локальных скалярных скобок Пуассона первого и третьего порядков, т.е. всех согласованных скобок Пуассона, задаваемых произвольными скалярными обыкновенными дифференциальными операторами первого и третьего порядков (обобщающих хорошо известную согласованную пару скобок Пуассона – скобку Гарднера–Захарова–Фаддеева [29], [30] (скобка первого порядка) и скобку Магри [19] (скобка третьего порядка), для уравнения Кортевега–де Фриза).

В случае однородных систем гидродинамического типа многие интегрируемые системы обладают согласованными локальными пуассоновыми структурами гидродинамического типа, задачи описания которых для конкретных систем и многочисленные примеры рассматривались во многих работах (см., например, [31]–[36]). В частности, Нутку [31] изучал специальный класс согласованных двухкомпонентных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа и связанные с ним бигамильтоновы гидродинамические системы, а Ферапонтов [13] классифицировал все двухкомпонентные однородные системы гидродинамического типа, обладающие тремя согласованными невырожденными локальными пуассоновыми структурами гидродинамического типа.

В общем виде задача об описании плоского пучка метрик (или, другими словами, задача об описании согласованных невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа) была рассмотрена Дубровиным в работах [3], [4] в связи с построением важных примеров плоских пучков метрик, порождаемых естественными парами плоских метрик на пространствах орбит групп Кокстера и на других фробениусовых многообразиях и связанных с соответствующими квазиоднородными решениями уравнений ассоциативности. В теории фробениусовых многообразий (отвечающих двумерным топологическим теориям поля), которые введены и изучены Дубровиным [3], [4], ключевую роль играют плоские пучки метрик, обладающие рядом специальных дополнительных (и весьма жестких) свойств (они удовлетворяют так называемым условиям квазиоднородности). Более того, Дубровин [5] доказал, что теория фробениусовых многообразий эквивалентна теории квазиоднородных согласованных невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа. Общая задача о согласованных невырожденных локальных пуассоновых структурах гидродинамического типа рассматривалась также Ферапонтовым в работе [6].

Общей задаче классификации всех согласованных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа, интегрируемым нелинейным системам, описывающим такие согласованные пуассоновы структуры, и специальным редукциям этой задачи, связанным с уравнениями ассоциативности, были посвящены также работы автора [7]–[10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [19]. Две скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ называются *согласованными*, если произвольная линейная комбинация этих скобок

$$\{\cdot, \cdot\} = \lambda_1 \{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda_2 \{\cdot, \cdot\}_2, \quad (2.9)$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, также является скобкой Пуассона. В этом случае говорят также, что скобки $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ образуют *пучок скобок Пуассона*.

Таким образом, задача описания согласованных невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа является чисто дифференциально-геометрической задачей описания плоских пучков метрик (см. [3], [4]).

В работах [3], [4] Дубровин выписал все тензорные соотношения для общих плоских пучков метрик.

Введем необходимые обозначения. Пусть ∇_1 и ∇_2 – операторы ковариантного дифференцирования, задаваемые связностями Леви-Чивита $\Gamma_{1,k}^{ij}(u)$ и $\Gamma_{2,k}^{ij}(u)$, порождае-

мыми метриками $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$, соответственно. Индексы у ковариантных производных поднимаются и опускаются с помощью соответствующих метрик: $\nabla_1^i = g_1^{is}(u)\nabla_{1,s}$, $\nabla_2^i = g_2^{is}(u)\nabla_{2,s}$. Рассмотрим тензор

$$\Delta^{ijk}(u) = g_1^{is}(u)g_2^{jp}(u)(\Gamma_{2,ps}^k(u) - \Gamma_{1,ps}^k(u)), \quad (2.10)$$

введенный Дубровиным [3], [4].

ТЕОРЕМА 2.2 [3], [4]. *Если метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют плоский пучок, то существует векторное поле $f^i(u)$ такое, что тензор $\Delta^{ijk}(u)$ и метрика $g_1^{ij}(u)$ имеют вид*

$$\Delta^{ijk}(u) = \nabla_2^i \nabla_2^j f^k(u), \quad (2.11)$$

$$g_1^{ij}(u) = \nabla_2^i f^j(u) + \nabla_2^j f^i(u) + cg_2^{ij}(u), \quad (2.12)$$

где c — некоторая константа, а векторное поле $f^i(u)$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta_s^{ij}(u)\Delta_l^{sk}(u) = \Delta_s^{ik}(u)\Delta_l^{sj}(u), \quad (2.13)$$

где

$$\Delta_k^{ij}(u) = g_{2,ks}(u)\Delta^{sij}(u) = \nabla_{2,k}\nabla_2^i f^j(u), \quad (2.14)$$

$$(g_1^{is}(u)g_2^{jp}(u) - g_2^{is}(u)g_1^{jp}(u))\nabla_{2,s}\nabla_{2,p}f^k(u) = 0. \quad (2.15)$$

Обратно: для плоской метрики $g_2^{ij}(u)$ и для векторного поля $f^i(u)$, являющегося решением системы уравнений (2.13) и (2.15), метрики $g_2^{ij}(u)$ и (2.12) образуют плоский пучок.

Доказательство этой теоремы немедленно следует из соотношений, эквивалентных условию, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют плоский пучок, и рассматриваемых в плоских координатах метрики $g_2^{ij}(u)$ [3], [4].

В работе [7] сформулирован явный и простой критерий согласованности двух локальных пуассоновых структур гидродинамического типа, т.е. указано, какой явный вид необходимо и достаточно иметь локальным пуассоновым структурам гидродинамического типа, для того чтобы быть согласованными.

Пока такой явный общий критерий удастся сформулировать в общем случае только на языке именно пуассоновых структур, но не на языке метрик, как в теореме 2.2. Но для неособых пар невырожденных (и локальных, и нелокальных) пуассоновых структур гидродинамического типа (т.е. для неособых пар соответствующих метрик) явный общий критерий согласованности в терминах именно соответствующих метрик получен автором в работе [1] (см. также теорему 2.5 ниже).

ЛЕММА 2.1 (явный критерий согласованности локальных скобок Пуассона гидродинамического типа) [7]. *Произвольная локальная пуассонова структура гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ является согласованной с постоянной невырожденной скобкой Пуассона (2.7) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\{I, J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta v^i(x)} \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta v^j(x)} dx, \quad (2.16)$$

где $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, – гладкие функции, определенные в некоторой окрестности.

Невырожденность скобки Пуассона гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ в лемме 2.1 не требуется. Кроме того, важно отметить, что это локальное утверждение.

В 1995 г. Ферапонтов [6] предложил подход к задаче о плоских пучках метрик, мотивированный теорией операторов рекурсии, и сформулировал без доказательства следующую теорему в качестве критерия согласованности невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа.

ТЕОРЕМА 2.3 [6]. *Две невырожденные локальные пуассоновы структуры гидродинамического типа, задаваемые плоскими метриками $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$, согласованы тогда и только тогда, когда тензор Нейенхейса аффинора*

$$v_j^i(u) = g_1^{is}(u) g_{2,sj}(u) \quad (2.17)$$

тождественно равен нулю, т.е.

$$N_{ij}^k(u) = v_i^s(u) \frac{\partial v_j^k}{\partial u^s} - v_j^s(u) \frac{\partial v_i^k}{\partial u^s} + v_s^k(u) \frac{\partial v_i^s}{\partial u^j} - v_s^k(u) \frac{\partial v_j^s}{\partial u^i} = 0. \quad (2.18)$$

Кроме того, в замечании в работе [6] указывалось, что в случае, если спектр аффинора $v_j^i(u)$ простой, равенство нулю тензора Нейенхейса влечет существование координат $R^1, \dots, R^N$, в которых все объекты $v_j^i(u)$, $g_1^{ij}(u)$, $g_2^{ij}(u)$ становятся диагональными (см. также [37], [38]). Более того, в этих координатах i -е собственное значение $v_j^i(u)$ зависит только от координаты R^i . В случае, если все собственные значения не являются постоянными, они могут быть выбраны в качестве новых координат. В этих новых координатах $\tilde{v}_j^i(R) = \text{diag}(R^1, \dots, R^N)$, $\tilde{g}_2^{ij}(R) = \text{diag}(g^1(R), \dots, g^N(R))$, $\tilde{g}_1^{ij}(R) = \text{diag}(R^1 g^1(R), \dots, R^N g^N(R))$.

Хорошо известно, что в случае конечномерных пуассоновых структур $\omega^{ij}(u)$: $\{u^i, u^j\} = \omega^{ij}(u)$ (ультралокальные пуассоновы структуры), аналогичный критерий согласованности пуассоновых структур всегда имеет место. Действительно, две пуассоновы структуры $\omega_1^{ij}(u)$ и $\omega_2^{ij}(u)$, одна из которых является невырожденной: $\det \omega_2^{ij}(u) \neq 0$, $\omega_2^{is}(u) \omega_{2,sj}(u) = \delta_j^i$, согласованы тогда и только тогда, когда тензор Нейенхейса аффинора $v_j^i(u) = \omega_1^{is}(u) \omega_{2,sj}(u)$ тождественно равен нулю. Более того, известно, что любые две скобки Пуассона

$$\{I, J\}_1 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} L_1^{ij} \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad \{I, J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} L_2^{ij} \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx,$$

гамильтонов оператор одной из которых обратим: $L_2^{is}[(L_2)^{-1}]_{sj} = \delta_j^i$, согласованы тогда и только тогда, когда соответствующий тензор Нейенхейса (естественное бесконечномерное обобщение конечномерного случая) оператора рекурсии $R_j^i = L_1^{is}[(L_2)^{-1}]_{sj}$ тождественно равен нулю (см. [24], а также [20]–[23]). В случае произвольных невырожденных локальных скобок Пуассона гидродинамического типа оператор рекурсии нелокален:

$$R_j^i = g_1^{is}(u)g_{2,sj}(u) + \text{нелокальная часть},$$

где нелокальная часть имеет вид

$$\sum_s a_{(s)k}^i(u) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ b_{(s)j}(u).$$

Таким образом, вообще говоря, аффино́р (2.17) не является оператором рекурсии в этом случае, а является его локальной частью. Общая теория операторов рекурсии в этом случае неприменима, и, как показано в [1], в общем случае теорема 2.3 неверна и соответственно не является критерием согласованности плоских метрик. Из равенства нулю соответствующего тензора Нейенхейса, вообще говоря, не следует согласованность плоских метрик. Соответствующие контрпримеры построены в работе [1]. В общем случае, как показано в [1], теорема 2.3 является в действительности критерием почти согласованности плоских метрик, что не гарантирует согласованность соответствующих невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа. Но если спектр аффино́ра $v_j^i(u)$ простой, т.е. все собственные значения различны, то, как доказано в [1], теорема 2.3 не только верна, но и допускает существенное обобщение на случай произвольных согласованных римановых или псевдоримановых метрик, в частности на особенно важные в теории систем гидродинамического типа случаи согласованных метрик постоянной римановой кривизны или согласованных метрик, порождающих общие нелокальные пуассоновы структуры гидродинамического типа.

В частности, в работе [1] доказаны следующие общие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.4 [1]. 1. Если для любой линейной комбинации (1.1) двух метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ выполняется условие (1.2), то тензор Нейенхейса (2.18) аффино́ра (2.17) тождественно равен нулю. Таким образом, для согласованных и почти согласованных метрик соответствующий тензор Нейенхейса всегда тождественно равен нулю.

2. Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, т.е. корни уравнения на λ (1.4) различны, то из равенства нулю тензора Нейенхейса (2.18) аффино́ра (2.17) следует, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ являются согласованными. Таким образом, неособая пара метрик является согласованной тогда и только тогда, когда метрики являются почти согласованными.

ТЕОРЕМА 2.5 [1]. Произвольная неособая пара метрик является согласованной тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ такие, что $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные (вообще говоря, комплексные) функции одной переменной (функции

$f^i(u^i), i = 1, \dots, N$, являются собственными значениями указанной пары метрик, и поэтому в случае неособой пары метрик эти функции не равны друг другу, если являются константами, а также не равны тождественно нулю).

В работах [7]–[10] были изучены редукции в общей задаче о согласованных плоских метриках, связанные с уравнениями ассоциативности, а именно следующий анзац в формуле (2.16):

$$h^i(v) = \eta^{is} \frac{\partial \Phi}{\partial v^s}, \quad (2.19)$$

где $\Phi(v^1, \dots, v^N)$ – функция N переменных. Соответственно, в этом случае метрики имеют вид

$$g_1^{ij}(v) = \eta^{ij}, \quad g_2^{ij}(v) = \eta^{is} \eta^{jp} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^s \partial v^p}. \quad (2.20)$$

ТЕОРЕМА 2.6 [9]. Если метрики (2.20) являются почти согласованными, то они являются согласованными. Более того, в этом случае метрика $g_2^{ij}(v)$ обязательно тоже является плоской, т.е. метрики (2.20) образуют плоский пучок метрик. Условие почти согласованности метрик (2.20) имеет вид

$$\eta^{sp} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^p \partial v^i} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial v^s \partial v^j \partial v^k} = \eta^{sp} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^p \partial v^k} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial v^s \partial v^j \partial v^i} \quad (2.21)$$

и совпадает с условием согласованной деформации двух фробениусовых алгебр, которое было получено и изучено автором в работах [8]–[10].

В частности, в работах [8]–[10] доказано, что в двухкомпонентном случае ($N = 2$) для $\eta^{ij} = \varepsilon^i \delta^{ij}$, $\varepsilon^i = \pm 1$, условие (2.21) эквивалентно следующему линейному уравнению с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\alpha \left(\varepsilon^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (v^1)^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (v^2)^2} \right) = \beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^1 \partial v^2}, \quad (2.22)$$

где α и β – произвольные константы.

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕОСОБЫХ ПАР СОГЛАСОВАННЫХ ПЛОСКИХ МЕТРИК

Рассмотрим задачу описания неособых пар согласованных плоских метрик. Из теоремы 2.5 следует, что для ее решения достаточно классифицировать пары плоских диагональных метрик вида $g_2^{ij}(u) = g^i(u) \delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i) g^i(u) \delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, – произвольные (вообще говоря, комплексные) функции одной переменной.

Задача описания диагональных плоских метрик, т.е. плоских метрик $g_2^{ij}(u) = g^i(u) \delta^{ij}$, является классической задачей дифференциальной геометрии. Эта задача, эквивалентная задаче описания криволинейных ортогональных систем координат в N -мерном евклидовом или псевдоевклидовом пространстве, была детально изучена и фактически решена в начале XX века (см. [39]). Локально такие координатные системы определяются $N(N-1)/2$ произвольными функциями двух переменных (см. также [40], [41]). Недавно Захаров [2] показал, что уравнения Ламе, описывающие криволинейные ортогональные системы координат, могут быть проинтегрированы методом обратной задачи рассеяния (см. также алгебро-геометрический подход в работе [42]).

ТЕОРЕМА 3.1. *Неособые пары согласованных плоских метрик описываются следующими интегрируемыми нелинейными системами, которые являются специальными редукциями уравнений Ламе:*

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \beta_{si} \beta_{sj} = 0, \quad i \neq j, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{f^i(u^i)} \frac{\partial(\sqrt{f^i(u^i)} \beta_{ij})}{\partial u^i} + \sqrt{f^j(u^j)} \frac{\partial(\sqrt{f^j(u^j)} \beta_{ji})}{\partial u^j} + \\ + \sum_{s \neq i, s \neq j} f^s(u^s) \beta_{si} \beta_{sj} = 0, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, – произвольные заданные функции одной переменной.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (3.1) и (3.2) – знаменитые уравнения Ламе, а уравнение (3.3) определяет нетривиальную нелинейную дифференциальную редукцию уравнений Ламе.

Рассмотрим условия, отвечающие тому, что диагональные метрики $g_2^{ij}(u) = g^i(u) \delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i) g^i(u) \delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, – произвольные функции одной указанной переменной (эти функции лишь не должны быть равны нулю тождественно), являются плоскими. Напомним, что для любой диагональной метрики $\Gamma_{jk}^i(u) = 0$, если все индексы i, j, k различны. Соответственно $R_{kl}^{ij}(u) = 0$, если все индексы i, j, k, l различны. Кроме того, в силу хорошо известных симметрий тензора римановой кривизны имеем

$$\begin{aligned} R_{kl}^{ii}(u) = R_{kk}^{jj}(u) = 0, \\ R_{il}^{ij}(u) = -R_{li}^{ij}(u) = R_{li}^{ji}(u) = -R_{il}^{ji}(u). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно рассмотреть условие $R_{kl}^{ij}(u) = 0$ (необходимое и достаточное условие того, что метрика плоская) только для следующих компонент тензора римановой кривизны: $R_{il}^{ij}(u)$, где $i \neq j$, $i \neq l$.

Для произвольной диагональной метрики $g_2^{ij}(u) = g^i(u) \delta^{ij}$ получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,ik}^i(u) = \Gamma_{2,ki}^i(u) = -\frac{1}{2g^i(u)} \frac{\partial g^i}{\partial u^k} \quad \forall i, k, \\ \Gamma_{2,jj}^i(u) = \frac{1}{2} \frac{g^i(u)}{(g^j(u))^2} \frac{\partial g^j}{\partial u^i}, \quad i \neq j, \\ R_{2,il}^{ij}(u) = g^i(u) R_{2,il}^j(u) = g^i(u) \left(\frac{\partial \Gamma_{2,il}^j}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{2,ii}^j}{\partial u^l} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^N \Gamma_{2,si}^j(u) \Gamma_{2,il}^s(u) - \sum_{s=1}^N \Gamma_{2,sl}^j(u) \Gamma_{2,ii}^s(u) \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Необходимо рассмотреть два случая.

1. В случае $j \neq l$ имеем

$$\begin{aligned} R_{2,il}^{ij}(u) &= g^i(u) \left(-\frac{\partial \Gamma_{2,ii}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{2,ii}^j(u) \Gamma_{2,il}^i(u) - \Gamma_{2,jl}^j(u) \Gamma_{2,ii}^j(u) - \Gamma_{2,ll}^j(u) \Gamma_{2,ii}^l(u) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) - \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^l} + \\ &+ \frac{1}{4 g^i(u)} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^j}{\partial u^l} - \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{g^i(u) g^l(u)} \frac{\partial g^l}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^l} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Вводя стандартные классические обозначения

$$g^i(u) = \frac{1}{(H_i(u))^2}, \quad ds^2 = \sum_{i=1}^N (H_i(u))^2 (du^i)^2, \quad (3.6)$$

$$\beta_{ik}(u) = \frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^i}, \quad i \neq k, \quad (3.7)$$

где $H_i(u)$ – коэффициенты Ламе, $\beta_{ik}(u)$ – коэффициенты вращения, мы получаем, что уравнения (3.5) эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{1}{H_j(u)} \frac{\partial H_i}{\partial u^j} \frac{\partial H_j}{\partial u^k} + \frac{1}{H_k(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^j} \frac{\partial H_i}{\partial u^k}, \quad (3.8)$$

которые, в свою очередь, эквивалентны уравнениям (3.1).

2. В случае $j = l$ имеем

$$\begin{aligned} R_{2,ij}^{ij}(u) &= g^i(u) \left(\frac{\partial \Gamma_{2,ij}^j}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{2,ii}^j}{\partial u^j} + \Gamma_{2,ii}^j(u) \Gamma_{2,ij}^i(u) + \right. \\ &+ \left. \Gamma_{2,ji}^j(u) \Gamma_{2,ij}^j(u) - \sum_{s=1}^N \Gamma_{2,sj}^j(u) \Gamma_{2,ii}^s(u) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{1}{g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \right) - \frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) - \\ &- \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} + \frac{1}{4} \frac{g^i(u)}{(g^j(u))^2} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} - \\ &- \frac{1}{4 g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \frac{\partial g^i}{\partial u^i} + \sum_{s \neq i} \frac{1}{4} \frac{g^s(u)}{g^i(u) g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^s} \frac{\partial g^i}{\partial u^s} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уравнения (3.9) эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_j}{\partial u^i} \right) + \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{1}{H_j(u)} \frac{\partial H_i}{\partial u^j} \right) + \\ + \sum_{s \neq i, s \neq j} \frac{1}{(H_s(u))^2} \frac{\partial H_i}{\partial u^s} \frac{\partial H_j}{\partial u^s} = 0, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (3.10)$$

которые, в свою очередь, эквивалентны уравнениям (3.2).

Условие, что метрика $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$ также является плоской, дает в точности $N(N-1)/2$ дополнительных уравнений (3.3), линейных по заданным функциям $f^i(u^i)$. Отметим, что в этом случае компоненты (3.5) тензора римановой кривизны обращаются в нуль автоматически, а равенство нулю компонент (3.9) дает соответствующие $N(N-1)/2$ уравнений.

Действительно, для метрики $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$ имеем

$$\tilde{H}_i(u) = \frac{H_i(u)}{\sqrt{f^i(u^i)}}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ik}(u) &= \frac{1}{\tilde{H}_i(u)} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial u^i} = \frac{\sqrt{f^i(u^i)}}{\sqrt{f^k(u^k)}} \left(\frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^i} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{f^i(u^i)}}{\sqrt{f^k(u^k)}} \beta_{ik}(u), \quad i \neq k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тогда уравнения (3.1) автоматически выполняются также и для коэффициентов вращения $\tilde{\beta}_{ik}(u)$, а уравнения (3.2) для них дают уравнения (3.3).

В частности, в случае $N = 2$ это полностью решает проблему описания неособых пар согласованных плоских метрик [1]. В следующем разделе мы приведем их полное описание.

4. ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ СОГЛАСОВАННЫЕ ПЛОСКИЕ МЕТРИКИ

Мы представим здесь (для сопоставления в дальнейшем с общим N -компонентным случаем) полное описание неособых пар двухкомпонентных согласованных плоских метрик [1] (см. также [7], [9], [10], где получена и изучена интегрируемая четырехкомпонентная однородная система гидродинамического типа, описывающая все (и особые, и неособые) двухкомпонентные согласованные плоские метрики).

Согласно теореме 2.5 для любой неособой пары двухкомпонентных согласованных метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ всегда существуют локальные координаты u^1, u^2 такие, что

$$g_2^{ij}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^1}{(b^1(u))^2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2}{(b^2(u))^2} \end{pmatrix}, \quad g_1^{ij}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^1 f^1(u^1)}{(b^1(u))^2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2 f^2(u^2)}{(b^2(u))^2} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $\varepsilon^i = \pm 1$, $i = 1, 2$; $b^i(u)$ и $f^i(u^i)$, $i = 1, 2$, — произвольные ненулевые функции указанных аргументов.

ЛЕММА 4.1. *Произвольная двухкомпонентная диагональная метрика $g_2^{ij}(u)$ (4.1) является плоской тогда и только тогда, когда функции $b^i(u)$, $i = 1, 2$, являются решениями линейной системы*

$$\frac{\partial b^2}{\partial u^1} = \varepsilon^1 \frac{\partial F}{\partial u^2} b^1(u), \quad \frac{\partial b^1}{\partial u^2} = -\varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial u^1} b^2(u), \quad (4.2)$$

где $F(u)$ — произвольная функция двух переменных.

ТЕОРЕМА 4.1 [1]. Метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ (4.1) образуют плоский пучок метрик тогда и только тогда, когда функции $b^i(u)$, $i = 1, 2$, являются решениями линейной системы (4.2), где функция $F(u)$ является решением линейного уравнения

$$2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} (f^1(u^1) - f^2(u^2)) + \frac{\partial F}{\partial u^2} \frac{df^1(u^1)}{du^1} - \frac{\partial F}{\partial u^1} \frac{df^2(u^2)}{du^2} = 0. \quad (4.3)$$

В случае, если собственные значения пары метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ не только различны, но и не являются константами, мы всегда можем выбрать локальные координаты так, что $f^1(u^1) = u^1$, $f^2(u^2) = u^2$ (см. также замечание в работе [6]). В этом случае уравнение (4.3) имеет вид

$$2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} (u^1 - u^2) + \frac{\partial F}{\partial u^2} - \frac{\partial F}{\partial u^1} = 0. \quad (4.4)$$

Продолжим рекуррентную процедуру для метрик $G_{n+1}^{ij}(u) = v_s^i(u) G_n^{sj}(u)$ с помощью аффинора $v_j^i(u) = u^i \delta_j^i$. Мы будем рассматривать здесь случай вещественных метрик, случай комплексных метрик полностью аналогичен.

ТЕОРЕМА 4.2 [1]. Три метрики

$$G_n^{ij}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^1(u^1)^n}{(b^1(u))^2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2(u^2)^n}{(b^2(u))^2} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \quad (4.5)$$

образуют плоский пучок метрик (попарно согласованы) тогда и только тогда, когда функции $b^i(u)$, $i = 1, 2$, являются решениями линейной системы (4.2), где $F(u) = c \ln(u^1 - u^2)$, c – произвольная константа.

Четыре метрики $G_n^{ij}(u)$, $n = 0, 1, 2, 3$, являются плоскими (образуют плоский пучок метрик) только в самом тривиальном случае, когда $c = 0$, и соответственно $b^1 = b^1(u^1)$, $b^2 = b^2(u^2)$.

Три метрики $G_n^{ij}(u)$, $n = 0, 1, 2$, являются плоскими, а метрика $G_3^{ij}(u)$ является метрикой ненулевой постоянной римановой кривизны $K \neq 0$ (в этом случае метрики G_n^{ij} , $n = 0, 1, 2, 3$, образуют пучок метрик постоянной римановой кривизны) тогда и только тогда, когда

$$(b^1(u))^2 = (b^2(u))^2 = \frac{\varepsilon^2}{4K} (u^1 - u^2), \quad \varepsilon^1 = -\varepsilon^2, \quad c = \pm \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

Интересно классифицировать все криволинейные ортогональные системы координат в N -мерном евклидовом или псевдоевклидовом пространстве, для которых функции $f^i(u^i) = (u^i)^n$ определяют согласованные плоские метрики (отдельно для случаев $n = 1$, $n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3$ и т.д.). Эту задачу мы подробно рассмотрим в другой работе.

5. СОГЛАСОВАННЫЕ ПЛОСКИЕ МЕТРИКИ И МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЕДУКЦИЙ ЗАХАРОВА

Напомним кратко метод Захарова интегрирования уравнений Ламе (3.1) и (3.2) [2]. Мы должны выбрать матричную функцию $F_{ij}(s, s', u)$ со специальными свойствами и решить линейное интегральное уравнение

$$K_{ij}(s, s', u) = F_{ij}(s, s', u) + \int_s^\infty \sum_l K_{il}(s, q, u) F_{lj}(q, s', u) dq. \quad (5.1)$$

При этом мы получаем однопараметрическое семейство решений уравнений Ламе по формуле

$$\beta_{ij}(s, u) = K_{ji}(s, s, u). \quad (5.2)$$

В частности, если $F_{ij}(s, s', u) = f_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, где $f_{ij}(x, y)$ — произвольная матричная функция двух переменных, то формула (5.2) задает решения уравнений (3.1). Для того чтобы построить решения уравнений (3.2), Захаров предложил наложить на “одевающую матричную функцию” $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ некоторое дополнительное линейное дифференциальное соотношение. Если $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ удовлетворяет дифференциальному соотношению Захарова (мы приведем его ниже), то коэффициенты вращения $\beta_{ij}(u)$ удовлетворяют дополнительно уравнениям (3.2).

Опишем нашу схему интегрирования всей системы уравнений (3.1)–(3.3).

ЛЕММА 5.1. Если две функции $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ и

$$\tilde{F}_{ij}(s - u^i, s' - u^j) = \frac{\sqrt{f^j(u^j - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} F_{ij}(s - u^i, s' - u^j) \quad (5.3)$$

удовлетворяют дифференциальному соотношению Захарова, то соответствующие коэффициенты вращения $\beta_{ij}(u)$ (5.2) удовлетворяют всем уравнениям (3.1)–(3.3).

Действительно, если $K_{ij}(s, s', u)$ — решение линейного интегрального уравнения (5.1), отвечающее функции $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, то

$$\tilde{K}_{ij}(s, s', u) = \frac{\sqrt{f^j(u^j - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} K_{ij}(s, s', u) \quad (5.4)$$

— решение уравнения (5.1), отвечающее функции (5.3). Это несложно доказать, умножая интегральное уравнение (5.1) на $\sqrt{f^j(u^j - s')} / \sqrt{f^i(u^i - s)}$:

$$\tilde{K}_{ij}(s, s', u) = \tilde{F}_{ij}(s - u^i, s' - u^j) + \int_s^\infty \sum_l \tilde{K}_{il}(s, q, u) \tilde{F}_{lj}(q - u^l, s' - u^j) dq. \quad (5.5)$$

Тогда и $\tilde{\beta}_{ij}(s, u) = \tilde{K}_{ji}(s, s, u)$, и $\beta_{ij}(s, u) = K_{ji}(s, s, u)$ удовлетворяют уравнениям Ламе (3.1) и (3.2). Кроме того, мы имеем

$$\tilde{\beta}_{ij}(s, u) = \tilde{K}_{ji}(s, s, u) = \frac{\sqrt{f^i(u^i - s)}}{\sqrt{f^j(u^j - s)}} K_{ji}(s, s, u) = \frac{\sqrt{f^i(u^i - s)}}{\sqrt{f^j(u^j - s)}} \beta_{ij}(s, u). \quad (5.6)$$

Таким образом, в этом случае коэффициенты вращения $\beta_{ij}(u)$ удовлетворяют в точности всем уравнениям (3.1)–(3.3), т.е. они порождают соответствующие согласованные плоские метрики.

Редукция Захарова задается следующими дифференциальными соотношениями [2]:

$$\frac{\partial F_{ij}(s, s', u)}{\partial s'} + \frac{\partial F_{ji}(s', s, u)}{\partial s} = 0. \quad (5.7)$$

Чтобы разрешить эти соотношения для матричной функции $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, можно ввести $N(N-1)/2$ произвольных функций двух переменных $\Phi_{ij}(x, y)$, $i < j$, и положить для $i < j$

$$\begin{aligned} F_{ij}(s - u^i, s' - u^j) &= \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s}, \\ F_{ji}(s - u^i, s' - u^j) &= -\frac{\partial \Phi_{ij}(s' - u^i, s - u^j)}{\partial s} \end{aligned} \quad (5.8)$$

и, кроме того, для любого i

$$F_{ii}(s - u^i, s' - u^i) = \frac{\partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s}, \quad (5.9)$$

где $\Phi_{ii}(x, y)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные кососимметрические функции (см. [2]):

$$\Phi_{ii}(x, y) = -\Phi_{ii}(y, x). \quad (5.10)$$

Для функции (5.3) дифференциальные соотношения Захарова (5.7) дают в точности $N(N-1)/2$ линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на $N(N-1)/2$ функций $\Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, $i < j$, двух переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\sqrt{f^j(u^j - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sqrt{f^i(u^i - s)}}{\sqrt{f^j(u^j - s')}} \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s'} \right) = 0, \quad i < j, \end{aligned} \quad (5.11)$$

которые эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial u^i \partial u^j} (f^i(u^i - s) - f^j(u^j - s')) + \\ + \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial u^j} \frac{df^i(u^i - s)}{du^i} - \\ - \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial u^i} \frac{df^j(u^j - s')}{du^j} = 0, \quad i < j. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Интересно, что все уравнения (5.12) для функций $\Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ одного и того же типа и совпадают с единственным уравнением (4.3) в двумерном случае ($N = 2$), полученным прямо из условий обращения в нуль соответствующих тензоров римановой

кривизны. Кроме того, для N функций $\Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)$ мы имеем также N линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, получаемых из дифференциальных соотношений Захарова (5.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\sqrt{f^i(u^i - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} \frac{\partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sqrt{f^i(u^i - s)}}{\sqrt{f^i(u^i - s')}} \frac{\partial \Phi_{ii}(s' - u^i, s - u^i)}{\partial s'} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s \partial s'} (f^i(u^i - s) - f^i(u^i - s')) - \\ - \frac{\partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s} \frac{df^i(u^i - s')}{ds'} + \\ + \frac{\partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s'} \frac{df^i(u^i - s)}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Любое решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка (5.12) и (5.14) порождает однопараметрическое семейство решений системы (3.1)–(3.3) по линейным уравнениям и явным формулам (5.8), (5.9), (5.1), (5.2). Таким образом, наша задача линеаризована.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00010) и INTAS (грант № 99-1782).

Список литературы

- [1] *O. I. Mokhov.* Compatible and almost compatible pseudo-Riemannian metrics. arXiv.math.DG/0005051.
- [2] *V. E. Zakharov.* Duke Math. J. 1998. V. 94. № 1. P. 103–139.
- [3] *B. Dubrovin.* Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups. Lect. Notes Math. V. 1620. Eds. M. Francaviglia, S. Greco. Berlin: Springer, 1996. P. 120–348; hep-th/9407018.
- [4] *B. Dubrovin.* Differential geometry of the space of orbits of a Coxeter group. Preprint SISSA-29/93/FM; hep-th/9303152.
- [5] *B. Dubrovin.* Flat pencils of metrics and Frobenius manifolds. Preprint SISSA 25/98/FM; math.DG/9803106.
- [6] *E. V. Ferapontov.* Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications. In: Topics in Topology and Mathematical Physics. Ed. S.P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1995. P. 33–58.
- [7] *О. И. Мохов.* УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 171–172.
- [8] *О. И. Мохов.* УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 153–154.
- [9] *О. И. Мохов.* Тр. МИАН. 1999. Т. 225. С. 284–300.
- [10] *O. I. Mokhov.* Rep. Math. Phys. 1999. V. 43. № 1/2. P. 247–256.
- [11] *О. И. Мохов, Е. В. Феропонтов.* УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 191–192.
- [12] *Е. В. Феропонтов.* Функци. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49.

- [13] *Е. В. Ферпонтов*. Гамильтоновы системы гидродинамического типа и их реализация на гиперповерхностях псевдоевклидова пространства. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. Т. 22. Ред. Р. В. Гамкрелидзе, Н. М. Остиану и др. М.: ВИНТИ, 1990. С. 59–96.
- [14] *О. И. Мохов*. Phys. Lett. A. 1992. V. 166. № 3, 4. P. 215–216.
- [15] *О. И. Мохов, Е. В. Ферпонтов*. Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 2. С. 60–63.
- [16] *О. И. Мохов*. УМН. 1998. Т. 53. № 3. С. 85–192.
- [17] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков*. ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
- [18] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков*. УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98.
- [19] *F. Magri*. J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162.
- [20] *И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман*. Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 4. С. 13–30.
- [21] *B. Fuchssteiner*. Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 1979. V. 3. P. 849–862.
- [22] *A. S. Fokas, B. Fuchssteiner*. Lett. Nuovo Cimento. 1980. V. 28. № 8. P. 299–303.
- [23] *П. Олвер*. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [24] *I. Dorfman*. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. Chichester: Wiley, 1993.
- [25] *О. И. Мохов*. УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 257–258.
- [26] *О. И. Мохов*. Функц. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 3. С. 53–60.
- [27] *D. B. Cooke*. J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 1. P. 109–119.
- [28] *D. B. Cooke*. J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 11. P. 3071–3076.
- [29] *C. S. Gardner*. J. Math. Phys. 1971. V. 12. № 8. P. 1548–1551.
- [30] *В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев*. Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 4. С. 18–27.
- [31] *Y. Nutku*. J. Math. Phys. 1987. V. 28. № 11. P. 2579–2585.
- [32] *P. Olver, Y. Nutku*. J. Math. Phys. 1988. V. 29. № 7. P. 1610–1619.
- [33] *M. Arik, F. Neyzi, Y. Nutku, P. J. Olver, J. M. Verosky*. J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 6. P. 1338–1344.
- [34] *F. Neyzi*. J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 8. P. 1695–1698.
- [35] *H. Gümral, Y. Nutku*. J. Math. Phys. 1990. V. 31. № 11. P. 2606–2611.
- [36] *E. V. Ferapontov, M. V. Pavlov*. Physica D. 1991. V. 52. P. 211–219.
- [37] *A. Nijenhuis*. Indagationes Math. 1951. V. 13. № 2. P. 200–212.
- [38] *A. Haantjes*. Indagationes Math. 1955. V. 17. № 2. P. 158–162.
- [39] *G. Darboux*. Leçons sur les Systèmes Orthogonaux et les Coordonnées Curvilignes. 2nd ed. Paris: Gauthier-Villars, 1910.
- [40] *Э. Картан*. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во МГУ, 1962.
- [41] *L. Bianchi*. Opere. V. 3. Sistemi Tripli Orthogonali. Roma: Edizioni Cremonese, 1955.
- [42] *И. М. Кричевер*. Функц. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 1. С. 32–50.

Поступила в редакцию 4.VII.2001 г.