Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Казакова, Конечномерные дискретные системы, интегрируемые в квадратах, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 3, 422–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:49:21

© 2004 г.

Т. Г. Казакова*

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

Рассматриваются конечномерные редукции (обрывы) дискретных цепочек типа цепочки Тоды с дискретным временем, сохраняющие интегрируемость. Показано, что помимо интегралов движения для конечномерной цепочки можно построить богатый набор высших симметрий, описание которого дается при помощи мастер-симметрии. Задача интегрирования конечномерной системы сведена к теореме о неявной функции.

Ключевые слова: интегрируемость, условие обрыва, уравнение нулевой кривизны, классическая симметрия, мастер-симметрия, интегралы движения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с интегрируемыми уравнениями в частных производных типа уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) и цепочками дифференциальных уравнений типа цепочки Тоды в последнее время интенсивно исследуются цепочки с дискретным временем. Как правило, они являются преобразованиями Беклунда для цепочек с непрерывным временем и поэтому представляют интерес с точки зрения частных решений последних. Дискретные цепочки имеют и другие приложения (см. [1]–[3]).

Один из наиболее эффективных способов построения решений дискретной цепочки состоит в отыскании ее интегрируемых конечномерных редукций. В первую очередь, это периодическое замыкание. Но есть и другие способы обрыва цепочек, сохраняющие интегрируемость [4]. Для цепочек, допускающих представление Лакса, имеется простой и эффективный метод поиска условий обрыва, согласованных с законами сохранения цепочки [5], [6]. Однако этих законов сохранения недостаточно для получения общего решения оборванной цепочки. В настоящей работе показано, что можно построить богатый набор высших симметрий, также совместных с условием обрыва цепочки. Компактное описание этого набора симметрий дается при помощи понятия мастер-симметрии. Для конечномерной редукции эти высшие симметрии переходят в классические симметрии. Имея в дополнение к первым интегралам набор симметрий, можно свести задачу интегрирования конечномерной системы к теореме о неявной функции (см. ниже теорему 3).

*Стерлитамакский государственный педагогический институт, Стерлитамак, Башкортостан, Россия. E-mail: tkazak@rambler.ru

Рассмотрим интегрируемое дискретное уравнение вида

$$u_{m+1,n} = f(u_{m,n}, u_{m-1,n}, u_{m,n+1}, u_{m,n-1}), \quad (1)$$

где $u = u_{m,n}$ — функция, определенная на пространстве $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Пусть уравнение (1) равносильно матричному уравнению

$$L_{m+1,n}(\lambda)A_{m,n}(\lambda) = A_{m,n+1}(\lambda)L_{m,n}(\lambda), \quad (2)$$

являющемуся условием интегрируемости (уравнением нулевой кривизны) следующей спектральной задачи:

$$Y_{m,n+1}(\lambda) = L_{m,n}(\lambda)Y_{m,n}(\lambda), \quad (3)$$

$$Y_{m+1,n}(\lambda) = A_{m,n}(\lambda)Y_{m,n}(\lambda), \quad (4)$$

где $L_{m,n}$ и $A_{m,n}$ — квадратные матрицы размера 2×2 , зависящие от конечного числа сдвигов переменной $u_{m,n}$ и спектрального параметра λ .

На бесконечную цепочку (1) в точке $n = N$ налагается граничное условие (условие обрыва) вида

$$u_{m,N} = F(m, u_{m,N+1}, u_{m-1,N+1}, \dots, u_{m,N+M}, u_{m-1,N+M}), \quad (5)$$

сводящее цепочку к системе уравнений с номерами $n \geq N + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы называем граничное условие (5) *совместимым* с уравнением нулевой кривизны (2), если уравнение (4) в точке $n = N$

$$Y_{m+1,N}(\lambda) = A_{m,N}(\lambda)|_{u_{m,N}=F} Y_{m,N}(\lambda) \quad (6)$$

обладает дополнительной точечной симметрией вида

$$\tilde{Y}_{m,N}(\tilde{\lambda}) = H(m, [u], \lambda)Y_{m,N}(\lambda), \quad \tilde{\lambda} = h(\lambda). \quad (7)$$

Другими словами, граничное условие (5) интегрируемо, если существуют матричная функция

$$H(m, [u], \lambda) = H(m, u_{m,N}, u_{m-1,N}, \dots, u_{m,N+k}, u_{m-1,N+k}, \lambda)$$

и инволюция $\tilde{\lambda} = h(\lambda)$ такие, что для любого решения $Y_{m,N}(\lambda)$ уравнения (6) функция (7) является решением этого же уравнения. Это означает, что должно быть выполнено следующее равенство:

$$H(m+1, [u], \lambda)A_{m,N}(\lambda) = A_{m,N}(\tilde{\lambda})H(m, [u], \lambda). \quad (8)$$

В дальнейшем без потери общности будем полагать $N = 0$.

Определение граничного условия, совместимого с уравнением нулевой кривизны, ранее было использовано при изучении уравнений типа КдФ [6] и дискретных нерелятивистских цепочек типа Тоды [5].

ПРИМЕР 1. Дискретным аналогом цепочки Тоды

$$u_{n,xx} = e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n-u_{n-1}} \quad (9)$$

является система (см. [4])

$$(T_m - 1)(u_{m,n} - u_{m-1,n}) = (T_n - 1) \ln(e^{u_{m,n}-u_{m,n-1}} - 1), \quad (10)$$

где T – оператор сдвига по соответствующей переменной, т.е. $T_m u_{m,n} = u_{m+1,n}$ и $T_n u_{m,n} = u_{m,n+1}$. Уравнению (10) соответствует спектральная задача вида (3), (4), где

$$L_{m,n} = \begin{pmatrix} \lambda + e^{u_{m,n}-u_{m-1,n}} & e^{u_{m,n}} \\ \lambda e^{-u_{m-1,n}} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{m,n} = \begin{pmatrix} \lambda & e^{u_{m,n}} \\ \lambda e^{-u_{m,n-1}} & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что уравнение (8) содержит три неизвестные функции: граничное условие $F(m, [u])$, инволюцию $h(\lambda)$ и матрицу $H(m, [u], \lambda)$, и, вообще говоря, имеет бесконечное множество решений. Однако если зафиксировать набор аргументов одной из функций $H(m, [u], \lambda)$ или $F(m, [u])$ (т.е. зафиксировать M или k), то возникают дополнительные условия и искомые функции определяются однозначно. Например, если предположить, что матрица H не зависит от динамических переменных $u_{m,n}$, т.е. $H = H(m, \lambda)$, то уравнение (8) имеет следующие два решения:

$$F = e^{-u_{m,0}} = b e^{u_{m,1}} + a, \quad (11)$$

$$H(m, \lambda) = \begin{pmatrix} (-1/\lambda)^{m-1} a / (\lambda + 1) & (-1/\lambda)^m \\ -(-1/\lambda)^m b & (-1/\lambda)^m a / (\lambda + 1) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \quad (12)$$

и

$$F = e^{-u_{m,0}} = 0, \quad H(m, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & (-\lambda)^m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda. \quad (13)$$

Отметим, что ранее были найдены граничное условие (11) в частном случае, когда $a_1 = 0$, $b_1 = 2$ и $a_2 = 1$, $b_2 = 0$, и решение (13) (см. [4]).

ПРИМЕР 2. С преобразованиями Беклунда для цепочки Тоды (9) связана динамическая система (см. [3])

$$(T_m - 1)e^{u_{m,n}-u_{m-1,n}} = (T_n - 1)e^{u_{m,n}-u_{m,n-1}}, \quad (14)$$

матрицы $L_{m,n}$ и $A_{m,n}$ для которой имеют вид [2]

$$L_{m,n} = \begin{pmatrix} \lambda + e^{u_{m,n}-u_{m-1,n}} & -e^{u_{m,n}} \\ e^{-u_{m-1,n}} & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{m,n} = \begin{pmatrix} \lambda + e^{u_{m,n}-u_{m,n-1}} & -e^{u_{m,n}} \\ e^{-u_{m,n-1}} & -1 \end{pmatrix}.$$

В работе [5] найдено граничное условие вида (13), которому также соответствуют матрица $H(m, \lambda)$ и инволюция $\tilde{\lambda}$, указанные в примере 1.

Рассмотрим конечномерную систему

$$u_{m,0} = F_-(m, u_{m,1}, u_{m-1,1}, \dots, u_{m,N}, u_{m-1,N}), \quad (15)$$

$$u_{m+1,n} = f(u_{m,n}, u_{m-1,n}, u_{m,n+1}, u_{m,n-1}), \quad n = 1, \dots, N, \quad (16)$$

$$u_{m,N+1} = F_+(m, u_{m,1}, u_{m-1,1}, \dots, u_{m,N}, u_{m-1,N}), \quad (17)$$

полученную из цепочки (1) наложением граничных условий (15) и (17), которые предполагаются совместимыми с уравнением нулевой кривизны (2). Согласно определению 1 в точках $n_- = 1$ и $n_+ = N + 1$ имеет место равенство (8), причем функции $H(m, [u], \lambda)$ и $h(\lambda)$ равны соответственно матрицам $H_- = H_-(m, [u], \lambda)$, $H_+ = H_+(m, [u], \lambda)$ и инволюциям $h_-(\lambda)$, $h_+(\lambda)$. Выполнение равенства (8) в граничных точках позволяет построить для данной системы производящую функцию интегралов движения, аналогичную функции, найденной в работе [7] для нелинейных уравнений, интегрируемых в рамках ультралокальной r -матричной схемы.

ТЕОРЕМА 1 [5]. Пусть задана конечномерная система (15)–(17) такая, что инволюции $h_+(\lambda)$ и $h_-(\lambda)$ на обоих концах совпадают, т.е. $h_- = h_+ = \tilde{\lambda}$. Тогда функция

$$g(\lambda) = \text{tr}(P(m, \lambda)H_-^{-1}(m, \lambda)P^{-1}(m, \tilde{\lambda})H_+(m, \lambda)), \quad (18)$$

где $P(m, \lambda) = L_{m,N}(\lambda) \dots L_{m,1}(\lambda)$ и $\text{tr} A$ обозначает след матрицы A , является производящей функцией интегралов движения конечномерной цепочки.

Интегралов движения, найденных с помощью теоремы 1, недостаточно для интегрирования системы (15)–(17). Как и в непрерывном случае, решение конечномерной системы можно построить, имея дополнительно определенное количество дифференциально-разностных симметрий. Заметим, что для интегрирования дискретной системы необходимо на одну симметрию больше, чем для непрерывной системы той же размерности (см. ниже теорему 3).

Интегрирование конечномерных систем рассматривается на примере цепочек (10) и (14) с условиями обрыва, приведенными выше. Для данных систем найдено необходимое количество интегралов движения и дифференциально-разностных симметрий. Приведены мастер-симметрии, позволяющие рекуррентно строить симметрии редукций цепочек (10) и (14), согласованные с условиями обрыва.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ СИММЕТРИИ

Симметрией дискретного уравнения (1) называется уравнение вида

$$\frac{du_{m,n}}{dt} = g(u_{m,n-k}, u_{m-1,n-k}, \dots, u_{m,n+k}, u_{m-1,n+k}), \quad (19)$$

удовлетворяющее равенству (см. [8])

$$T_m g([u]) = D_t(f([u])). \quad (20)$$

Будем считать, что уравнение (19) эквивалентно условию совместности

$$D_t L_n(t, \lambda) = V_{n+1}(t, \lambda) L_n(t, \lambda) - L_n(t, \lambda) V_n(t, \lambda) \quad (21)$$

следующей пары линейных уравнений:

$$\begin{aligned} Y_{n+1}(t, \lambda) &= L_n(t, \lambda)Y_n(t, \lambda), \\ D_t Y_n(t, \lambda) &= V_n(t, \lambda)Y_n(t, \lambda). \end{aligned} \quad (22)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Граничное условие

$$u_{m,0} = F(m, u_{m,1}, u_{m-1,1}, \dots, u_{m,M}, u_{m-1,M}) \quad (23)$$

называется *совместимым* с уравнением нулевой кривизны (21), если уравнение (22) в точке $n = 0$

$$D_t Y_0(t, \lambda) = V_0(t, \lambda)|_{u_{m,0}=F} Y_0(t, \lambda)$$

обладает дополнительной точечной симметрией вида

$$\tilde{Y}_0(t, \tilde{\lambda}) = H(t, [u], \lambda) Y_0(t, \lambda), \quad \tilde{\lambda} = h(\lambda).$$

Как и в дискретном случае (см. определение 1), совместимость в смысле определения 2 означает, что в точке $n = 0$ выполнено равенство

$$D_t H(t, [u], \lambda) = V_0(t, \tilde{\lambda}) H(t, [u], \lambda) - H(t, [u], \lambda) V_0(t, \lambda). \quad (24)$$

Так как уравнение (19) рассматривается в качестве симметрии уравнения (1), то предполагается, что граничное условие (23) и функции $H(t, [u], \lambda)$, $h(\lambda)$ для уравнений (1) и (19) одни и те же.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть для конечномерной системы (19) с граничными условиями (15) и (17), совместимыми со свойством интегрируемости цепочки, инволюции $h(\lambda)$ на обоих концах совпадают и равны $\tilde{\lambda}$. Тогда функция (18) является производящей функцией интегралов движения данной системы.

Вообще говоря, при $k > 1$ граничного условия (23) недостаточно для того, чтобы замкнуть цепочку (19). Необходимо наряду с (23) выразить переменные $u_{m,-k}, u_{m-1,-k}, \dots, u_{m,-1}, u_{m-1,-1}$ через динамические переменные $u_{m,1}, u_{m-1,1}, u_{m,2}, u_{m-1,2}, \dots$ [9]. Алгоритм продолжения граничного условия (23) легко получить, если предположить, что переменные $u_{m,0}, u_{m-1,0}, \dots, u_{m,-k}, u_{m-1,-k}$ также удовлетворяют уравнению (1). Прежде всего, из (23) найдем выражение для $u_{m+1,0}$:

$$u_{m+1,0} = T_m F = \hat{F}(u_{m,1}, u_{m-1,1}, \dots, u_{m,s}, u_{m-1,s}, u_{m,s+1}).$$

Разрешая уравнение $T_m F = \hat{F} = f(u_{m,0}, u_{m-1,0}, u_{m,1}, u_{m-1,1})$ относительно $u_{m,-1}$, получим

$$u_{m,-1} = F_{-1}(u_{m,1}, u_{m-1,1}, \dots, u_{m,s}, u_{m-1,s}, u_{m,s+1}).$$

Далее из уравнений $T_m F_{1-j} = f(F_{1-j}, T_m^{-1} F_{1-j}, F_{2-j}, u_{m,-j})$ последовательно находим $u_{m,-j} = F_{-j}(u_{m,1}, u_{m-1,1}, \dots, u_{m,s+j}), j = 2, \dots, k$.

Будем называть граничное условие (23) *вырожденным*, если

$$\left. \frac{\partial f(u_{m,0}, u_{m-1,0}, u_{m,1}, u_{m,-1})}{\partial u_{m,-1}} \right|_{u_{m,0}=F} = 0.$$

Очевидно, что вырожденное граничное условие нельзя продолжить, однако оно полностью замыкает цепочку на полуоси $n > 0$. Более того, коммутирующие цепочки (1) и (19) после обрыва с помощью вырожденного граничного условия остаются коммутирующими.

Действительно, поскольку граничное условие (23) вырожденно, то переменные $u_{m,-1}, u_{m-1,-1}, u_{m,-2}, u_{m-1,-2}, \dots$ можно считать независимыми. Запишем условие коммутирования (20) потоков, задаваемых уравнениями (1) и (19) в точке $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u_{m,0}} D_t(F) + \frac{\partial f_1}{\partial u_{m,1}} g_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_{m-1,1}} T_m^{-1} g_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_{m,2}} g_2 = \\ = T_m g_1 = g_1(u_{m+1,-k}, u_{m,-k}, \dots, u_{m+1,k}, u_{m,k}). \end{aligned}$$

Здесь нижний индекс у функций f и g обозначает сдвиг по n . Заметим, что левая часть последнего равенства не зависит от переменной $u_{m,-k-1}$, следовательно, функция $T_m g_1$ не зависит от $u_{m+1,-k} = f(u_{m,-k}, u_{m-1,-k}, u_{m,1-k}, u_{m,-k-1})$, т.е. функция g_1 не зависит от $u_{m,-k}$. Повторяя рассуждения для $u_{m,-i}, u_{m-1,-i}$, $i = 1, \dots, k-1$, получим, что правая часть уравнения

$$\frac{du_{m,1}}{dt} = g(u_{m,1-k}, u_{m-1,1-k}, \dots, u_{m,1+k}, u_{m-1,1+k})$$

при выполнении условия (23) зависит только от переменных $u_{m,1}, u_{m-1,1}, u_{m,2}, u_{m-1,2}, \dots$. Аналогично можно показать, что остальные уравнения цепочки (19) для $n > 0$ не зависят от переменных $u_{m,-i}, u_{m-1,-i}$, $i = 1, \dots, k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть на бесконечные цепочки (1) и (19) в точке $n = 0$ налагается граничное условие (23), совместимое с уравнениями нулевой кривизны (2) и (21), причем граничному условию соответствуют матрица $H(t, [u], \lambda)$ и инволюция $h(\lambda)$ и в точке $t = 0$ для любого t выполнено равенство

$$D_t A_{0,0} = V_{1,0} A_{0,0} - A_{0,0} V_{0,0}.$$

Тогда коммутирование потоков, задаваемых рассматриваемыми уравнениями, сохраняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие коммутирования (20) равносильно матричному уравнению

$$T_m(D_t L_{m,n}) = D_t(T_m L_{m,n}).$$

Можно проверить, что последнее равенство выполнено, если имеет место уравнение

$$D_t A_{m,n} = V_{m+1,n} A_{m,n} - A_{m,n} V_{m,n}. \quad (25)$$

Следовательно, для доказательства предложения нам нужно показать, что в точке $n = 0$ выполнено равенство (25).

Поскольку граничное условие (23) совместимо со свойством интегрируемости уравнений (1) и (19), то выполнены равенства (8) и (24), т.е.

$$\begin{aligned} A_{m,0}(\lambda) &= H_{m+1}^{-1} A_{m,0}(\tilde{\lambda}) H_m, \\ V_{m,0}(\lambda) &= H_m^{-1} V_{m,0}(\tilde{\lambda}) H_m - H_m^{-1} D_t H_m. \end{aligned} \quad (26)$$

Равенства (26) позволяют записать уравнения (4) и (22) в точке $n = 0$ в виде

$$\begin{aligned} Y_{m+1}(\lambda) &= H_{m+1}^{-1} A_m(\tilde{\lambda}) H_m Y_m(\lambda) = H_{m+1}^{-1} A_m(\tilde{\lambda}) A_{m-1}(\tilde{\lambda}) H_{m-1} Y_{m-1}(\lambda), \\ D_t Y_m(\lambda) &= (H_m^{-1} V_m(\tilde{\lambda}) H_m - H_m^{-1} D_t H_m) Y_m(\lambda) = \\ &= (H_m^{-1} V_m(\tilde{\lambda}) H_m - H_m^{-1} D_t H_m) H_m^{-1} A_{m-1}(\tilde{\lambda}) H_{m-1} Y_{m-1}(\lambda). \end{aligned}$$

Условием совместности двух последних уравнений является равенство

$$D_t A_m(\tilde{\lambda}) = V_{m+1}(\tilde{\lambda}) A_m(\tilde{\lambda}) - A_m(\tilde{\lambda}) (D_t A_{m-1}(\tilde{\lambda}) + A_{m-1}(\tilde{\lambda}) V_{m-1}(\tilde{\lambda})) A_{m-1}^{-1}(\tilde{\lambda}). \quad (27)$$

Так как по условию предложения $D_t A_0(\lambda) + A_0(\lambda) V_0(\lambda) = V_1(\lambda) A_0(\lambda)$ (что в силу (26) равносильно $D_t A_0(\tilde{\lambda}) + A_0(\tilde{\lambda}) V_0(\tilde{\lambda}) = V_1(\tilde{\lambda}) A_0(\tilde{\lambda})$), то из (27) следует, что уравнение (25) выполнено для любого m . Предложение доказано.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим цепочку (10) с граничным условием $e^{-u_{m,0}} = b e^{u_{m,1}} + a$. Согласно предложению 2 необходимо найти такие симметрии системы (10), для которых граничное условие (11) согласовано с соответствующими уравнениями нулевой кривизны при функциях H и $\tilde{\lambda}$, заданных соотношениями (12). Из семейства матриц $V_{m,n}$, соответствующих симметрии, можно выбрать такие, для которых в точке $m = 0, n = 0$ выполнено равенство (25). Этому условию удовлетворяют следующие симметрии:

$$\begin{aligned} u_{t_1} &= g_1 = \psi_{m,n} - \phi_{m,n}, \\ u_{t_2} &= g_2 = \psi_{m,n}^2 + e^{u_{m-1,n+1}-u_{m,n}} \psi_{m,n} + e^{u_{m-1,n}-u_{m,n-1}} \psi_{m,n-1} - \\ &\quad - \phi_{m,n}^2 - e^{u_{m,n}-u_{m-1,n-1}} \phi_{m,n} - e^{u_{m,n+1}-u_{m-1,n}} \phi_{m,n+1}, \end{aligned}$$

где $\phi = (e^{u_{m,n+1}} + e^{u_{m,n}}) e^{-u_{m-1,n}}$ и $\psi = e^{u_{m-1,n}} (e^{-u_{m,n}} + e^{-u_{m,n-1}})$. Им соответствуют матрицы

$$\begin{aligned} V^1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda} + e^{u_{m,n}-u_{m-1,n-1}} - \frac{\lambda}{2} & \frac{1}{\lambda} e^{u_{m-1,n}} - e^{u_{m,n}} \\ e^{-u_{m,n-1}} - \lambda e^{-u_{m-1,n-1}} & -\frac{1}{2\lambda} + e^{u_{m-1,n}-u_{m,n-1}} + \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}, \\ V^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda^4}{2\lambda^2} - \frac{e^{u_{m,n}}}{e^{u_{m-1,n-1}}} \alpha_{m,n} - \frac{e^{u_{m-1,n}}}{\lambda e^{u_{m,n-1}}} & \frac{e^{u_{m-1,n}}}{\lambda} \gamma_{m,n} + e^{u_{m,n}} \delta_{m,n} \\ \frac{\gamma_{m,n-1}}{e^{u_{m,n-1}}} + \frac{\lambda \delta_{m,n-1}}{e^{u_{m-1,n-1}}} & -\frac{1-\lambda^4}{2\lambda^2} + \frac{e^{u_{m-1,n}}}{e^{u_{m,n-1}}} \beta_{m,n} - \frac{\lambda e^{u_{m,n}}}{e^{u_{m-1,n-1}}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n} &= \phi_{m,n} + \phi_{m,n-1} + e^{u_{m,n-1}-u_{m-1,n+2}} - \lambda, \\ \beta_{m,n} &= \frac{1}{\lambda} - \psi_{m,n} - \psi_{m,n+1} - e^{u_{m-1,n-1}-u_{m,n-2}}, \\ \gamma_{m,n} &= \frac{1}{\lambda} - \psi_{m,n} - e^{u_{m-1,n+1}-u_{m,n}}, \\ \delta_{m,n} &= \phi_{m,n} + e^{u_{m,n}-u_{m-1,n-1}} - \lambda. \end{aligned}$$

Граничное условие $e^{-u_{m,0}} = 0$ является вырожденным и, следовательно, сохраняет все приведенные выше симметрии.

ПРИМЕР 4. Граничное условие $e^{-u_{m,0}} = 0$ для цепочки (14) является вырожденным, поэтому полученная полубесконечная система сохраняет все свои симметрии, например

$$\begin{aligned} q_{t_1} = g_1 &= e^{u_{m,n+1}-u_{m,n}} + e^{u_{m,n}-u_{m-1,n}}, \\ q_{t_2} = g_2 &= g_1^2 + e^{2u_{m,n+1}-u_{m,n}} (e^{-u_{m-1,n+1}} - e^{-u_{m,n}}) + \\ &+ e^{u_{m,n+2}-u_{m,n}} + e^{u_{m,n}-u_{m-1,n-1}}, \end{aligned}$$

матрицы V для которых имеют вид

$$\begin{aligned} V^1 &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & -e^{u_{m,n}} \\ e^{-u_{m-1,n-1}} & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}, \\ V^2 &= \begin{pmatrix} \frac{e^{u_{m,n}}}{e^{u_{m-1,n-1}}} - \frac{\lambda^2}{2} & e^{u_{m,n+1}} + \frac{e^{2u_{m,n}}}{e^{u_{m-1,n}}} - \lambda e^{u_{m,n}} \\ \frac{\lambda}{e^{u_{m-1,n-1}}} - \left(\frac{e^{u_{m,n-1}}}{e^{2u_{m-1,n-1}}} + \frac{1}{e^{u_{m-1,n-2}}} \right) & \frac{\lambda^2}{2} - \frac{e^{u_{m,n}}}{e^{u_{m-1,n+1}}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. МАСТЕР-СИММЕТРИИ И УРАВНЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Как отмечалось выше, система (15)–(17) обладает большим количеством интегралов движения. Однако этих интегралов недостаточно для интегрирования системы. Поиск неполиномиальных первых интегралов затруднителен. Поэтому уместно искать полиномиальные симметрии системы (15)–(17) с тем, чтобы потом воспользоваться известным обобщением теоремы Лиувилля. Иерархия высших симметрий исходной бесконечной цепочки

$$\frac{du_{m,n}}{dt_i} = g_i(u_{m,n-k}, u_{m-1,n-k}, \dots, u_{m,n+k}, u_{m-1,n+k}), \quad i = 1, 2, \dots,$$

может быть получена рекуррентно при помощи мастер-симметрии.

Уравнение

$$\frac{du_{m,n}}{d\tau} = \rho(n, u_{m,n-j}, u_{m-1,n-j}, \dots, u_{m,n+j}, u_{m-1,n+j}) \quad (28)$$

называется мастер-симметрией уравнения

$$\frac{du_{m,n}}{dt} = g(u_{m,n-k}, u_{m-1,n-k}, \dots, u_{m,n+k}, u_{m-1,n+k}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

если выполнено условие $[g, [g, \rho]] = 0$, где $[g, \rho] = (dg/d\tau)\rho - (d\rho/dt)g$ (см. [10]).

Будем считать, что уравнение (28) равносильно условию совместности следующих линейных уравнений:

$$\begin{aligned} Y_{n+1}(\tau, \lambda) &= L_n(\tau, \lambda)Y_n(\tau, \lambda), \\ D_\tau Y_n(\tau, \lambda) &= W_n(\tau, \lambda)Y_n(\tau, \lambda), \end{aligned}$$

где спектральный параметр λ зависит от времени τ , причем $d\lambda/d\tau = \lambda^s$. Тогда имеют место следующие соотношения [11]:

$$\begin{aligned} [[V^i, W]] &= V^{i+1}, \\ [g_i, \rho] &= g_{i+1}, \quad i \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$[[V^i, W]] = D_\tau V - D_{t_i} W + [V^i, W] + \frac{d\lambda}{d\tau} D_\lambda V^i. \quad (29)$$

Пусть уравнения $u_{t_i} = g_i([u])$ и $u_\tau = \rho(n, [u])$ оборваны в точке $n = 0$ при помощи граничного условия (23), совместимого со свойством интегрируемости рассматриваемых систем. Выясним, является ли в этом случае граничное условие (23) совместимым со свойством интегрируемости системы $u_{t_{i+1}} = g_{i+1}([u])$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть граничное условие $u_{m,0} = F(m, [u])$ совместимо со свойством интегрируемости систем $du_{m,n}/dt = g([u])$ и $du_{m,n}/d\tau = \rho(n, [u])$, тогда оно совместимо и с уравнением нулевой кривизны

$$D_{\hat{t}} L_n = \hat{V}_{n+1} L_n - L_n \hat{V}_n,$$

где $du/d\hat{t} = [g, \rho]$ и $\hat{V} = [[V, W]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку рассматриваемые в условии предложения системы совместимы в точке $n = 0$ с соответствующими уравнениями нулевой кривизны, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} V_{m,0} &= H^{-1}(t) [V_{m,0}(\tilde{\lambda}) H(t) - D_t H(t)], \\ W_{m,0} &= H^{-1}(\tau) \left[W_{m,0}(\tilde{\lambda}) H(\tau) - D_\tau H(\tau) - D_\lambda H(\tau) \frac{d\lambda}{d\tau} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя последние равенства в (29) и учитывая, что

$$D_{\hat{t}} H = D_\tau D_t H - D_t D_\tau H,$$

получим

$$\hat{V}_{m,0} = H^{-1}(\hat{t}) (\hat{V}_{m,0}(\tilde{\lambda}) H(\hat{t}) - D_{\hat{t}} H(\hat{t})),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, для построения иерархии высших симметрий системы (15)–(17) достаточно найти одну дифференциально-разностную симметрию, для которой граничные условия (15) и (17) совместимы со свойством интегрируемости, и ее мастер-симметрию.

ПРИМЕР 5. Цепочке (10) с граничным условием (11) в точке $n = 0$ соответствует мастер-симметрия

$$\frac{du_{m,n}}{d\tau} = (n - m)\psi_{m,n} - (n + m + 1)\phi_{m,n} + \sum_{i=-\infty}^{n-1} \psi_{m,i} - \sum_{i=-\infty}^n \phi_{m,i},$$

для которой

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2(1+2n)+1}{2\lambda} - \frac{(n+m)e^{u_{m,n}}}{e^{u_{m-1,n-1}}} - \sum_{i=-\infty}^{n-1} \phi_{m,i} & \frac{m-n}{\lambda} e^{u_{m-1,n}} + (n+m+1)e^{u_{m,n}} \\ \frac{m-n+1}{e^{u_{m,n-1}}} + \lambda \frac{n+m}{e^{u_{m-1,n-1}}} & \frac{(m-n)e^{u_{m-1,n}}}{e^{u_{m,n-1}}} - \frac{\lambda^2+1-2n}{2\lambda} - \sum_{i=-\infty}^{n-1} \psi_{m,i} \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 1 + \lambda^2,$$

где приняты обозначения из примера 3.

ПРИМЕР 6. Мастер-симметрией цепочки (14) с граничным условием $e^{-u_{m,0}} = 0$ является уравнение

$$\frac{du_{m,n}}{d\tau} = (c-n)(e^{u_{m,n+1}-u_{m,n}} + e^{u_{m,n}-u_{m-1,n}}) - 2 \sum_{i=-\infty}^{n-1} e^{u_{m,i}-u_{m-1,i}},$$

которому соответствуют

$$W = \begin{pmatrix} \lambda n - \sum_{i=-\infty}^{n-1} e^{u_{m,i}-u_{m-1,i}} & (c+1-n)e^{u_{m,n}} \\ (n-c-2)e^{-u_{m-1,n-1}} & \lambda(c+2) + \sum_{i=-\infty}^{n-1} e^{u_{m,i}-u_{m-1,i}} \end{pmatrix}, \quad \frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda^2.$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Задача об интегрировании конечномерной цепочки

$$\frac{du_n}{dt} = g(u_1, \dots, u_N), \quad n = 1, \dots, N,$$

сводится к теореме о неявной функции при наличии достаточного количества интегралов движения и классических симметрий. Ниже нам понадобится

ТЕОРЕМА 2 [12]. Пусть заданы коммутирующие векторные поля

$$X_j = \sum_{k=1}^N g_{j,k}(u_1, \dots, u_N) \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad j = 1, \dots, N', \quad N' \leq N,$$

удовлетворяющие условию $\text{rank}(g_{j,k}) = N'$, и функционально независимые первые интегралы $I_j(u_1, \dots, u_N)$, $j = 1, \dots, N - N'$, такие, что

$$X_j(I_i) = 0, \quad j = 1, \dots, N', \quad i = 1, \dots, N - N'.$$

Тогда каждая из N' динамических систем

$$\frac{du_n}{dt_j} = g_{j,n}(u_1, \dots, u_N), \quad n = 1, \dots, N,$$

интегрируема в квадратурах.

Покажем, что аналогичная теорема имеет место и в дискретном случае. Начнем с простого примера.

ПРИМЕР 7. Пусть динамическая система

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad (30)$$

обладает дифференциально-разностной симметрией

$$\frac{du_n}{dt} = g(u_n). \quad (31)$$

Тогда система (30) интегрируема в квадратурах.

Действительно, из условия коммутирования систем (30) и (31) следует, что

$$\frac{df(u_n)}{du_n} g(u_n) = g(f(u_n)) \quad \text{или} \quad \frac{df(u_n)}{g(f(u_n))} = \frac{du_n}{g(u_n)}.$$

Интегрирование последнего равенства приводит к соотношению

$$G(f(u_n)) = G(u_{n+1}) = G(u_n) + c, \quad (32)$$

где $G = G(x)$ – первообразная функции $1/g(x)$, c – константа интегрирования.

Сделав в (32) замену переменных $\hat{u}_n = G(u_n)$, получим $\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n + c$, т.е. $\hat{u}_n = \hat{u}_0 + nc$. Обратная замена приводит нас к ответу:

$$u_n = G^{-1}(G(u_0) + nc).$$

Интересно отметить, что уравнение (30) для произвольной функции f не интегрируемо (см. [13]).

Вернемся к общей ситуации. Пусть конечномерная система (15)–(17) коммутирует с N' дифференциально-разностными симметриями

$$\begin{aligned} \frac{du_{m,n}}{dt_i} &= g_i(u_{m,n-k}, u_{m-1,n-k}, \dots, u_{m,n+k}, u_{m-1,n+k}), \\ n &= 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, N', \end{aligned} \quad (33)$$

граничные условия для которых определяются равенствами (15) и (17).

Пусть заданы $2N - N'$ интегралов движения

$$I_i = I_i(u_{m,1}, u_{m-1,1}, \dots, u_{m,N}, u_{m-1,N}), \quad i = 1, \dots, 2N - N', \quad (34)$$

такие, что

$$(T_m - 1)I_i = 0, \quad D_{t_j} I_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2N - N', \quad j = 1, \dots, N'. \quad (35)$$

Рассмотрим вопрос о построении общего решения системы (15)–(17).

ТЕОРЕМА 3. Если конечномерная система (15)–(17) обладает N' функционально независимыми симметриями (33) и $2N - N'$ функционально независимыми интегралами движения (34), удовлетворяющими условиям (35), то она интегрируема в квадратурах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование функционально независимых интегралов движения I_i , $i = 1, \dots, 2N - N'$, позволяет исключить из (15) и (17) $2N - N'$ переменных и привести указанные системы к виду

$$u_{m+1,n} = f_n(u_{m,1}, \dots, u_{m,N'}), \quad (36)$$

$$\frac{du_{m,n}}{dt_i} = g_{i,n}(u_{m,1}, \dots, u_{m,N'}), \quad i, n = 1, \dots, N'. \quad (37)$$

Согласно теореме 2 каждое из уравнений (37) является интегрируемым в квадратурах, следовательно, по теореме о выпрямлении фазового потока (см., например, [14]) цепочку $du_n/dt_1 = g_{1,n}$ можно привести к виду (здесь и далее верхний индекс обозначает порядковый номер замены переменных)

$$\frac{du_{m,1}^1}{dt_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{du_{m,N'-1}^1}{dt_1} = 0, \quad \frac{du_{m,N'}^1}{dt_1} = 1. \quad (38)$$

Применим использованную при этом замену переменных к остальным цепочкам (37) и дискретной системе (36):

$$\frac{du_{m,n}^1}{dt_j} = g_{j,n}(u_{m,1}^1, \dots, u_{m,N'}^1), \quad j = 2, \dots, N', \quad n = 1, \dots, N', \quad (39)$$

$$u_{m+1,n}^1 = f_n(u_{m,1}^1, \dots, u_{m,N'}^1), \quad n = 1, \dots, N'. \quad (40)$$

Запишем условие коммутирования потоков, задаваемых уравнениями (38) и (39):

$$\frac{d^2 u_{m,n}^1}{dt_1 dt_j} = \frac{dg_{j,n}}{du_{m,1}^1} \frac{du_{m,1}^1}{dt_1} + \dots + \frac{dg_{j,n}}{du_{m,N'-1}^1} \frac{du_{m,N'-1}^1}{dt_1} + \frac{dg_{j,n}}{du_{m,N'}^1} \frac{du_{m,N'}^1}{dt_1} = 0,$$

т.е. $dg_{j,n}/du_{m,N'}^1 = 0$. Следовательно, после замены переменных функции $g_{j,n}$, $j = 2, \dots, N'$, $n = 1, \dots, N'$, не зависят от динамической переменной $u_{m,N'}^1$. Данное утверждение верно и для функций f_n , $n = 1, \dots, N' - 1$. Из условия коммутирования для последнего уравнения системы (40) следует, что $df_{N'}/du_{m,N'}^1 = 1$, т.е.

$$f_{N'} = u_{m+1,N'}^1 = u_{m,N'}^1 + \phi_{N'}(u_{m,1}^1, \dots, u_{m,N'-1}^1).$$

Рассмотрим теперь $N' - 1$ полученных систем уравнений. Гладкая замена переменных, приводящая систему

$$\frac{du_{m,n}^1}{dt_2} = g_{2,n}(u_{m,1}^1, \dots, u_{m,N'-1}^1), \quad n = 1, \dots, N' - 1,$$

к виду

$$\frac{du_{m,1}^2}{dt_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{du_{m,N'-2}^2}{dt_2} = 0, \quad \frac{du_{m,N'-1}^2}{dt_2} = 1,$$

позволяет перейти к новым функциям $g_{j,n}$, $j = 3, \dots, N'$, $n = 1, \dots, N' - 1$, и f_n , $n = 1, \dots, N' - 2$, не зависящим от динамической переменной $u_{m,N'-1}^2$. При этом предпоследнее уравнение системы (36) будет иметь вид

$$u_{m+1,N'-1}^2 = u_{m,N'-1}^2 + \phi_{N'-1}(u_{m,1}^2, \dots, u_{m,N'-2}^2).$$

Таким образом, воспользовавшись $N' - 1$ заменой переменных, мы приведем первые два уравнения системы (36) и системы

$$\frac{du_{m,n}}{dt_{N'}} = g_{N',n}(u_{m,1}, \dots, u_{m,N'})$$

к виду

$$u_{m+1,1}^{N'-1} = f_1(u_{m,1}^{N'-1}), \quad (41)$$

$$u_{m+1,2}^{N'-1} = u_{m,2}^{N'-1} + \phi_2(u_{m,1}^{N'-1}), \quad (42)$$

$$\frac{du_{m,1}^{N'-1}}{dt_{N'}} = g_{N',1}(u_{m,1}^{N'-1}), \quad (43)$$

$$\frac{du_{m,2}^{N'-1}}{dt_{N'}} = g_{N',2}(u_{m,1}^{N'-1}).$$

Уравнения (41) и (43) удовлетворяют условию, заданному в примере 7, поэтому $u_{m,1}^{N'-1} = G^{-1}(mc + G(u_{0,1}^{N'-1}))$, где G – первообразная функции $1/g_{N',1}$, c – произвольная постоянная.

Из уравнения (42) следует, что

$$u_{m,2}^{N'-1} = u_{0,2}^{N'-1} + \sum_{i=0}^m \phi_2(u_{i,1}^{N'-1}).$$

Вернувшись к системе $u_{m+1,n}^{N'-2} = f_n(u_{m,1}^{N'-2}, u_{m,2}^{N'-2}, u_{m,3}^{N'-2})$, $n = 1, 2, 3$, мы можем найти функцию

$$u_{m,3}^{N'-2} = u_{0,3}^{N'-2} + \sum_{i=0}^m \phi_3(u_{i,1}^{N'-2}, u_{i,2}^{N'-2}).$$

Последовательное применение обратной замены переменных позволяет на каждом шаге определить одну из искоемых функций:

$$u_{m,n}^{N'-n+1} = u_{0,n}^{N'-n+1} + \sum_{i=0}^m \phi_n(u_{i,1}^{N'-n+1}, \dots, u_{i,n-1}^{N'-n+1}).$$

Теорема доказана.

В заключение приведем примеры интегрируемых конечномерных систем.

ПРИМЕР 8. Цепочка (10) с граничными условиями $e^{-q_{m,0}} = b_1 e^{q_{m,1}} + a_1$ и $e^{q_{m,3}} = b_2 e^{-q_{m,2}} + a_2$ имеет два интеграла движения

$$\begin{aligned} I_1 &= G(a_2, b_2, -q_{m,2}, -q_{m-1,2}) + G(a_1, b_1, q_{m,1}, q_{m-1,1}) + e^{q_{m-1,2} - q_{m,1}} + e^{q_{m,2} - q_{m-1,1}}, \\ I_2 &= G(a_2, b_2, -q_{m,2}, -q_{m-1,2})G(a_1, b_1, q_{m,1}, q_{m-1,1}) + a_1(e^{q_{m,2}} + e^{q_{m-1,2}}) + \\ &\quad + 2(e^{q_{m,2} - q_{m,1}} + e^{q_{m-1,2} - q_{m-1,1}}) + e^{q_{m,2} + q_{m-1,2} - q_{m,1} - q_{m-1,1}}, \end{aligned}$$

где $G(a, b, u, v) = a(e^u + e^v) + buv + v/u + u/v$. Дифференциально-разностные уравнения из примера 3 являются симметриями этой конечномерной системы. Таким образом,

согласно теореме 3 данная двумерная редукция цепочки (10) интегрируема в квадратурах.

В случае граничных условий $e^{-q_{m,0}} = b_1 e^{q_{m,1}} + a_1$ и $e^{q_{m,N+1}} = b_2 e^{-q_{m,N}} + a_2$ теорема 1 позволяет построить N функционально независимых первых интегралов для конечномерной системы. N необходимых для интегрируемости симметрий находятся с помощью мастер-симметрии (пример 5).

ПРИМЕР 9. Рассмотрим дискретную систему

$$\begin{aligned} e^{u_{m+1,1}-u_{m,1}} - e^{u_{m,1}-u_{m-1,1}} &= e^{u_{m,2}-u_{m,1}}, \\ e^{u_{m+1,2}-u_{m,2}} - e^{u_{m,2}-u_{m-1,2}} &= -e^{u_{m,2}-u_{m,1}} \end{aligned} \quad (44)$$

с граничными условиями $e^{-u_{m,0}} = 0$ и $e^{u_{m,3}} = 0$. Для этой системы можно найти две дифференциально-разностные симметрии

$$\begin{aligned} \frac{du_{m,1}}{dt_1} &= e^{u_{m,2}-u_{m,1}} + e^{u_{m,1}-u_{m-1,1}}, \\ \frac{du_{m,2}}{dt_1} &= e^{u_{m,2}-u_{m,1}} \end{aligned} \quad (45)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{du_{m,1}}{dt_2} &= 2e^{u_{m,2}-u_{m-1,1}} + e^{2u_{m,2}-u_{m-1,2}-u_{m,1}} + e^{2u_{m,1}-2u_{m-1,1}}, \\ \frac{du_{m,2}}{dt_2} &= e^{u_{m,2}-u_{m-1,1}} + e^{2u_{m,2}-2u_{m-1,2}}. \end{aligned} \quad (46)$$

С помощью теоремы 1 для рассматриваемых систем построим два первых интеграла:

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{u_{m,1}-u_{m-1,1}} + e^{u_{m,2}-u_{m-1,2}}, \\ I_2 &= e^{u_{m,2}-u_{m-1,2}} e^{u_{m,1}-u_{m-1,1}} - e^{u_{m,2}-u_{m-1,1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, система (44) удовлетворяет условиям теоремы 3 и, следовательно, является интегрируемой. Найдем ее решение.

Теорема 2 позволяет найти для систем (45) и (46) два дополнительных первых интеграла

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \ln \left(\frac{e^{u_{m,2}+u_{m-1,2}}}{e^{u_{m,2}} - e^{u_{m-1,2}}} \right) - \frac{1}{2} I_1 t_1 - \left(\frac{1}{2} I_1^2 - I_2 \right) t_2, \\ \Phi_2 &= \arctg \left(\frac{A(I_2 e^{2u_{m-1,2}} - e^{2u_{m,2}})}{I_1 e^{2u_{m,2}} - 4I_2 e^{2u_{m-1,2}-u_{m-1,2}} + I_1 I_2 e^{2u_{m-1,2}}} \right) - A t_1 - I_1 A t_2, \end{aligned}$$

где $A = \sqrt{4I_2 - I_1^2}$. Далее для построения решения системы (44) можно воспользоваться процедурой, описанной при доказательстве теоремы 3, однако заметим, что функции

$$\Psi_1 = \Phi_1 - m \ln \sqrt{I_2}, \quad \Psi_2 = \Phi_2 - m \arctg \frac{2I_1 A}{A^2 + I_1^2}$$

являются первыми интегралами динамической системы (44). Следовательно, рассматриваемая система обладает достаточным для интегрируемости количеством первых интегралов. Ее решения имеют следующий вид:

$$e^{u_{m,1}} = \pm \frac{I_1 - B}{B(I_1 - 1) - I_2} \Psi_1 \sqrt{B^2 - I_1 B + I_2},$$

$$e^{u_{m,2}} = \pm \Psi_1 \sqrt{B^2 - I_1 B + I_2},$$

где

$$B = \frac{2I_2 \pm \sqrt{4I_2^2 - I_2(\Psi_2 I_1^2 - 1)}}{I_1 \Psi_2 + 1}.$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-01-00931) и Министерства образования (грант № Е 02-1.0-77).

Список литературы

- [1] V. E. Adler. J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7. № 1. P. 34–56.
- [2] Yu. B. Suris. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 2235–2249.
- [3] R. Hirota. J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 2074–2078.
- [4] Ю. Б. Сурис. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 141–157.
- [5] I. T. Habibullin, T. G. Kazakova. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 10369–10376.
- [6] I. T. Habibullin, A. N. Vil'danov. Boundary conditions consistent with L - A pairs. In: Proc. of the Intern. Conf. MOGRAN 2000: Modern Group Analysis for the New Millennium (Ufa, Russia, 27 September–3 October, 2000.). Eds. V. A. Baikov, R. K. Gazizov, N. M. Ibragimov, F. M. Mahomed. Ufa: USATU, 2001. P. 80–82.
- [7] Е. К. Склянин. Функц. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. С. 86–87.
- [8] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. ТМФ. 2000. Т. 125. № 3. С. 355–424.
- [9] V. E. Adler, I. T. Habibullin. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 6717–6729.
- [10] B. Fuchssteiner. Progr. Theor. Phys. 1983. V. 70. P. 1508–1522.
- [11] W. X. Ma, B. Fuchssteiner. Algebraic structure of discrete zero curvature equations and master symmetries of discrete evolution equations. solv-int/9809009.
- [12] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 183–208.
- [13] А. П. Веселов. УМН. 1991. Т. 46. № 5(281). С. 3–45.
- [14] М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 4.IV.2003 г.