Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Зупник, Геометрия решений $N = 2$ SYM-теории в гармоническом суперпространстве, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 2, 251–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 02:17:27

© 2002 г.

Б. М. Зупник*

ГЕОМЕТРИЯ РЕШЕНИЙ $N = 2$ SYM-ТЕОРИИ В ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

В гармоническом суперпространстве анализируются классические уравнения движения $D = 4$, $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (SYM) для пространств Минковского и Евклида. Изучаются дуальные суперполевые представления уравнений и дополнительных условий, соответствующих классическим SYM-решениям с различными симметриями. В частности, в рамках гармонического подхода описаны альтернативные суперполевые конструкции самодуальных и статических решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Внемассовые суперполевые связи $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (SYM) в $D = (3, 1)$ пространстве Минковского были решены в рамках гармонического суперпространства (HSS) с использованием вспомогательных координат однородного пространства $S_2 \sim SU_A(2)/U_A(1)$, где $SU_A(2)$ – соответствующая группа автоморфизмов [1]–[3]. Аналогичный гармонический формализм можно применить для описания внемассовых $N = 2$ суперсимметричных моделей в евклидовом $D = 4$ пространстве. Мы будем использовать обозначения с индексами: HSS_M или HSS_E для структур HSS над пространствами Минковского или Евклида, соответственно. Вспомогательные гармонические координаты используются в ковариантных условиях грассмановой (G) аналитичности. Неограниченные суперполя $N = 2$ теорий определены в G-аналитических суперпространствах с четырьмя грассмановыми координатами.

Гармонические переменные, связанные с пространством $SU_R(2)/U_R(1)$ для подгруппы евклидовой группы вращений, использовались для изучения автодуальных решений YM- и SYM-теорий [4]–[6]. Эти HSS имеют редуцированные значения четных и нечетных размерностей, а соответствующие аналитические суперполя параметризуют пространства модулей автодуальных решений.

Суперполевые уравнения движения в наиболее общем гармоническом формализме можно эффективно использовать для анализа геометрии классических $N = 2$ SYM-решений. В частности, можно изучать дуальные преобразования $N = 2$ SYM-суперполевых переменных в HSS, которые позволяют формулировать необычные представления

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: zupnik@thsun1.jinr.ru

уравнений движения и простые калибровочные условия [7], [8]. Важно подчеркнуть, что часть суперполевых связей и уравнений движения в гармоническом SYM-формализме в результате дуальной замены переменных преобразуются в линейные ограничения на HSS-связность V^{--} , тогда уравнение нулевой кривизны для гармонических связностей можно интерпретировать как динамическое уравнение. Дуальные представления HSS-суперполевых переменных позволяют исследовать свойства симметрии различных классов частных решений.

Интересно сравнить альтернативные HSS-описания 4-мерных (4D) автодуальных SYM-решений или решений размерно-редуцированных $D < 4$ SYM-уравнений. Мы анализируем ($t = 0$) редукцию HSS_M-формализма и формулируем $N = 2$ суперполевое соотношение, обобщающее 3D компонентные соотношения Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (BPS) для монопольных решений. Показано, что симметрия этих статических суперполевых BPS-соотношений эквивалентна соответствующей трехмерной подгруппе евклидовой $N = 2$ суперсимметрии. Отметим, что аналогичные суперполевые BPS-соотношения могут быть построены в других вариантах размерно-редуцированных суперсимметричных калибровочных теорий с восемью суперзарядами [9].

HSS_M-уравнения $N = 2$ SYM-теории рассматриваются в разделе 2. Обсуждаются немассовый формализм с независимыми гармоническими связностями и дуально-эквивалентные конструкции суперполевых уравнений движения. Анализируются условия G-аналитичности для связностей в этом формализме. Суперполевые уравнения движения могут быть преобразованы в соотношения для G-аналитических функций, возникающих в разложениях неаналитической связности V^{--} .

Раздел 3 посвящен обсуждению статической 3D редукции $N = 2$ суперполевых SYM-уравнений. Временная компонента 4D суперполевой связности A_t становится новым 3D скалярным суперполем в этом пределе. Мы рассматриваем 3D суперполевое BPS-соотношение между A_t и суперполевыми напряженностями W и $\bar{W}$, которое эквивалентно дифференциальной связи второго порядка для V^{--} . Показано, что эта связь второго порядка порождает стандартную связь четвертого порядка для той же связности, и все решения суперполевого BPS-соотношения удовлетворяют SYM-уравнению.

В разделе 4 мы изучаем 4D евклидову версию гармонического формализма. Киральное суперполевое условие автодуальности в этом подходе можно интерпретировать как связь второго порядка для V^{--} . Альтернативное представление связностей через суперполевую матрицу перехода (мост-матрицу) и нильпотентное калибровочное условие для этой матрицы используются при анализе автодуальных решений в HSS_E.

Сравнение этих гармонических конструкций с аналогичными автодуальными $N = 2$ решениями в альтернативном $SU_R(2)/U_R(1)$ -формализме проводится в разделе 5. Этот вариант гармонического подхода преобразует условие суперавтодуальности в специфические условия грасманово-бозонной аналитичности гармонической связности на массовой поверхности. Мы рассматриваем полезную идентификацию гармонических переменных для различных подгрупп группы $SU(2)$, которая позволяет связать автодуальные гармонические суперполя в различных подходах. Отметим, что для калибровочной группы $SU(2)$ широкий класс автодуальных HSS-решений можно построить в квадра-

турах [10].

Статические автодуальные решения изучаются в разделе 6. Мы рассматриваем связь между сопряженными спинорными координатами в статическом пределе 4D HSS_M и соответствующими псевдовещественными спинорными координатами в 3D редукции HSS_E.

Основные формулы, используемые в методе HSS, приведены в приложениях А и Б. Мы описываем правила сопряжения для различных вариантов HSS, которые очень важны для SYM-теории.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $N = 2$ SYM-УРАВНЕНИЙ В ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Гармоническое $SU_A(2)/U_A(1)$ -преобразование впервые было использовано для решения немассовых связей для суперполевых связностей $A_a^k(z)$ в $N = 2$, $D = (3, 1)$ SYM-теории [1], [2]:

$$u_k^+(D_a^k + A_a^k) \equiv \nabla_a^+ = e^{-v} D_a^+ e^v, \quad (2.1)$$

где $a = (\alpha, \dot{\alpha})$ – индексы группы $SL(2, \mathbb{C})$, k – 2-компонентный индекс группы автоморфизмов $SU_A(2)$, u_k^+ – вспомогательные гармонические переменные (см. приложение А), $v(z, u)$ – суперполевая *мост-матрица*. Это преобразование формально связывает представления калибровочной группы в центральном и аналитическом базисах.

Основным немассовым гармоническим суперполем SYM-теории является связность $V^{++} = e^v D^{++} e^{-v}$ для гармонической ковариантной производной в аналитическом базисе

$$\nabla^{++} = D^{++} + V^{++}, \quad \delta V^{++} = -D^{++} \lambda - [V^{++}, \lambda]. \quad (2.2)$$

Препотенциал V^{++} и калибровочные параметры в аналитическом базисе удовлетворяют условиям G-аналитичности

$$(D_\alpha^+, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+)(V^{++}, \lambda) = 0. \quad (2.3)$$

G-аналитические суперполя описываются неограниченными функциями аналитических координат ζ (см. ниже (A.5)) и гармоник $u_i^\pm$. Вторая гармоническая связность V^{--} удовлетворяет гармоническому условию нулевой кривизны

$$D^{++}V^{--} - D^{--}V^{++} + [V^{++}, V^{--}] = 0, \quad (2.4)$$

которое имеет точное решение в виде ряда по степеням V^{++} [3].

Спинорные и векторные связности $A_a^\pm$, $A_{\alpha\dot{\beta}}$, а также суперполевые напряженности W и $\bar{W}$ в аналитическом базисе могут быть выражены через спинорные производные связности V^{--} :

$$\begin{aligned} A_\alpha^+ &= \bar{A}_{\dot{\alpha}}^+ = 0, & A_\alpha^- &= -D_\alpha^+ V^{--}, & \bar{A}_{\dot{\alpha}}^- &= -\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ V^{--}, \\ A_{\alpha\dot{\beta}} &\equiv iD_\alpha^+ \bar{A}_{\dot{\beta}}^- \equiv -i\bar{D}_{\dot{\beta}}^+ A_\alpha^- = -iD_\alpha^+ \bar{D}_{\dot{\beta}}^+ V^{--}, \\ \bar{W} &= \frac{1}{2} D^{\alpha+} A_{\dot{\alpha}}^- = -(D^+)^2 V^{--}, & W &= -\frac{1}{2} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{A}^{\dot{\alpha}-} = (\bar{D}^+)^2 V^{--}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нелинейное уравнение движения для препотенциала V^{++} может быть сформулировано как линейное дифференциальное условие на композитную связность V^{--} (V^{++}):

$$(D^+)^2 (\overline{D}^+)^2 V^{--} = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.4) трактуется как кинематическое интегрируемое уравнение в стандартном SYM-формализме с независимым суперполем V^{++} . Альтернативный HSS_M-формализм с независимым немассовым суперполем V^{--} рассматривался в работах [7]. Этот подход аналогичен формализму первого порядка в обычной теории Янга–Миллса, так как независимое суперполе V^{--} вне массовой поверхности содержит бесконечное число вспомогательных полей, включая поля размерности -2 : F , F_{mn} и F_m . (Отметим, что замену независимых HSS-переменных $V^{++} \rightarrow V^{--}$ или $V^{++} \rightarrow v$ [8] можно интерпретировать как дуальное преобразование в SYM-теории. Мы надеемся, что богатая структура дуальных преобразований в HSS будет полезна для построения различных классических решений.)

Условие G-аналитичности V^{++} эквивалентно нелинейному уравнению аналитичности для связности V^{--}

$$[\nabla_a^-, \nabla^{--}] = D_a^- V^{--} + D^{--} D_a^+ V^{--} + [V^{--}, D_a^+ V^{--}] = 0. \quad (2.7)$$

Линейную связь (2.6) для независимого суперполя V^{--} можно легко решить [7]:

$$V^{--} = D_\alpha^+ B^{\alpha(-3)} - \overline{D}_{\dot{\alpha}}^+ \overline{B}^{\dot{\alpha}(-3)}. \quad (2.8)$$

В представлении с независимыми SYM-суперполевыми переменными $B^{\alpha(-3)}$ и V^{++} основное динамическое уравнение имеет вид

$$\nabla^{++} (D_\alpha^+ B^{\alpha(-3)} - \overline{D}_{\dot{\alpha}}^+ \overline{B}^{\dot{\alpha}(-3)}) = D^{--} V^{++}. \quad (2.9)$$

Действуя операторами D_α^+ , $\overline{D}_{\dot{\alpha}}^+$ на обе части этого уравнения, можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla^{++} (\overline{D}^+)^2 D_\alpha^+ B^{\alpha(-3)} &= 0, \\ \nabla^{++} [(\overline{D}^+)^2 D_\alpha^+ \overline{B}_{\dot{\alpha}}^{(-3)} - (D^+)^2 \overline{D}_{\dot{\alpha}}^+ B_\alpha^{(-3)}] &= i \partial_{\alpha\dot{\alpha}} V^{++}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Разложение уравнения (2.9) по всем спинорным координатам дает компонентные SYM-уравнения, однако полезно также исследовать частичное разложение этого суперполевого уравнения по $\theta^{\alpha-}$ и $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}-}$. Определим G-аналитические компоненты суперполя V^{--} :

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= -(D^+)^2 V^{--}|, \quad \phi = (\overline{D}^+)^2 V^{--}|, \quad B_{\alpha\dot{\beta}} = \overline{D}_{\dot{\beta}}^+ D_\alpha^+ V^{--}|, \\ \lambda_\alpha^+ &= -D_\alpha^+ (\overline{D}^+)^2 V^{--}|, \quad \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^+ = -\overline{D}_{\dot{\alpha}}^+ (D^+)^2 V^{--}|, \\ F^{++} &= (D^+)^2 (\overline{D}^+)^2 V^{--}|, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где символ $|$ означает $\theta^- = \bar{\theta}^- = 0$.

Полное преобразование суперсимметрии $\delta_\epsilon V^{--} = 0$ порождает соответствующие преобразования G-аналитических компонент

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \phi &= u_k^- \epsilon^{\alpha k} \lambda_\alpha^+, & \delta_\epsilon B_{\alpha\dot{\beta}} &= u_k^- \epsilon_\alpha^k \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^+ + u_k^- \bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}^k \lambda_\alpha^+, \\ \delta_\epsilon \lambda_\alpha &= -u_k^- \epsilon_\alpha^k F^{++}, & \delta_\epsilon F^{++} &= 0.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Используя калибровочное преобразование $\delta V^{--} = -D^{--}\lambda - [V^{--}, \lambda]$, можно получить нильпотентное калибровочное условие для гармонической связности:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{--} &= (\theta^-)^2 \bar{\phi} - (\bar{\theta}^-)^2 \phi + \theta^{\alpha-} \bar{\theta}^{\dot{\beta}-} B_{\alpha\dot{\beta}} + (\theta^-)^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}-} \bar{\lambda}_\alpha^+ + \\ &+ (\bar{\theta}^-)^2 \theta^{\alpha-} \lambda_\alpha^+ + (\theta^-)^2 (\bar{\theta}^-)^2 F^{++}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Геометрические суперполя в этой калибровке имеют вид

$$\begin{aligned}W &= \phi - \theta^{\alpha-} \lambda_\alpha^+ - (\theta^-)^2 F^{++}, \\ \bar{W} &= \bar{\phi} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}-} \bar{\lambda}_\alpha^+ + (\bar{\theta}^-)^2 F^{++}, \\ A_{\alpha\dot{\beta}} &= -i B_{\alpha\dot{\beta}} + i \theta_\alpha^- \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^+ + i \bar{\theta}_{\dot{\beta}}^- \lambda_\alpha^+ - i \theta_\alpha^- \bar{\theta}_{\dot{\beta}}^- F^{++}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Связь $F^{++} = 0$ дает следующие аналитические уравнения движения, эквивалентные уравнению (2.9):

$$\begin{aligned}\nabla^{++} \phi &= \theta^{\alpha+} \lambda_\alpha^+, & (\nabla^{++})^2 \phi &= 0, \\ \nabla^{++} B_{\alpha\dot{\beta}} &= -i \partial_{\alpha\dot{\beta}} \mathcal{V}^{++} + \theta_\alpha^+ \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^+ + \bar{\theta}_{\dot{\beta}}^+ \lambda_\alpha^+, \\ \nabla^{++} \lambda_\alpha^+ &= 0.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Компонентные решения для аналитических $N = 2$ суперполей на массовой поверхности имеют вид

$$\begin{aligned}\phi &= \varphi(x) + \theta^{\alpha+} u_k^- \psi_\alpha^k(x), \\ B_{\alpha\dot{\beta}} &= a_{\alpha\dot{\beta}}(x) + \theta_\alpha^+ u_k^- \bar{\psi}_{\dot{\beta}}^k(x) + \bar{\theta}_{\dot{\beta}}^+ u_k^- \psi_\alpha^k(x), \\ \mathcal{V}^{++} &= (\theta^+)^2 \bar{\varphi}(x) - (\bar{\theta}^+)^2 \varphi(x) + \theta^{\alpha+} \bar{\theta}^{\dot{\beta}+} a_{\alpha\dot{\beta}}(x) - \\ &- \theta^{\alpha+} (\bar{\theta}^+)^2 u_k^- \psi_\alpha^k(x) - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}+} (\theta^+)^2 u_k^- \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^k(x).\end{aligned}\quad (2.16)$$

$N = 2$ уравнения движения для этих компонент следуют из G-аналитических суперполевых уравнений. Разумеется, главная задача гармонического подхода – найти нестандартные суперполевые методы решения SYM-уравнений, которые не могут быть полностью сведены к анализу компонентных уравнений. Мы надеемся, что сопоставление дуальных суперполевых представлений SYM-решений будет полезно для поиска необычных свойств симметрии, которые не видны непосредственно в компонентном представлении.

3. СТАТИЧЕСКИЕ СУПЕРПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Трехмерные монополярные решения играют важную роль в современных непертурбативных методах квантовой $N = 2$ SYM-теории [11], [12]. Гармонический анализ монополярных решений в теории Янга–Миллса рассматривался в работе [5]. Мы будем изучать альтернативные HSS-конструкции статических $N = 2$ SYM-решений и их связь с 4D автодуальными решениями.

Рассмотрим нерелятивистское представление координат $D = (3, 1)$, $N = 2$ HSS, основанное на статической группе $SO(3)$:

$$\begin{aligned} x_A^{\alpha\dot{\beta}} &\rightarrow iy_\beta^\alpha + \delta_\beta^\alpha t_A, & y_\alpha^\alpha &= 0, & y^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\alpha\rho} y_\rho^\beta, \\ \partial_{\alpha\dot{\beta}} &\rightarrow -i\partial_\beta^\alpha + \delta_\alpha^\beta \partial_t, & \partial_\gamma^\sigma y_\beta^\alpha &= 2\delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha - \delta_\beta^\alpha \delta_\gamma^\sigma, \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}\pm} &\rightarrow \bar{\theta}_\alpha^\pm, & \bar{\theta}^{\alpha\pm} &= \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}_\beta^\pm, \\ \bar{\delta}_\alpha^\pm &\rightarrow \bar{\delta}^{\alpha\pm}, & \bar{\delta}^{\alpha\pm} \bar{\theta}_\beta^\mp &= \delta_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Мы будем использовать следующие правила сопряжения:

$$\begin{aligned} (y_\beta^\alpha)^\dagger &= -y_\alpha^\beta, & (y^{\alpha\beta})^\dagger &= y_{\alpha\beta}, & (t_A)^\dagger &= t_A, \\ (\theta^{\alpha\pm})^\dagger &= \bar{\theta}_\alpha^\pm, & (\theta_\alpha^\pm)^\dagger &= -\bar{\theta}^{\alpha\pm}, & (\varepsilon^{\alpha\beta})^\dagger &= -\varepsilon_{\alpha\beta}, \\ (\bar{\theta}^{\alpha\pm})^\dagger &= \theta_\alpha^\pm, & (\bar{\theta}_\alpha^\pm)^\dagger &= -\theta^{\alpha\pm}, \\ (D_\alpha^\pm)^\dagger &= \bar{D}^{\alpha\pm}, & (\bar{D}^{\alpha\pm})^\dagger &= -D_\alpha^\pm, & (\bar{D}_\alpha^\pm)^\dagger &= D^{\alpha\pm}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что изменение положения точечных $SL(2, \mathbb{C})$ -индексов после статической редукции связано с соглашением о сопряжении $SU(2)$ -спиноров, которое превращает верхние индексы в нижние.

Редукция времени ($t = 0$) превращает 4D гармонические суперполя в 3D евклидовы суперполя, ковариантные относительно редуцированной суперсимметрии с восемью суперзарядами.

Рассмотрим соответствующее представление 4-векторной связности

$$A_{\alpha\dot{\beta}} \Rightarrow A_\alpha^\beta + \delta_\alpha^\beta A_t, \quad (A_\alpha^\beta)^\dagger = -A_\beta^\alpha, \quad (A_t)^\dagger = -A_t, \quad (3.3)$$

где временная компонента связности становится ковариантной по отношению к остаточным статическим калибровочным преобразованиям

$$\begin{aligned} A_\alpha^\beta &= i \left(\bar{D}^{\beta+} D_\alpha^+ - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta (\bar{D}^+ D^+) \right) V^{--}, \\ A_t &= \frac{i}{2} (\bar{D}^+ D^+) V^{--}, \quad \delta_\lambda A_t = [\lambda, A_t]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для анализа свойств симметрии суперсимметричных монополярных решений представляется полезным построение явно суперсимметричного обобщения BPS-уравнения

для $N = 2$ калибровочной теории. В дополнение к $t = 0$ редукции HSS-уравнения (2.4) мы предлагаем рассмотреть следующее суперполевое BPS-соотношение:

$$S \equiv -2irA_t + p(W + \bar{W}) = 0, \quad (3.5)$$

где r и p – некоторые вещественные параметры. Отметим, что это соотношение нарушает R -симметрию действия $\theta^\pm \rightarrow e^{i\rho/2}\theta^\pm$, $W \rightarrow e^{i\rho}W$.

Будем трактовать соотношение (3.5) как линейную связь второго порядка на V^{--}

$$S = [r(\bar{D}^+ D^+) + p(\bar{D}^+)^2 - p(D^+)^2]V^{--} = 0, \quad (3.6)$$

которая также дает спинорное условие третьего порядка

$$(-r(D^+)^2 \bar{D}_\alpha^+ + p(\bar{D}^+)^2 D_\alpha^+)V^{--} = 0. \quad (3.7)$$

Для случая $r \neq p$ последнее уравнение для спиноров не будет вырожденным, поэтому можно получить сильные ограничения:

$$D_\alpha^+ (\bar{D}^+)^2 V^{--} = D_\alpha^+ W = 0 \Rightarrow \nabla^{--} D_\alpha^+ W = \nabla_\alpha^- W = 0. \quad (3.8)$$

Очевидно, что соответствующее ковариантно-постоянное решение $W = \text{const}$ сохраняет все восемь суперзарядов [13], однако для этого тривиального решения с постоянными скалярными полями все фермионы и калибровочные поля равны нулю. Вырожденный случай $r = p$ соответствует условию самосопряженности для 3D спиноров

$$\lambda_k^\alpha = \bar{\lambda}_k^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{kl} (\lambda_l^\beta)^\dagger. \quad (3.9)$$

Соответствующие автодуальные статические решения будут обсуждаться в разделе 6.

4. ЕВКЛИДОВЫ $N = 2$ SYM-УРАВНЕНИЯ

Мы будем анализировать суперполевые связи $N = 2$ SYM-теории в евклидовом суперпространстве

$$\begin{aligned} \{\nabla_\alpha^k, \nabla_\beta^l\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{kl} \mathcal{W}, \\ \{\widehat{\nabla}_{k\dot{\alpha}}, \widehat{\nabla}_{l\dot{\beta}}\} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon_{kl} \widehat{\mathcal{W}}, \\ \{\nabla_\alpha^k, \widehat{\nabla}_{l\dot{\beta}}\} &= \delta_l^k \nabla_{\alpha\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\mathcal{W}$ и $\widehat{\mathcal{W}}$ – независимые вещественные суперполевые напряженности, а пары индексов $\alpha, \beta; \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ и k, l описывают соответственно 2-спинорные представления евклидовой группы $SU_L(2) \times SU_R(2)$ и группы автоморфизмов $SU_A(2)$.

Суперполевые аналоги евклидовых уравнений автодуальности рассматривались в работах [14]–[17]. Мы будем анализировать $N = 2$ автодуальные решения в рамках HSS_E-формализма (см. приложение Б). Подчеркнем, что правила сопряжения координат и производных $N = 2$ суперпространства существенно различаются для случаев евклидовой группы $SO(4)$ и группы Лоренца $SO(3, 1)$.

Описание евклидовой $N = 2$ SYM-теории в $SU_A(2)/U_A(1)$ HSS похоже на соответствующий формализм в HSS_M , в частности можно использовать те же обозначения V^{++} , V^{--} для евклидовых гармонических связностей. Евклидовы спинорные и векторные связности аналитического базиса имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha^+ = \hat{\mathcal{A}}_\alpha^+ = 0, \quad \mathcal{A}_\alpha^- = -\mathcal{D}_\alpha^+ V^{--}, \quad \hat{\mathcal{A}}_\alpha^- = -\hat{\mathcal{D}}_\alpha^+ V^{--}, \\ \mathcal{B}_{\alpha\dot{\beta}} \equiv \mathcal{D}_\alpha^+ \hat{\mathcal{A}}_{\dot{\beta}}^- \equiv \mathcal{D}_\alpha^+ \hat{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}^+ V^{--}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Вещественность евклидовых суперполевых связностей очевидна в HSS_E :

$$\mathcal{W} = (\mathcal{D}^+)^2 V^{--}, \quad \widehat{\mathcal{W}} = (\widehat{\mathcal{D}}^+)^2 V^{--}. \quad (4.3)$$

Система уравнений автодуальности в HSS имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}^{++} V^{--} + [V^{++}, V^{--}] = \mathcal{D}^{--} V^{++}, \quad (\mathcal{D}^+)^2 V^{--} = 0. \quad (4.4)$$

Простое решение линейной связи для V^{--} ,

$$V^{--} = \mathcal{D}_\alpha^+ \mathcal{B}^{\alpha(-3)}, \quad (4.5)$$

превращает гармоническое уравнение в соотношение между $\mathcal{B}^{\alpha(-3)}$ и V^{++} :

$$\mathcal{D}_\alpha^+ \nabla^{++} \mathcal{B}^{\alpha(-3)} = \mathcal{D}^{--} V^{++}. \quad (4.6)$$

Уравнение автодуальности эквивалентно соотношению

$$\mathcal{D}_\alpha^+ \mathcal{A}_\beta^- = 0. \quad (4.7)$$

Используя уравнение $[\nabla^{--}, \nabla_\alpha^-] = 0$, можно получить условия киральности

$$\{\nabla_\alpha^\pm, \nabla_\beta^\pm\} = 0. \quad (4.8)$$

Рассмотрим представление гармонических связностей через мост-матрицу v [1]:

$$V^{\pm\pm} \equiv e^v \mathcal{D}^{\pm\pm} e^{-v}. \quad (4.9)$$

Условие автодуальности второго порядка для связности $(\mathcal{D}^+)^2 V^{--} = 0$ (см. (4.4)) соответствует дифференциальному условию первого порядка для автодуальной матрицы v

$$\mathcal{D}_\alpha^+ v = 0, \quad (4.10)$$

которое позволяет решить связь (4.7):

$$\mathcal{A}_\beta^- = -\mathcal{D}_\alpha^+ (e^v \mathcal{D}^{--} e^{-v}) = e^v \mathcal{D}_\alpha^- e^{-v}, \quad \mathcal{D}_\alpha^+ \mathcal{A}_\beta^- = 0.$$

Сравним представления (4.5) и (4.9) и получим соотношение

$$\mathcal{B}^{\alpha(-3)} = \frac{1}{2}\Theta^{\alpha-}e^v\mathcal{D}^{--}e^{-v} + \frac{1}{2}(\Theta^-)^2e^v\mathcal{D}^{\alpha-}e^{-v}. \quad (4.11)$$

Гармонические проекции связностей центрального базиса в этом представлении имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{\pm} &= 0, \quad \hat{A}_{\alpha}^{+}(v) = e^{-v}\hat{\mathcal{D}}_{\alpha}^{+}e^v, \\ \hat{A}_{\alpha}^{-} &= \mathcal{D}^{--}\hat{A}_{\alpha}^{+}(v), \quad B_{\alpha\dot{\alpha}}(v) = \mathcal{D}_{\alpha}^{-}\hat{A}_{\dot{\alpha}}^{+}(v). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Это автодуальное представление ковариантно относительно преобразований $e^v \Rightarrow e^{\lambda}e^v e^{\tau_r}$, где λ – G-аналитический параметр, а $\tau_r(z)$ – киральный параметр, $D_{\alpha}^i\tau_r = \mathcal{D}^{\pm\pm}\tau_r = 0$.

Следует подчеркнуть, что для автодуальных решений суперполе v в общем случае не должно быть киральным, т.е. $\mathcal{D}_{\alpha}^{-}v \neq 0$. Очевидно, что киральные суперполя v соответствуют тривиальным решениям $\mathcal{D}_{\alpha}^{+}\hat{W} = -(\hat{\mathcal{D}}^{+})^2e^v\mathcal{D}_{\alpha}^{-}e^{-v} = 0$.

В представлении (4.9) система уравнений автодуальности (4.4) дает нелинейное уравнение для v

$$\hat{\mathcal{D}}_{\alpha}^{+}(e^v\mathcal{D}^{++}e^{-v}) \equiv \hat{\mathcal{D}}_{\alpha}^{+}V^{++}(v) = 0 \quad (4.13)$$

или эквивалентное уравнение центрального базиса $\mathcal{D}^{++}\hat{A}_{\alpha}^{+}(v) = 0$. Из этого главного уравнения G-аналитичности мы можем получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{++}A_{\alpha\dot{\beta}}(v) &= 0, \quad \mathcal{D}_{\alpha}^{+}B_{\beta\dot{\beta}}(v) = 0, \\ \mathcal{D}_{\alpha}^{-}B_{\beta\dot{\beta}}(v) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{-})^2[e^{-v}\hat{\mathcal{D}}_{\alpha}^{+}e^v] = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Автодуальная матрица v , удовлетворяющая условию частичной G-аналитичности (4.10), не зависит от грассмановых координат $\Theta^{\alpha-}$. Введем нильпотентное калибровочное условие для этой матрицы:

$$v = \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}-}b_{\alpha}^{+} + (\hat{\Theta}^{-})^2b^{++}, \quad v^2 = -(\hat{\Theta}^{-})^2b^{\dot{\alpha}+}b_{\alpha}^{+}, \quad (4.15)$$

где b_{α}^{+} и b^{++} – G-аналитические матричные коэффициенты. Отметим, что аналогичное нильпотентное представление мост-матрицы было недавно использовано в $N = 3$ SYM-теории [18].

Построим гармоническую связность $V^{++}(v)$

$$\begin{aligned} e^v\mathcal{D}^{++}e^{-v} &= -\hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+}b_{\alpha}^{+} + \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}-}\left(-\mathcal{D}^{++}b_{\alpha}^{+} - \hat{\Theta}_{\alpha}^{+}b^{++} + \frac{1}{2}\hat{\Theta}^{\dot{\beta}+}\{b_{\alpha}^{+}, b_{\beta}^{+}\}\right) + \\ &+ (\hat{\Theta}^{-})^2\left(\mathcal{D}^{++}b^{++} + \frac{1}{2}\{b^{\dot{\alpha}+}, \mathcal{D}^{++}b_{\alpha}^{+}\} + \right. \\ &\left. + \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+}[b_{\alpha}^{+}, b^{++}] + \frac{1}{2}\hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+}\{b_{\alpha}^{+}, b^{\dot{\beta}+}b_{\beta}^{+}\}\right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где мы использовали тождество

$$\{b_{\dot{\alpha}}^+, b^{\dot{\beta}+} b_{\dot{\beta}}^+\} = \frac{1}{3} [b^{\dot{\beta}+}, \{b_{\dot{\alpha}}^+, b_{\dot{\beta}}^+\}]. \quad (4.17)$$

Уравнение динамической аналитичности

$$V^{++}(v) = -\hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+} b_{\dot{\alpha}}^+ \quad (4.18)$$

порождает следующие аналитические соотношения:

$$\begin{aligned} D^{++} b_{\dot{\alpha}}^+ + \hat{\Theta}_{\dot{\alpha}}^+ b^{++} - \frac{1}{2} \hat{\Theta}^{\dot{\beta}+} \{b_{\dot{\alpha}}^+, b_{\dot{\beta}}^+\} &= 0, \\ D^{++} b^{++} + \frac{1}{2} \{b^{\dot{\alpha}+}, D^{++} b_{\dot{\alpha}}^+\} + \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+} [b_{\dot{\alpha}}^+, b^{++}] + \frac{1}{6} \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+} [b^{\dot{\beta}+}, \{b_{\dot{\alpha}}^+, b_{\dot{\beta}}^+\}] &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Будем использовать промежуточное разложение (2,2)-аналитических суперполей по $\hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+}$

$$\begin{aligned} b_{\dot{\alpha}}^+ &= \beta_{\dot{\alpha}}^+ + \hat{\Theta}^{\dot{\beta}+} C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + (\hat{\Theta}^+)^2 \eta_{\dot{\alpha}}^-, \\ b^{++} &= B^{++} + \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+} \gamma_{\dot{\alpha}}^+ + (\hat{\Theta}^+)^2 B, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где все коэффициенты представляют собой полиномы по $\Theta^{\alpha+}$. (2,2)-уравнения для $b_{\dot{\alpha}}^+$ и b^{++} дают (2,0)-уравнения для этих коэффициентов, например

$$\begin{aligned} \partial^{++} \beta_{\dot{\alpha}}^+ &= 0, \quad \partial^{++} B^{++} = 0, \\ \partial^{++} C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \Theta^{\beta+} \partial_{\dot{\beta}\dot{\beta}} \beta_{\dot{\alpha}}^+ + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} B^{++} - \frac{1}{2} \{\beta_{\dot{\alpha}}^+, \beta_{\dot{\beta}}^+\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Линейные гармонические уравнения для $\beta_{\dot{\alpha}}^+$ и B^{++} можно решить явно. Неоднородное линейное гармоническое уравнение для $C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ содержит источник, составленный из суперполей, вычисленных на предыдущем этапе, поэтому оно в принципе интегрируемо. Неоднородные гармонические уравнения для других (2,0)-коэффициентов $\eta_{\dot{\alpha}}^-, \gamma_{\dot{\alpha}}^+$ и B могут быть получены и решены аналогично. Следует подчеркнуть, что автодуальные уравнения (4.4) и (4.19) удобны для поиска размерно-редуцированных решений.

5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ АВТОДУАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Альтернативный гармонический формализм для автодуальных SYM-решений рассматривался в работе [6]. Этот формализм гармонизует одну из пространственных групп — группу $SU_R(2)$, действующую на индексах $\dot{\alpha}$.

Чтобы сравнить альтернативные гармонические подходы к $N = 2$ автодуальным уравнениям, рассмотрим нековариантную процедуру идентификации $SU_R(2) = SU_A(2)$ для решений этих уравнений. отождествим также соответствующие спинорные индексы $\dot{\alpha} \equiv l$. Координаты $N = 2$ суперпространства в этих обозначениях имеют вид

$$y^{\alpha\dot{\alpha}} \equiv y^{\alpha l}, \quad \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}k} \equiv \hat{\Theta}^{l,k}. \quad (5.1)$$

Используя единственный набор $SU(2)/U(1)$ -гармоник $u_i^\pm$, можно рассмотреть гармонические проекции центральных y , аналитических Y и киральных y_r координат, а также грассмановых координат $\hat{\Theta}$:

$$\begin{aligned} y^{\alpha\pm} &= u_k^\pm y^{\alpha k}, & Y^{\alpha\pm} &= y^{\alpha\pm} - \Theta^{\alpha+} \hat{\Theta}^{\pm,-} - \Theta^{\alpha-} \hat{\Theta}^{\pm,+}, \\ y_r^{\alpha\pm} &= y^{\alpha\pm} + \Theta^{\alpha+} \hat{\Theta}^{\pm,-} - \Theta^{\alpha-} \hat{\Theta}^{\pm,+}, \\ \Theta^{\alpha\pm} &= u^k \Theta_k^\alpha, & \hat{\Theta}^{\pm,\pm} &= u_l^\pm u_k^\pm \hat{\Theta}^{l,k}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Соответствующие проекции плоских производных имеют вид $\partial_\alpha^\pm$, $\mathcal{D}_\alpha^\pm$, $\hat{\mathcal{D}}^{\pm,\pm}$.

В центральном базисе можно получить следующие представления $N = 2$ ковариантных автодуальных производных:

$$\nabla_\alpha^\pm = \mathcal{D}_\alpha^\pm, \quad \hat{\nabla}^{+,\pm} = h^{-1} \hat{\mathcal{D}}^{+,\pm} h, \quad h^{-1} \partial_\alpha^+ h, \quad (5.3)$$

где $h(z, u)$ – киральный автодуальный мост, $\mathcal{D}_\alpha^\pm h = 0$.

Гармоническая связность для автодуального моста представляет собой кирально-аналитический препотенциал этого формализма:

$$h \mathcal{D}^{++} h^{-1} = v^{++}, \quad (\partial_\alpha^+, \mathcal{D}_\alpha^\pm, \hat{\mathcal{D}}^{+,\pm}) v^{++} = 0. \quad (5.4)$$

Подчеркнем, что автодуальные решения обладают комбинированной аналитичностью. Автодуальный препотенциал можно интерпретировать как неограниченную матричную функцию координат $y^{\alpha+}$, $u_i^\pm$ и $\hat{\Theta}^{+,\pm}$, которые параметризуют общее $N = 2$ автодуальное решение.

В калибровочной группе $SU(2)$ можно выбрать простую подстановку для автодуального препотенциала

$$(v^{++})_i^k = u^{+k} u_i^+ b^0 + (u^{+k} u_i^- + u^{-k} u_i^+) b^{++}, \quad (5.5)$$

где b^0 и b^{++} – вещественные кирально-аналитические функции. Мост-матрица для этой подстановки вычисляется через гармонические квадратуры [10]. В простом примере этой параметризации с $b^0 = 0$ и

$$b^{++} = Y^{\alpha+} Y^{\beta+} \rho_{\alpha\beta} + \hat{\Theta}^{+,-} Y^{\alpha+} u_l^+ \lambda_\alpha^l \quad (5.6)$$

решение зависит от постоянных тензорного и спинорного коэффициентов.

Нетрудно связать автодуальные представления для различных методов гармонизации суперполевых уравнений

$$e^{-v} \hat{\mathcal{D}}^{+,\pm} e^v = h^{-1} \hat{\mathcal{D}}^{+,\pm} h, \quad \mathcal{D}_\alpha^- (e^{-v} \hat{\mathcal{D}}^{+,\pm} e^v) = h^{-1} \partial_\alpha^+ h. \quad (5.7)$$

6. АВТОДУАЛЬНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ $N = 2$ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим теперь дополнительное условие в BPS-уравнении (3.5) $r = p$, тогда эти уравнения могут быть преобразованы в простую связь:

$$\begin{aligned} -2iA_t + W + \overline{W} &\equiv ((\overline{D}^+ D^+) + (\overline{D}^+)^2 - (D^+)^2)V^{--} = \\ &= -\frac{1}{2}(D^{\alpha+} - \overline{D}^{\alpha+})(D_\alpha^+ - \overline{D}_\alpha^+)V^{--} = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Можно также рассмотреть эквивалентные связи второго порядка на V^{--} , используя преобразование $D_\alpha^+ \rightarrow e^{i\rho/2} D_\alpha^+$.

Удобно ввести новые псевдовещественные спинорные координаты статического суперпространства

$$\begin{aligned} \Theta^{\alpha\pm} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^{\alpha\pm} + \bar{\theta}^{\alpha\pm}), & \hat{\Theta}^{\alpha\pm} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^{\alpha\pm} - \bar{\theta}^{\alpha\pm}), \\ (\Theta^{\alpha\pm})^\dagger &= \Theta_\alpha^\pm, & (\hat{\Theta}^{\alpha\pm})^\dagger &= -\hat{\Theta}_\alpha^\pm. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Соответствующие преобразованные спинорные производные

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha^\pm &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(D_\alpha^\pm - \overline{D}_\alpha^\pm), & (\mathcal{D}_\alpha^\pm)^\dagger &= -\mathcal{D}^{\alpha\pm}, \\ \hat{\mathcal{D}}_\alpha^\pm &\equiv -\frac{1}{\sqrt{2}}(D_\alpha^\pm + \overline{D}_\alpha^\pm), & (\hat{\mathcal{D}}_\alpha^\pm)^\dagger &= \hat{\mathcal{D}}^{\alpha\pm} \end{aligned} \quad (6.3)$$

имеют следующую алгебру:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}_\alpha^+, \hat{\mathcal{D}}_\beta^-\} &= -\{\hat{\mathcal{D}}_\alpha^+, \mathcal{D}_\beta^-\} = -\partial_{\alpha\beta}, \\ \{\mathcal{D}_\alpha^+, \mathcal{D}_\beta^-\} &= \{\hat{\mathcal{D}}_\alpha^+, \hat{\mathcal{D}}_\beta^-\} = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Рассмотрим 3D ковариантное представление координат евклидова суперпространства (см. ниже (Б.1))

$$y^{\alpha\dot{\beta}} \Rightarrow y^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta} y_4. \quad (6.5)$$

Отметим, что алгебра спинорных производных (6.4) возникает при размерной редукции $y_4 = 0$ $N = 2$ HSS_E (см. приложение Б). Ясно, что преобразование (6.2) связывает эквивалентные 3D подпространства гармонических суперпространств типа Минковского и Евклида. Таким образом, (3,1)-уравнение (6.1) эквивалентно 3D пределу евклидова $N = 2$ уравнения автодуальности (4.4)

$$(\mathcal{D}^+)^2 V^{--} = 0, \quad y_4 = 0.$$

Компонентные статические автодуальные решения могут быть получены в следующей калибровке:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{++} &= \frac{1}{2}\hat{\Theta}^{\alpha+}\hat{\Theta}_\alpha^+c(y) + \frac{i}{2}\Theta^{\alpha+}\hat{\Theta}_\alpha^+a_t(y) + i\Theta^{\alpha+}\hat{\Theta}^{\beta+}a_{\alpha\beta}(y) - \\ &- \hat{\Theta}^{\alpha+}\hat{\Theta}_\alpha^+\Theta^{\beta+}u_k^-\Psi_\beta^k(y), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где все поля эрмитовы, $(c, a_t, a_{\alpha\beta}, \Psi_\alpha^k)^\dagger = (c, a_t, a^{\alpha\beta}, \Psi_k^\alpha)$.

Можно построить компонентные 3D автодуальные уравнения

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= -\nabla_{\alpha\beta} a_t, \\ \nabla^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta} c &= 2[a_t, [a_t, c]] - \{\Psi_k^\alpha, \Psi_\alpha^k\}, \\ \nabla_{\beta\gamma} \Psi^{\gamma k} + \frac{i}{2}[a_t, \Psi_\beta^k] &= 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где

$$\nabla_{\alpha\beta} c \equiv \partial_{\alpha\beta} c - i[a_{\alpha\beta}, c], \quad F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\rho} a_\beta^\rho + \partial_{\beta\rho} a_\alpha^\rho - i[a_{\alpha\rho}, a_\beta^\rho]. \quad (6.8)$$

Отметим, что статическая напряженность калибровочного поля и поле a_t связаны автодуальным BPS-уравнением.

Суперполевым анализ статических автодуальных уравнений может быть проделан по аналогии с анализом евклидовых 4D автодуальных уравнений, приведенным в разделе 4. Статический предел представления мост-матрицы имеет вид

$$A_\alpha^\pm = 0, \quad \hat{A}_\alpha^+(v) = e^{-v} \hat{\mathcal{D}}_\alpha^+ e^v, \quad (6.9)$$

где v – статическая автодуальная мост-матрица, $\mathcal{D}_\alpha^+ v = 0$.

По аналогии с 4D автодуальным уравнением можно использовать формальную идентификацию всех групп $SU(2)$ в 3D HSS_E $y^{\alpha\beta} \rightarrow y^{ik}$, $\Theta_l^\alpha \rightarrow \Theta_l^k$, $\hat{\Theta}^{\alpha l} \rightarrow \hat{\Theta}^{l,k}$. В этом случае препотенциал будет функцией одной гармонической проекции четной координаты.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Гармоническое $N = 2$, $D = (3, 1)$ суперпространство

$SU(2)/U(1)$ -гармоники [1] параметризуют сферу S^2 . Они образуют $SU(2)$ -матрицу $u_i^\pm$ и определены по модулю $U(1)$. $SU(2)$ -инвариантные гармонические производные действуют на гармониках

$$[\partial^{++}, \partial^{--}] = \partial^0, \quad [\partial^0, \partial^{\pm\pm}] = \pm 2\partial^{\pm\pm}. \quad (A.1)$$

Специальное $SU(2)$ -ковариантное сопряжение гармоник сохраняет $U(1)$ -заряды:

$$\widetilde{u_i^\pm} = u^{\pm i}, \quad \widetilde{u^{\pm i}} = -u_i^\pm. \quad (A.2)$$

На гармонические производные произвольных гармонических функций $f(u)$ это сопряжение действует следующим образом:

$$\widetilde{\partial^{\pm\pm} f} = \partial^{\pm\pm} \widetilde{f}. \quad (A.3)$$

Рассмотрим координаты $N = 2$ суперпространства $M(3, 1 | 8)$ над $D = (3, 1)$ пространством Минковского

$$\begin{aligned} z^M &= (x^{\alpha\dot{\beta}}, \theta_k^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}k}), \\ (x^{\alpha\dot{\beta}})^\dagger &= x^{\beta\dot{\alpha}}, \quad (\theta_k^\alpha)^\dagger = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}k}, \end{aligned} \quad (A.4)$$

где $\alpha, \dot{\alpha} - SL(2, \mathbb{C})$ -индексы. Можно определить аналитическое HSS_M с двумя гармоническими размерностями u_i^I и следующим множеством 4 четных и $(2 + 2)$ нечетных координат:

$$\begin{aligned}\zeta &= (x_A^{\alpha\dot{\beta}}, \theta^{\alpha+}, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}+}), \\ x_A^{\alpha\dot{\beta}} &= x^{\alpha\dot{\beta}} - i(u_k^- u_l^+ + u_l^- u_k^+) \theta^{\alpha k} \bar{\theta}^{\dot{\beta} l}, \\ \theta^{\alpha\pm} &= \theta^{\alpha k} u_k^\pm, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}\pm} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha} k} u_k^\pm.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Это суперпространство ковариантно по отношению к преобразованиям $N = 2$ суперсимметрии

$$\delta x_A^{\alpha\dot{\beta}} = 2i\theta^{\alpha+} \bar{\epsilon}^{\dot{\beta} k} u_k^- + 2i\bar{\theta}^{\dot{\beta}+} \epsilon^{\alpha k} u_k^-, \quad \delta \theta^{\alpha\pm} = \epsilon^{\alpha k} u_k^\pm, \quad \delta \bar{\theta}^{\dot{\beta}\pm} = \bar{\epsilon}^{\dot{\beta} k} u_k^\pm.\tag{A.6}$$

Сопряжение нечетных аналитических координат имеет вид

$$\theta^{\alpha\pm} \rightarrow \bar{\theta}^{\dot{\alpha}\pm}, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}\pm} \rightarrow -\theta^{\alpha\pm},\tag{A.7}$$

а координаты $x_A^{\alpha\dot{\beta}}$ вещественны.

Рассмотрим простейшие спинорные и гармонические производные в этих координатах:

$$\begin{aligned}D_\alpha^+ &= \partial_\alpha^+, \quad \bar{D}_\alpha^+ = \bar{\partial}_\alpha^+, \\ D^{++} &= \partial^{++} - i\theta^{\alpha+} \bar{\theta}^{\dot{\beta}+} \partial_{\alpha\dot{\beta}} + \theta^{\alpha+} \partial_\alpha^+ + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}+} \bar{\partial}_\alpha^+, \end{aligned}\tag{A.8}$$

где частные производные удовлетворяют соотношениям

$$\partial_{\alpha\dot{\alpha}} x^{\beta\dot{\beta}} = 2\delta_\alpha^\beta \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad \partial_\alpha^+ \theta^{\beta-} = \delta_\alpha^\beta, \quad \bar{\partial}_\alpha^+ \bar{\theta}^{\dot{\beta}-} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}.\tag{A.9}$$

Можно также построить остальные гармонические и грассмановы производные в этих координатах:

$$\begin{aligned}D^{--} &= \partial^{--} - i\theta^{\alpha-} \bar{\theta}^{\dot{\beta}-} \partial_{\alpha\dot{\beta}} + \theta^{\alpha-} \partial_\alpha^- + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}-} \bar{\partial}_\alpha^-, \\ D_\alpha^- &= -\partial_\alpha^- + i\bar{\theta}^{\dot{\beta}-} \partial_{\alpha\dot{\beta}}, \quad \bar{D}_\alpha^- = -\bar{\partial}_\alpha^- - i\theta^{\alpha-} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \\ \partial_\alpha^- \theta^{\beta+} &= \delta_\alpha^\beta, \quad \bar{\partial}_\alpha^- \bar{\theta}^{\dot{\beta}+} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}.\end{aligned}\tag{A.10}$$

Полезно описать свойства этих производных по отношению к эрмитову сопряжению:

$$(D^{++}, D^{--}) \rightarrow -(D^{++}, D^{--}), \quad D_\alpha^\pm \rightarrow \bar{D}_\alpha^\pm, \quad \bar{D}_\alpha^\pm \rightarrow -D_\alpha^\pm.\tag{A.11}$$

Мы используем следующие соглашения:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ik} \varepsilon_{kl} &= \delta_l^i, & \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} &= \delta_\beta^\alpha, \\ (\theta^\pm)^2 &= \frac{1}{2} \theta^{\alpha\pm} \theta_\alpha^\pm, & (\bar{\theta}^\pm)^2 &= \frac{1}{2} \bar{\theta}_\alpha^\pm \bar{\theta}^{\dot{\alpha}\pm}, \\ (D^\pm)^2 &= \frac{1}{2} D^{\alpha\pm} D_\alpha^\pm, & (\bar{D}^\pm)^2 &= \frac{1}{2} \bar{D}_\alpha^\pm \bar{D}^{\dot{\alpha}\pm}.\end{aligned}\tag{A.12}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Гармоническое суперпространство в евклидовом случае

Евклидово $N = 2$ суперпространство $E(4|8)$ имеет координаты $z^M = (y^{\alpha\dot{\beta}}, \Theta_k^\alpha, \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}k})$ с альтернативными правилами сопряжения

$$(y^{\alpha\dot{\alpha}})^\dagger = y_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (\Theta_k^\alpha)^\dagger = \Theta_\alpha^k, \quad (\hat{\Theta}^{\dot{\alpha}k})^\dagger = \hat{\Theta}_{\dot{\alpha}k}, \quad (\text{Б.1})$$

где $\alpha, \dot{\alpha}$ и k – индексы прямого произведения трех групп $SU(2)$. Евклидовы $N = 2$ координаты аналитического суперпространства определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta_E &= (y_A^{\alpha\dot{\beta}}, \Theta^{\alpha+}, \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}+}), \\ y_A^{\alpha\dot{\beta}} &= y^{\alpha\dot{\beta}} - (u^{k-} u_l^+ + u_l^- u^{k+}) \Theta_k^\alpha \hat{\Theta}^{\dot{\beta}l}, \\ \Theta^{\alpha\pm} &= \Theta_k^\alpha u^{k\pm}, \quad \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}\pm} = \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}k} u_k^\pm. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Евклидовы спинорные и гармонические производные в этих координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha^+ &= \frac{\partial}{\partial \Theta^{\alpha-}} \equiv d_\alpha^+, \quad \hat{\mathcal{D}}_\alpha^+ = \frac{\partial}{\partial \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}-}} \equiv \hat{d}_\alpha^+, \\ \mathcal{D}^{\pm\pm} &= \partial^{\pm\pm} - \Theta^{\alpha\pm} \hat{\Theta}^{\dot{\beta}\pm} \partial_{\alpha\dot{\beta}} + \Theta^{\alpha\pm} d_\alpha^\pm + \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}\pm} \hat{d}_\alpha^\pm, \\ \mathcal{D}_\alpha^- &= -d_\alpha^- + \hat{\Theta}^{\dot{\beta}-} \partial_{\alpha\dot{\beta}}, \quad \hat{\mathcal{D}}_\alpha^- = -\hat{d}_\alpha^- - \Theta^{\alpha-} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Мы будем использовать следующие правила сопряжения для евклидовых гармонизованных нечетных координат и производных:

$$\begin{aligned} (\Theta^{\alpha\pm})^\dagger &= \Theta_\alpha^\pm, \quad (\mathcal{D}_\alpha^\pm)^\dagger = -\mathcal{D}^{\alpha\pm}, \\ (\hat{\Theta}^{\dot{\alpha}\pm})^\dagger &= -\hat{\Theta}_\alpha^\pm, \quad (\hat{\mathcal{D}}_\alpha^\pm)^\dagger = \hat{\mathcal{D}}^{\pm\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

Для билинейных комбинаций евклидовых спиноров справедливы следующие соглашения:

$$\begin{aligned} (\Theta^\pm)^2 &= \frac{1}{2} \Theta^{\alpha\pm} \Theta_\alpha^\pm, \quad (\hat{\Theta}^\pm)^2 = \frac{1}{2} \hat{\Theta}^{\dot{\alpha}\pm} \hat{\Theta}_\alpha^\pm, \\ (\mathcal{D}^\pm)^2 &= \frac{1}{2} \mathcal{D}^{\alpha\pm} \mathcal{D}_\alpha^\pm, \quad (\hat{\mathcal{D}}^\pm)^2 = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}\pm} \hat{\mathcal{D}}_\alpha^\pm. \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Благодарности. Автор благодарен Е. Иванову и И. Нидерле за обсуждения. Эта работа частично поддержана грантами РФФИ № 99-02-18417, РФФИ-ННИО № 99-02-04022, INTAS № 00254 и NATO PST.CLG № 974874, а также программой Вотруба–Блохинцев ЛТФ ОИЯИ.

Список литературы

- [1] *A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Q. Grav. 1984. V. 1. P. 469.
- [2] *A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Q. Grav. 1985. V. 2. P. 601.
- [3] *B. M. Zupnik.* Phys. Lett. B. 1987. V. 183. P. 175.
- [4] *A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Ann. Phys. 1988. V. 185. P. 1.
- [5] *O. Ogievetsky.* Harmonic representatives of instantons and self-dual monopoles. In: Group Theoretical Methods in Physics. Lect. Notes in Phys. V. 313. Eds. H.-D. Doebner, J.-D. Hennig, T. D. Palev. Berlin: Springer, 1988. P. 548.
- [6] *C. Devchand, V. Ogievetsky.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 414. P. 763; Erratum. Nucl. Phys. B. 1995. V. 451. P. 768.
- [7] *B. M. Zupnik.* Phys. Lett. B. 1996. V. 375. P. 170; Alternative formulations of $N = 2$ supersymmetric gauge theory in harmonic superspace. In: Supersymmetry and Quantum Field Theory. Lect. Notes in Phys. V. 509. Eds. J. Wess, V. Akulov. Berlin: Springer, 1998. P. 157.
- [8] *B. M. Zupnik.* Short harmonic superfields and light-cone gauge in super-Yang–Mills equations. In: Proc. Intern. Conf. “Quantization, Gauge Theory and Strings” (devoted to the memory of prof. E. S. Fradkin). Eds. A. Semikhatov, M. Vasiliev, V. Zaikin. M.: Scientific World, 2001. P. 277; hep-th/0011012.
- [9] *B. M. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 554. P. 365.
- [10] *B. M. Zupnik.* Phys. Lett. B. 1988. V. 209. P. 513.
- [11] *N. Seiberg, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19.
- [12] *J. Gauntlett.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 411. P. 443.
- [13] *E. A. Ivanov, S. V. Ketov, B. M. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 509. P. 53.
- [14] *A. Semikhatov.* Phys. Lett. B. 1983. V. 120. P. 171.
- [15] *I. V. Volovich.* Phys. Lett. 1983. V. 129. P. 429; Lett. Math. Phys. 1983. V. 7. P. 517.
- [16] *Ю. И. Манин.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.
- [17] *W. Siegel.* Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 1042.
- [18] *J. Niederle, B. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 598. P. 645; hep-th/0012114.

Поступила в редакцию 16.VII.2001 г.