Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Губайдуллин, О свойствах спектра оператора Шредингера в магнитном поле, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 2, 267–274

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:14:25

О СВОЙСТВАХ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследованы свойства спектра оператора Шредингера с магнитным и электрическим потенциалами. Доказаны отсутствие у оператора положительных собственных значений и абсолютная непрерывность спектра этого оператора на положительной полуоси.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается оператор Шредингера в пространстве $L_2(R^n)$

$$H(a, V) = \sum_{k=1}^n (p_k + a_k)^2 + V, \quad (1)$$

где $p_k = -i\partial/\partial x_k$ — оператор импульса по k -й переменной, $V(x)$ — электрический потенциал, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ — магнитный потенциал, $a_k(x) \in W_{2, \text{loc}}^2$, причем все потенциалы считаются вещественными. Данную работу можно рассматривать как продолжение статьи [1].

2. ОТСУТСТВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

С физической точки зрения утверждение о том, что у оператора (1) (при некоторых разумных ограничениях на потенциалы) отсутствуют положительные собственные значения, представляется очевидным, поскольку положительным собственным значениям (1) соответствуют связанные состояния с положительной энергией связи. Однако известен пример электрического потенциала Вигнера–фон Неймана ($a(x) \equiv 0$), который ведет себя на бесконечности как $O(1/|x|)$ и оператор (1) которого имеет положительное собственное значение. В теореме 1 приводятся условия на потенциалы, исключающие такую возможность. Эта теорема является обобщением теоремы 2.2 работы [2], которая была доказана для случая $a(x) \equiv 0$. Из вида оператора (1) следует, что

$$e^{-i\mu} H(a, V) e^{i\mu} = H(b, V),$$

* Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

где $\mu(x)$ — произвольная вещественная дифференцируемая функция, называемая калибровочной. В случае специального выбора $\mu(x)$ (см. [1]) имеем

$$b_k(x) = \sum_{m=1}^n x_m \int_0^1 s a_{km}(sx) ds, \quad k = \overline{1, n},$$

где $b_k(x)$ — компоненты нового магнитного потенциала, $a_{km}(x) = \partial a_k(x) / \partial x_m - \partial a_m(x) / \partial x_k$ — компоненты магнитного тензора. Введем величину

$$\hat{b}_k(x) = \sum_{m=1}^n \frac{x_m}{|x|} a_{km}(x), \quad k = \overline{1, n},$$

тогда

$$\frac{\partial b_k(x)}{\partial |x|} = -\frac{b_k(x)}{|x|} + \hat{b}_k(x), \quad k = \overline{1, n}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H(a, V)U = \lambda U$, $\lambda > 0$ и пусть выполнены следующие условия:

- а) $|\hat{b}_k(x)| = o(\frac{1}{|x|})$, $|x| \rightarrow \infty$, $\sup_{x \in R^n} |\hat{b}_k(x)| < \infty$, $k = \overline{1, n}$;
- б) $\sup_{x \in R^n} |\operatorname{div} b(x)| < \infty$;
- в) при $n \leq 3$ оператор $W = V(1 + |x|)$ Δ -компактен;
- г) при $n > 3$ оператор W Δ -компактен и

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} z^{\frac{1}{4}} \|(1 + |x|)^{-\frac{1}{2}} W(-\Delta + z)^{-1}\| = 0.$$

Тогда $U(x) \equiv 0$.

Сделаем некоторые предварительные замечания. Условия “а” и “б” выполнены, если

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| a_{km}(x) = 0, \quad \sup_{x \in R^n} |a_{km}(x)| < \infty, \quad k, m = \overline{1, n}, \\ \left| \frac{\partial a_{km}(x)}{\partial x_k} \right| \leq \frac{C}{1 + |x|}, \quad k, m = \overline{1, n}. \end{array} \right.$$

Здесь и далее C — любая подходящая абсолютная постоянная. Налагать условия непосредственно на компоненты магнитного потенциала $a_k(x)$ нет необходимости из-за их отсутствия в наших формулах. В качестве электрических потенциалов допускаются потенциалы вида $V(x) = (1 + |x|)^{-1} W(x)$, где $W(x)$ — произвольная (не обязательно гладкая) функция такая, что $\sup_{x \in R^n} |W(x)| \leq C$ и $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |W(x)| = 0$. При этих условиях оператор W Δ -компактен и, кроме того, $\|W(-\Delta + z)^{-1}\| \leq Cz^{-1}$, так что и предельное условие “г” выполнено. Если функция $W(x)$ неограниченна, то при $n \leq 3$ критерий Δ -компактности W хорошо известен и заключается в том, что

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int_{|x-y| \leq 1} |W(y)|^2 dy = 0.$$

При этом для таких потенциалов предельное условие “Г” выполняется автоматически [1]. В случае, когда $n \geq 4$, условие “Г” будет выполнено, если

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{-n+3} |W(y)|^2 dy = 0, \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{x \in R^n} \int_{|x-y| \leq \gamma} |x-y|^{-n+3} \frac{|W(y)|^2}{1+|y|} dy = 0. \end{cases}$$

При этом первое условие обеспечивает Δ -компактность W , а второе – выполнение предельного условия “Г”.

Для доказательства теоремы 1 используется идея метода, предложенного в книге [3] (с. 102). Однако предлагаемое ниже доказательство представляется более простым, поскольку использует характерную для эллиптических уравнений априорную оценку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в работе [1], определим пространства $L_2(R_+, G)$, $G = L_2(S_{n-1}, d\omega)$, где S_{n-1} – единичная сфера, $\omega = x/|x|$, $|x| = r$. Обозначим через $\|\cdot\|_G$ норму в G . Между элементами пространств $L_2(R^n)$ и $L_2(R_+, G)$ можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее норму. Далее в этом разделе под символами $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ будут пониматься скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(R_+, G)$, соответственно. Согласно лемме 4 из работы [1] имеем

$$\tilde{H}(b, V) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{n-1}{2r^2} + \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n D_k^2 + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n (D_k b_k + b_k D_k) + b^2 + V, \quad (2)$$

где $\tilde{H}(b, V)$ – оператор в $L_2(R_+, G)$, соответствующий оператору $H(b, V)$ в $L_2(R^n)$, D_k , $k = \overline{1, n}$, – симметрический оператор в G . Определим функцию

$$\Theta(r) = \begin{cases} 0, & r < N, \\ f(r), & N \leq r \leq N+C, \\ 1, & r > N+C, \end{cases} \quad \Theta(r) \in C^2(R_+).$$

Далее, положим $Q = \Theta \tilde{U}$. Поскольку $\tilde{H}(b, V) \tilde{U} = \lambda \tilde{U}$, то из (2) следует, что

$$\tilde{H}(b, V)Q - \lambda Q = g, \quad (3)$$

где $g = -\Theta'' \tilde{U} - 2\Theta' \tilde{U}'$ (здесь и далее штрих означает дифференцирование по r). Очевидно, что функция g финитна. Введем функцию от переменной r и параметра s

$$\phi_s(r) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}(sr)$$

и определим $Q_s = Q e^{\delta \phi_s}$. Очевидно, что Q_s принадлежит пространству $L_2(R_+, G)$ при любых положительных s и δ . Из формул (2), (3) следует, что функция Q_s удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} -Q_s'' - \frac{n-1}{2r^2} Q_s + \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n D_k^2 Q_s + \left[\frac{1}{r} \sum_{k=1}^n (D_k b_k + b_k D_k) + b^2 \right] Q_s + \\ + V Q_s - \lambda Q_s + 2\delta \phi_s' Q_s' + [\delta \phi_s'' - \delta^2 (\phi_s')^2] Q_s = h_s, \end{aligned} \quad (4)$$

где $h_s = ge^{\delta\phi_s}$. Умножим уравнение (4) скалярно в $L_2(R_+, G)$ на $2rQ'_s$ и возьмем вещественную часть, тогда

$$\begin{aligned} & \|Q'_s\|^2 - \frac{n-1}{2}\|Q_s\|_{-2}^2 + \sum_{k=1}^n \|D_k Q_s\|_{-2}^2 - \sum_{k=1}^n ([D_k b'_k + b'_k D_k] Q_s, Q_s) + \\ & + (b^2 Q_s, Q_s) - 2 \sum_{k=1}^n (r b_k \hat{b}_k Q_s, Q_s) + \lambda \|Q_s\|^2 + 4\delta(r\phi'_s Q'_s, \phi'_s Q'_s) - \\ & - \int_0^\infty [r(\delta\phi_s'' - \delta^2(\phi'_s)^2)]' \|Q_s\|_G^2 dr = -2 \operatorname{Re}(rV Q_s, Q'_s) + 2 \operatorname{Re}(rh_s, Q'_s), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\|\cdot\|_{-2}^2 = \int_0^\infty r^{-2} \|\cdot\|_G^2 dr$. Из соотношения (5) следует оценка

$$\begin{aligned} & \|Q'_s\|^2 + \sum_{k=1}^n \|D_k Q_s\|_{-2}^2 + \lambda \|Q_s\|^2 \leq \varepsilon \left(\sum_{k=1}^n \|D_k Q_s\|_{-2}^2 + \|Q_s\|^2 \right) + \\ & + \frac{n-1}{2} \|Q_s\|_{-2}^2 + 4 \|W Q_s\|^2 + \frac{1}{4} \|Q'_s\|^2 + 4 \|h_s\|_2^2 + \\ & + \frac{1}{4} \|Q'_s\|^2 + \int_0^\infty \frac{8\delta r^2 s^4 + 4\delta^2 s^2 r}{(1 + s^2 r^2)^3} \|Q_s\|_G^2 dr, \end{aligned} \quad (6)$$

где величина $\varepsilon > 0$ может быть сделана меньше любого наперед заданного числа путем увеличения N в определении функции Θ , поскольку $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |rb'_k| = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |b_k| = 0$, $k = \overline{1, n}$ (см. выше формулы для b_k и b'_k). Возьмем ε таким, что $\varepsilon < \min(\lambda/2, 1/2)$.

Поскольку для $N > 1$ верно неравенство

$$\frac{n-1}{2} \|Q_s\|_{-2}^2 \leq \frac{n-1}{2N^2} \|Q_s\|^2,$$

то N можно выбрать так, что

$$\frac{n-1}{2} \|Q_s\|_{-2}^2 \leq \frac{\lambda}{4} \|Q_s\|^2.$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{8\delta r^2 s^4}{(1 + s^2 r^2)^3} \leq s\delta$$

и

$$\frac{4\delta^2 s^2 r}{(1 + s^2 r^2)^3} \leq \frac{16\delta^2}{27},$$

а поэтому, выбрав $\delta \leq \sqrt{27\lambda/128}$ и $s < 16\delta/27$, можно добиться того, что

$$\int_0^\infty \frac{8\delta r^2 s^4 + 4\delta^2 s^2 r}{(1 + s^2 r^2)^3} \|Q_s\|_G^2 dr < \frac{\lambda}{8} \|Q_s\|^2.$$

С учетом вышесказанного из (6) получим оценку

$$\|Q'_s\|^2 + \lambda \|Q_s\|^2 \leq C(\|W Q_s\|^2 + \|h_s\|_2^2). \quad (7)$$

Теперь оценим величину $\|WQ_s\|^2$. Пусть $R_0(-z) = (-\Delta + z)^{-1}$, $R(-z) = (H(b, V) + z)^{-1}$ — операторы в $L_2(R^n)$, тогда $\tilde{R}(-z)$ — оператор в $L_2(R_+, G)$, соответствующий $R(-z)$. Из теории возмущений и вида $H(b, V)$ в $L_2(R^n)$ следует, что

$$R_0(-z) = \left(I + R_0(-z) \left(2 \sum_{k=1}^n b_k p_k + b^2 - i \operatorname{div} b + V \right) \right) R(-z).$$

Поскольку норму оператора

$$R_0(-z) \left(2 \sum_{k=1}^n b_k p_k + b^2 - i \operatorname{div} b + V \right)$$

в пространстве $L_2(R^n)$ для достаточно больших $z > 0$ можно оценить сверху единицей, то для какого-либо фиксированного z_0 оператор

$$W R(-z_0) = W \sum_{k=0}^{\infty} \left(R_0(-z_0) \left(2 \sum_{k=1}^n b_k p_k + b^2 - i \operatorname{div} b + V \right) \right)^k R_0(-z_0)$$

компактен в $L_2(R^n)$, следовательно, $W \tilde{R}(-z_0)$ компактен в $L_2(R_+, G)$. Из (4) следует, что

$$WQ_s = W \tilde{R}(-z_0) ((\lambda + z_0)Q_s - 2\delta\phi'_s Q'_s - [\delta\phi''_s - \delta^2(\phi'_s)^2]Q_s + h_s). \quad (8)$$

Оценим результат действия оператора $W \tilde{R}(-z_0)$ на первое слагаемое в правой части (8). В силу компактности оператора $W \tilde{R}(-z_0)$ для любого ε_1 существуют числа $N_1(\varepsilon_1)$ и C такие, что

$$\|W \tilde{R}(-z_0)(\lambda + z_0)Q_s\| \leq \varepsilon_1 \|Q_s\| + C \left(\int_0^{N_1} \|Q_s\|_G^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При оценке остальных слагаемых правой части (8) оператор $W \tilde{R}(-z_0)$ можно считать просто ограниченным. Тогда из соотношения (8) и ограниченности функций ϕ'_s и ϕ''_s вытекает оценка

$$\|WQ_s\|^2 \leq C \left(\varepsilon_1^2 \|Q_s\|^2 + \int_0^{N_1} \|Q_s\|_G^2 dr + \delta^2 \|Q'_s\|^2 + (\delta + \delta^2)^2 \|Q_s\|^2 + \|h_s\|^2 \right). \quad (9)$$

Числа ε_1 и δ можно взять настолько малыми, что $C(\varepsilon_1^2 + (\delta + \delta^2)^2) < \lambda$ и $C\delta^2 < 1$. Тогда, применив неравенство (9) для оценки правой части (7), получим

$$\|Q_s\|^2 \leq C \left(\|h_s\|_2^2 + \int_0^{N_1} \|Q_s\|_G^2 dr \right),$$

откуда в силу финитности h_s следует, что $\|Q_s\| \leq C$ для любого $s > 0$, а поэтому

$$e^{\delta_0|x|}U(x) \in L_2(R^n)$$

для какого-то $\delta_0 > 0$. Остается применить теорему 2 из [1], в силу которой $U(x) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

3. АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПЕКТРА

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены следующие условия:

- а) $|\hat{b}_k(x)| = o(\frac{1}{|x|})$, $|x| \rightarrow \infty$, $\sup_{x \in R^n} |\hat{b}_k(x)| < \infty$, $k = \overline{1, n}$;
- б) $\sup_{x \in R^n} |\operatorname{div} b(x)| < \infty$;
- в) при $n \leq 3$ оператор $W = V(1 + |x|)$ Δ -компактен;
- г) при $n > 3$ оператор W Δ -компактен и

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} z^{\frac{1}{4}} \|(1 + |x|)^{-\frac{1}{2}} W(-\Delta + z)^{-1}\| = 0;$$

- д) оператор $|x|b^2$ Δ -компактен.

Тогда оператор (1) обладает абсолютно непрерывным спектром на положительной полуоси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем оценку Мурра (см., например, [3], с. 84). Оператор $H(b, V)$ удовлетворяет этой оценке на интервале ψ , если существуют положительное число α и компактный оператор K такие, что $E_\psi[H(b, V), iA]E_\psi \geq \alpha E_\psi + K$. Здесь E_ψ — спектральный проектор $H(b, V)$, отвечающий интервалу ψ , $[H(b, V), iA] = H(b, V)iA - iAH(b, V)$ — коммутатор. В нашем случае в качестве оператора A можно взять $(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)/(2i)$. Вычисляя, получаем выражение

$$E_\psi[H(b, V), iA]E_\psi = 2E_\psi H(b, V)E_\psi + E_\psi T E_\psi, \quad (10)$$

где

$$T = \left[2i \operatorname{div} b + 2i \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial x_k} - 2b^2 - 2V + \right. \\ \left. + 2i \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^n x_m \frac{\partial b_k}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} + i \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n x_m \frac{\partial^2 b_k}{\partial x_m \partial x_k} - |x| \frac{\partial(b^2 + V)}{\partial |x|} \right].$$

Пусть $\psi = (\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$. Поскольку $E_\psi H(b, V)E_\psi \geq \alpha E_\psi$, то остается показать компактность второго слагаемого правой части (10). Так как

$$E_\psi T E_\psi = E_\psi (H(b, V) + z)(H(b, V) + z)^{-1}(-\Delta + z)(-\Delta + z)^{-1} \times \\ \times T(-\Delta + z)^{-1}(-\Delta + z)(H(b, V) + z)^{-1}(H(b, V) + z)E_\psi$$

(для подходящих $z > 0$) и операторы

$$E_\psi (H(b, V) + z), \quad (H(b, V) + z)E_\psi, \\ (H(b, V) + z)^{-1}(-\Delta + z), \quad (-\Delta + z)(H(b, V) + z)^{-1}$$

ограничены (первые два в силу определения E_ψ , два оставшихся в силу представления для $R(-z) = (H(b, V) + z)^{-1}$, полученного в разделе 1), то достаточно доказать компактность

$$(-\Delta + z)^{-1}T(-\Delta + z)^{-1}.$$

Компактность этого выражения следует из компактности отдельных его слагаемых. Действительно, пусть $K(x, y, -z)$ — ядро оператора $R_0(-z) \operatorname{div} b R_0(-z)$. Тогда

$$K(x, y, -z) = \int_{R^n} R_0(x, s, -z) \operatorname{div} b(s) R_0(s, y, -z) ds.$$

Интегрируя по частям и учитывая то, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |b_k| = 0$, $k = \overline{1, n}$, получим

$$\begin{aligned} K(x, y, -z) = & \int_{R^n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial R_0(x, s, -z)}{\partial x_k} b_k R_0(s, y, -z) ds + \\ & + \int_{R^n} \sum_{k=1}^n R_0(s, y, -z) b_k(s) \frac{\partial R_0(x, s, -z)}{\partial y_k} ds, \end{aligned}$$

т.е.

$$R_0(-z) \operatorname{div} b R_0(-z) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} R_0(-z) b_k R_0(-z) - R_0(-z) b_k R_0(-z) \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

Этот оператор компактен, так как операторы $\frac{\partial}{\partial x_k} R_0(-z)$ и $R_0(-z) \frac{\partial}{\partial y_k}$ ограничены, а $R_0(-z) b_k$ и $b_k R_0(-z)$ компактны, поскольку, как уже отмечалось, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} b_k(x) = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Операторы

$$\sum_{k=1}^n R_0(-z) b_k \frac{\partial}{\partial x_k} R_0(-z), \quad R_0(-z) (b^2 + V) R_0(-z)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n R_0(-z) \left(x_m \frac{\partial b_k}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} R_0(-z)$$

также компактны, так как оператор $\frac{\partial}{\partial x_k} R_0(-z)$ ограничен,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} b_k(x) = 0, \quad \sum_{m=1}^n x_m \frac{\partial b_k}{\partial x_m} = \frac{\partial b_k}{\partial |x|}, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \frac{\partial b_k}{\partial |x|} = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

и оператор V Δ -компактен.

Интегрируя по частям ядро оператора, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n R_0(-z) \left(x_m \frac{\partial^2 b_k}{\partial x_m \partial x_k} \right) R_0(-z) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} R_0(-z) \left(x_m \frac{\partial b_k}{\partial x_m} \right) R_0(-z) - \\ & - \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n R_0(-z) \left(x_m \frac{\partial b_k}{\partial x_m} \right) R_0(-z) \frac{\partial}{\partial y_k}. \end{aligned}$$

Очевидно, что этот оператор компактен.

Также путем интегрирования по частям ядра оператора найдем, что

$$R_0(-z)|x|\frac{\partial(b^2+V)}{\partial|x|}R_0(-z) = -nR_0(-z)(b^2+V)R_0(-z) + \\ + \frac{\partial}{\partial|x|}R_0(-z)|x|(b^2+V)R_0(-z) - R_0(-z)|x|(b^2+V)R_0(-z)\frac{\partial}{\partial|y|}.$$

Этот оператор также компактен, в силу того что операторы $\frac{\partial}{\partial|x|}R_0(-z)$ и $R_0(-z)\frac{\partial}{\partial|y|}$ ограничены, а $|x|b^2$ и $|x|V$ Δ -компактны по условиям теоремы 2.

Таким образом, доказано, что оператор (1) удовлетворяет оценке Мурра на положительной полуоси, следовательно, у него на этой полуоси отсутствует сингулярно-непрерывный спектр ([3], с. 90). А поскольку условия теоремы 2 включают условия теоремы 1, то у оператора (1) на интервале $(0, \infty)$ отсутствуют собственные значения. Следовательно, оператор (1) обладает абсолютно непрерывным спектром на положительной полуоси. Теорема 2 доказана.

Благодарности. Автор благодарит Х. Х. Муртазина за поставленную задачу.

Список литературы

- [1] М. Б. Губайдуллин, Х. Х. Муртазин. ТМФ. 2001. Т. 126. № 3. С. 443.
- [2] Х. Х. Муртазин, В. А. Садовничий. Спектральный анализ многочастичного оператора Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [3] Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Киш, Б. Саймон. Операторы Шредингера с приложениями в квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.

Поступила в редакцию 2.VIII.2001 г.