Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Абрамян, С. А. Вакуленко, Диссипативные и гамильтоновы системы с хаотическим поведением: аналитический подход, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 2, 287–300

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 06:08:43

ДИССИПАТИВНЫЕ И ГАМИЛЬТОНОВЫЕ СИСТЕМЫ С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ: АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Описаны некоторые классы диссипативных и гамильтоновых распределенных систем. Динамика этих систем эффективно сводится к конечномерной, которая в некотором смысле может быть неограниченно сложна. Меняя параметры этих систем, можно получить любой (с точностью до орбитальной топологической эквивалентности) структурно-устойчивый аттрактор для диссипативного случая и любой полиномиальный слабонеинтегрируемый гамильтониан для консервативного случая. В качестве примеров рассмотрены нейронные сети Хопфилда и некоторые системы реакция-диффузия в диссипативном случае, а также нелинейная струна в гамильтоновом.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы рассматриваем проблему хаотического поведения для диссипативных и гамильтоновых систем, описываемых системами связанных осцилляторов и системами нелинейных уравнений в частных производных.

Наша цель – описать физические и механические модели, где наблюдается возникновение различных типов структурно-устойчивого периодического и хаотического поведения и образование пространственно-временных структур. Рассматривается зависимость этого поведения от параметров системы. Развитый подход является чисто аналитическим, и результаты даже в принципе не могут быть получены с помощью компьютеров.

Сначала мы излагаем физическую идею нашего подхода. Затем приводятся примеры фундаментальных диссипативных систем с хаотическим поведением, построенные в работах [1], [2]. Отметим, что эти результаты являются аналитическими и не используют компьютерных расчетов. Основные новые результаты изложены в двух последних разделах работы. Они описывают пример гамильтоновой системы с разнообразным и сложным поведением. Мы надеемся, что в последующих работах будут рассмотрены и другие более фундаментальные и простые примеры. Наша основная гипотеза состоит в том, что бесконечномерные гамильтоновы системы, близкие к вполне интегрируемым, должны проявлять в некотором смысле “неограниченно сложное” конечномерное

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

гамильтоново поведение в зависимости от их параметров (так же как диссипативные системы, найденные в [1], [2], могут иметь “неограниченно сложное” диссипативное поведение). Такое поведение является результатом взаимодействия локализованных мод. Отметим, что упомянутые здесь понятия “сложности”, “неограниченной сложности” и хаоса, разумеется, требуют строгих математических формулировок, которые будут даны ниже.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ХАОСА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

Диссипативные динамические системы такие, как системы реакция – диффузия и системы связанных осцилляторов, описывают много интересных и важных эффектов в физике, химии и биологии (см., например, [3]–[5]). Однако явное аналитическое описание решений таких систем, как правило, отсутствует. Имеется ряд результатов, которые показывают, что при определенных условиях существует так называемый глобальный аттрактор и его фрактальная или хаусдорфова размерность конечна.

Напомним некоторые определения этих основных понятий, которые будут использованы в дальнейшем [6]–[9]. Динамическая система в банаховом пространстве H есть полугруппа S^t операторов, действующих из H в H . Многие уравнения математической физики определяют полугруппы при подходящем выборе H [6], [7]. Динамическая система называется диссипативной, если существует ограниченное множество $B \subset H$ такое, что любая траектория $S^t u$, $u \in H$, в конце концов входит в B и остается в нем: $S^t u \in B$ для $t > T_0(B, u)$. Такое множество называется поглощающим. Множество A называется притягивающим с бассейном притяжения $\mathcal{B}(A)$, если для любой окрестности $V(A)$ образ $S^t B_0$ любого ограниченного множества, лежащего в $\mathcal{B}$: $B_0 \subset \mathcal{B}$, входит в эту окрестность на достаточно больших временах: $S^t B_0 \subset V(A)$ для $t > T_0(B_0, V(A))$. Множество называется глобально притягивающим, если его бассейн притяжения настолько широк, что совпадает со всем пространством H . Множество I называется инвариантным, если полупоток S^t оставляет его на месте: $S^t I = I$, $t \geq 0$. Возможны различные определения аттрактора. Определения, полностью удовлетворительного как с физической, так и с математической точки зрения, пока, по-видимому, не существует [10]. Мы будем использовать следующее определение так называемого глобального аттрактора, которое наиболее употребительно в работах по математической физике: множество $A \subset H$ есть глобальный аттрактор полугруппы S^t в H , если оно есть наименьшее замкнутое инвариантное глобально притягивающее множество.

Итак, аттрактор в некотором смысле определяет поведение системы на больших временах t . Существование аттрактора удастся доказать для широкого класса диссипативных систем. Благодаря инвариантности мы можем сузить полугруппу S^t на аттрактор A и получить редуцированную динамику $S^t|_A$. К несчастью, в большинстве случаев аттрактор – негладкое множество, и даже не финитное объединение гладких подмногообразий. Следовательно, динамика S^t , суженная на аттрактор, не описывается, вообще говоря, системой дифференциальных уравнений.

В некоторых случаях удастся найти глобальное притягивающее инвариантное мно-

жество $M \subset H$, которое является гладким многообразием. Оно получило название инерциальной поверхности [9]. Такая поверхность не есть минимальное притягивающее множество, хотя и аттрактор, и даже любое инвариантное множество обязаны лежать в M . Зато редуцированная динамика $S^t|_M$, суженная на M , может быть определена с помощью системы дифференциальных уравнений. Эта редуцированная динамика получила название инерциальной динамики.

Отметим физическую интерпретацию этой динамики. Даже в бесконечномерной системе, если она диссипативна, может существовать конечное число “тайных мод”, определяющих поведение системы при $t \rightarrow \infty$. В большинстве случаев такие переменные, конечно, не могут быть найдены явно. В данной статье мы приведем примеры, когда это возможно.

Понятие инвариантной поверхности имеет смысл и для гамильтоновых систем. В частности, n -солитонное решение уравнения КдВ является примером инвариантной поверхности. Дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию параметров солитона, дают пример редуцированной динамики.

Исследование структуры глобального аттрактора или инерциальной динамики возможно только при существенных ограничениях на исследуемую динамическую систему. Аттрактор и поведение траекторий на больших временах описаны для систем, обладающих функцией Ляпунова (градиентно-подобных) и так называемых строго монотонных систем [6], [9], [11], [12].

Приведем два важных для дальнейшего примера. Первый пример дан знаменитой основополагающей моделью Хопфилда [13] теории нейронных сетей

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^N K_{ij} \operatorname{th} x_j - x_i + \theta_i, \quad (2.1)$$

где x_i – состояние i -го нейрона, N – число нейронов, K_{ij} – матрица связей, описывающая действие j -го нейрона на i -й и θ_i – параметры, называемые порогами (“threshold”). Совокупость параметров K , N , θ будем обозначать $\mathcal{P}$. Если матрица K симметрична, то эта система градиентно-подобна, т.е. существует функция $L(x)$ состояния $x = (x_1, \dots, x_N)$ системы, которая не возрастает на траекториях (2.1). Имеем $dL/dt \leq 0$, причем равенство выполнено тогда и только тогда, когда x является точкой равновесия x_{eq} (правая часть (2.1) равна нулю для всех i при $x = x_{\text{eq}}$). В случае “общего положения” аттрактор (2.1) может быть описан. Все траектории $x(t)$ стремятся к равновесиям $x(t) \rightarrow x_{\text{eq}}$ при $t \rightarrow \infty$. Число равновесий возрастает, вообще говоря, с ростом числа нейронов N . Отметим, что функция L имеет физический смысл энергии системы и что наиболее существенный вклад в L имеет вид $\sum_{ij} K_{ij} \operatorname{th}(x_i) \operatorname{th}(x_j)$.

Напомним, что означают слова “в случае общего положения”. Для каждого N множество параметров K , θ , для которых вышеприведенное описание поведения траекторий (2.1) может оказаться неверным, имеет меру ноль в пространстве параметров. Это можно показать с помощью теоремы Сарда.

Другой пример – это динамические системы, порожденные начально-краевыми задачами для параболических уравнений второго порядка, например,

$$\begin{aligned} u_t &= \epsilon^2 \Delta u + f(x, u, \nabla u), \\ u(x, 0) &= u^0(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $f \in C^2$. Такая задача порождает динамическую систему в банаховом пространстве $L_p(\Omega)$, выбор p зависит от f и n . Если решения априори ограничены в какой-либо слабой норме, то классические результаты показывают [6], что эта система диссипативна и обладает конечномерным глобальным аттрактором. Если f не зависит от ∇u , или пространственная размерность задачи n равна 1, то система (2.2) градиентно-подобна и, следовательно, к ней относится все сказанное выше о системе Хопфилда (все траектории конвергентны для случая общего положения [7], [12]). Если f зависит от ∇u и $n > 1$, то система принадлежит классу строго монотонных систем и можно утверждать, что почти все траектории конвергентны, т.е. сходятся к равновесиям $u_{\text{eq}}(x)$. Число таких равновесий и “сложность” (размерность) аттрактора растет при уменьшении ϵ . Для этого случая возможны хаотические режимы, однако они реализуемы для уравнений очень специального вида и специальных начальных данных (детали см. в [11], [12]).

Из этих примеров мы видим, что для того чтобы получить “сложное” поведение, устойчивое по отношению к малому возмущению системы, необходимо рассматривать нейронные сети (2.1) с несимметричными матрицами K и по крайней мере двухкомпонентные системы уравнений типа (2.2). Отметим, что в реальных биологических сетях матрицы K несимметричны и действительно наблюдаются периодические и хаотические колебания $x_i(t)$ [14].

Метод, позволяющий построить примеры диссипативных систем со сложным поведением, существенно использует идеи структурной устойчивости (грубости) и получил название метода реализации векторных полей [11].

Рассмотрим абстрактное эволюционное уравнение в гильбертовом (банаховом) пространстве H

$$\frac{dw}{dt} = Aw + F(w, \mathcal{P}), \quad w \in H, \quad (2.3)$$

где A – отрицательно определенный самосопряженный (возможно, неограниченный) оператор, нелинейный оператор F подчинен некоторым условиям, гарантирующим существование полугруппы S^t и $\mathcal{P}$ – параметры, от которых зависит F . Учитывая наличие параметров, можно сказать, что уравнение (2.3) определяет семейство полугрупп $S_{\mathcal{P}}^t$. Относительно любого параметра предполагаем, что он может иметь функциональную природу, т.е. также может принадлежать другому банаховому пространству B_p .

Наряду с (2.3) рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt} = Q(p), \quad Q \in C^1(B^n), \quad (2.4)$$

где $\mathcal{B}^n$ — единичный шар в пространстве R^n . Если при $|p| = 1$ векторное поле Q направлено внутрь сферы $\partial\mathcal{B}^n$, уравнения (2.4) определяют динамическую систему в шаре.

Следуя работам [2], [11], [12], сформулируем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы скажем, что предписанная динамика (2.4) может быть *почти реализована* системой (2.3), если для любого положительного числа δ можно выбрать параметры $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n, Q, \delta)$ так, что:

1) существует инерциальная поверхность $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \subset H$, имеющая вид

$$w = W_{\mathcal{P}}(p), \quad (2.5)$$

где $p \rightarrow W_{\mathcal{P}}(p)$ есть некоторое C^1 -отображение из шара $\mathcal{B}^n$ в H ;

2) на этой поверхности редуцированная динамика $S_{\mathcal{P}}^t|_{\mathcal{M}_{\mathcal{P}}}$ определена уравнением

$$\frac{dp}{dt} = \tilde{Q}(p, \mathcal{P}), \quad \tilde{Q} \in C^1(\mathcal{B}^n), \quad (2.6)$$

и выполнена оценка

$$|Q - \tilde{Q}|_{C^1(\mathcal{B}^n)} < \delta. \quad (2.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мы скажем, что семейство полугрупп (2.3), зависящее от параметра, *реализует все* и обладает максимальной динамической сложностью, если каждая динамика (2.4) для каждой размерности n может быть почти реализована этим семейством полугрупп.

Другими словами, с помощью параметров $\mathcal{P}$ динамика (2.6) на $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ может быть определена с произвольной точностью.

Отметим некоторые следствия. Если система (2.3) реализует все, то можно показать, что в некотором смысле ее динамика неограниченно сложна. Именно, с точностью до гомеоморфизма все классы топологически эквивалентных структурно-устойчивых аттракторов могут быть реализованы такими системами. Напомним, что структурная устойчивость системы (2.4) означает, что (для достаточно малых δ) δ -малое в норме C^1 возмущение правой части системы (2.4) не меняет топологической структуры ее траекторий [10]. Это означает, что аттрактор A_{δ} возмущенной системы (2.4) топологически эквивалентен исходному аттрактору A системы (2.4). Следовательно, аттрактор (2.3) лежит на инерциальной поверхности и динамика на нем топологически эквивалентна динамике (2.4) в A .

Итак, системы, реализующие все, генерируют все топологические классы структурно-устойчивых динамик. В этом смысле можно сказать, что эти системы обладают максимальной динамической сложностью. Более того, мы имеем возможность управлять этой динамикой с помощью параметров системы.

Отметим, что такой подход в какой-то мере позволяет избавиться от трудности, связанной с существованием в литературе большого числа определений хаоса. Независимо от используемого определения, если хаос структурно-устойчив (а это, как известно, вполне возможно [10]), данный топологический тип хаоса возникает в нашей системе.

3. НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ХОПФИЛДА – СИСТЕМА С ДИНАМИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ МАКСИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

Оказывается, что модель Хопфилда (2.1) – простейший пример системы, которая реализует все [2]. Сначала заметим, что система (2.1) действительно диссипативна. В качестве поглощающего множества можно взять множество $\|x\| < R$, где R зависит от параметров $\mathcal{P} = (N, K, \theta)$.

Чтобы доказать, что система (2.1) реализует все, зафиксируем некоторое произвольное n из (2.4) и покажем, что (2.1) генерирует все n -мерные динамики (2.4). Сделаем подстановку $K_{ij} = \sum_{s=1}^n A_{is} B_{sj}$, где A, B – новые неизвестные матрицы и A выберем так, что $A_{is} = \delta_{is}$ при $i \leq n$. Эта подстановка позволяет ввести “тайные” переменные q_i , определяющие динамику на больших временах. Чтобы показать это, сделаем замену $x \rightarrow (q, z)$, где $q_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $z_i = q_i - \sum_s A_{is} q_s$, $i = n+1, \dots, N$. После простых вычислений имеем [2]

$$\frac{dz_i}{dt} = -z_i + \theta_i, \quad \frac{dq}{dt} = \Phi_{\mathcal{P}}(q, z), \quad q = (q_1, \dots, q_n), \quad (3.1)$$

где индекс $\mathcal{P}$ указывает на зависимость векторного поля Φ от параметров A, B, N, θ . Первое уравнение в (3.1) показывает, что инерциальная поверхность задается соотношениями $z_i = \theta_i$. Тогда инерциальная динамика будет определена вторым уравнением в (3.1), куда надо подставить $z = \theta$. Удастся показать [2], что n -мерные векторные поля $\Phi_{\mathcal{P}}(q, \theta)$ на шаре $\mathcal{B}^n$ всюду плотны в множестве всех C^1 -гладких векторных полей на этом шаре. Это и доказывает, что система Хопфилда реализует все (детали см. в [2]).

4. СИСТЕМА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАКСИМАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТЬЮ

Рассмотрим в двумерном прямоугольнике $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ следующую начально-краевую задачу:

$$u_t = \Delta u + w(x)u + f_0(x, y) + f_1(x, y)v, \quad u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad (4.1)$$

$$v_t = \Delta v - a^2 v + g(x, y) \operatorname{th} u, \quad v(x, y, 0) = v^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (4.3)$$

где функции f_i, g и w лежат в $C^2(\Omega)$, $a > 0$. Параметрами задачи будем считать эти коэффициенты $\mathcal{P} = (f_i, g, w, a)$.

Можно показать, что задача (4.1)–(4.3) поставлена корректно и определяет диссипативную полугруппу [2] S^t в пространствах Соболева. Системы такого типа могут возникать в теории образования структур и теории фазовых переходов. Оказывается, что данная диссипативная система имеет инерциальную поверхность, инерциальную динамику и реализует все [2].

Для дальнейшего распространения подхода на гамильтоновы системы важно обсудить физические идеи, лежащие в основе конструкции этой системы (детальное доказательство содержится в [2]). Мы выбираем параметры задачи (4.1)–(4.3) так, чтобы инерциальная динамика описывалась явно и сводилась к системе Хопфилда.

Основная идея состоит во введении вспомогательного малого параметра ϵ и выборе специального потенциала $w = W(x, \epsilon)$ такого, что оператор $L_\epsilon u = \Delta u + W u$ будет иметь N хорошо локализованных потенциальных ям и соответственно – почти собственных функций $\psi_i(x - x_i, \epsilon)$. Эти функции локализованы около точек x_i : $\psi_i(x - x_i, \epsilon) < C \exp(-c\epsilon^{-1}|x - x_i|)$ и удовлетворяют соотношению $A_\epsilon \psi_i = h_\epsilon$, где $h_\epsilon < C \exp(-c\epsilon^{-1}|x - x_i|)$. Собственные функции A_ϵ , ортогональные всем ψ_i , имеют собственные числа, отделенные интервалом $O(1)$ от мнимой оси.

Структура решения такова. Если коэффициенты g и f_i малы, порядка $O(\epsilon^\kappa)$ с некоторым показателем $\kappa > 0$, то для малых ϵ имеем

$$u = \sum_{i=1}^m q_i(t) \psi_i(x, \epsilon) + \tilde{u} = U(x, q(t), \epsilon) + \tilde{u}, \quad (4.4)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\tilde{u}$ – малая поправка, $\|\tilde{u}\| < c\epsilon^{\kappa_1}$, $\kappa_1 > 0$. Функция v есть $V + \tilde{v}$, где $V(x, y, q)$ – решение краевой задачи

$$\Delta V - a^2 V + g(x, y, \epsilon) \Phi(U(x, q, \epsilon)) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 \quad (4.5)$$

и $\tilde{v}$ – малая поправка, $\|\tilde{v}\| < c\epsilon^{\kappa_2}$, $\kappa_2 > 0$.

Для функций $q_i(t)$ имеем систему уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \langle f_0 + f_1 v, \psi_i \rangle, \quad (4.6)$$

где $\langle f, g \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Оказывается, что если выбрать коэффициенты f_i и g в виде хорошо локализованных гауссовых пиков, система (4.6) с точностью до малых поправок сводится к уравнениям Хопфилда (2.1) [2].

Эта математическая конструкция имеет простую физическую интерпретацию. Построенное решение описывает медленную временную эволюцию амплитуд $q_i(t)$ локализованных мод. Взаимодействие между этими модами возникает следующим образом. Член $g\Phi(u)$ задает малые локализованные неоднородности в нелинейной среде. Эти неоднородности приводят к взаимодействию локализованных мод ψ_i через промежуточное поле v . Такое взаимодействие является сильно нелокальным, таким же, как взаимодействие нейронов в сети Хопфилда.

Замечательным свойством систем (2.1) и (4.1)–(4.3) является то, что можно предсказывать топологическую структуру их динамики с помощью их параметров.

5. УСЛОЖНЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ МОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ

5.1. Общие идеи подхода. Центральным вопросом, на который мы собираемся далее ответить, таков: существуют ли бесконечномерные гамильтоновы системы со сложной динамикой, управляемой параметрами системы? Напомним, что многие классические уравнения математической физики (КдВ, НУШ и др.) могут быть рассмотрены как бесконечномерные гамильтоновы системы. Сейчас (как в конечномерном, так и в бесконечномерном случаях) развита, в основном, теория систем, близких к интегрируемым.

Наш план состоит в рассмотрении слабозвмущенных интегрируемых бесконечномерных гамильтоновых систем. В этом случае можно ожидать, что динамика локализованных мод, например, солитонов или линейных мод, в первом приближении должна быть определена некоторыми редуцированными гамильтонианами с конечным числом степеней свободы.

Ниже мы приводим простейшую систему типа слабонелинейной струны, в которой в зависимости от выбора малого возмущения и коэффициентов редуцированный гамильтониан имеет вид

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^m p_j^2 + \omega^2 q_j^2 + \epsilon \tilde{H}(q), \quad (5.1)$$

где p, q – сопряженные переменные, $q = (q_1, \dots, q_m)$, $\tilde{H}(q)$ – полином по q_i . Данный гамильтониан описывает динамику слабого взаимодействия локализованных мод на большом интервале времени $O(\epsilon^{-1})$. Малый параметр ϵ характеризует величину нелинейного возмущения в струне.

В последние десятилетия системы типа (5.1) интенсивно исследовались. Теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ-теория) позволяет описать поведение решений. Для конечного числа степеней свободы $m > 1$ здесь исследованы такие нетривиальные эффекты, как гомоклинические траектории, расщепление сепаратрис, диффузия Арнольда, образование стохастической паутины [15]. Считается, что эти эффекты ведут к хаосу.

Мы хотим доказать, что в динамике нелинейной струны может возникать широкий класс возмущенных гамильтонианов вида (5.1). Именно, в зависимости от параметров струны здесь возникают все возможные полиномиальные возмущения $\tilde{H}(q)$ следующего вида:

$$\tilde{H}(q) = \sum_{n=3}^p \sum_{\mathbf{i}} C_{i_1, i_2, \dots, i_n, n} q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_n}, \quad (5.2)$$

где во внутренней сумме $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ – мультииндекс такой, что $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$. Это означает, что можно изменять гамильтонову динамику взаимодействия локализованных мод в весьма широком диапазоне, изменяя параметры системы (в качестве параметров здесь выступают W_δ и $F(x, u)$, см. формулу (5.3) ниже). Такое свойство данного класса гамильтоновых систем мы предлагаем рассмотреть как аналог свойства максимальной сложности динамики для диссипативных систем. Отметим, что существенные

результаты о сложном поведении решений для возмущенного уравнения КдВ были получены еще в работе [16], однако рассмотренные там возмущения были диссипативными и задавались сложными нелокальными функционалами. В отличие от упомянутой работы мы рассматриваем гамильтоновы системы с полиномиальными нелинейностями.

5.2. Модель. Рассмотрим следующую модель струны с линейными и нелинейными дефектами:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + W_\delta(x)u = \epsilon F(x, u), \quad (5.3)$$

где $x \in R$, потенциал $W_\delta(x) \in C^\infty$ зависит от второго малого параметра δ . Построение W_δ дано ниже. Члены $W_\delta u$ и F описывают линейные и нелинейные дефекты в струне, $F(x, u)$ – полином по u с быстро убывающими по x коэффициентами, не содержащий линейных членов, $F(x, u) = O(u^2)$ при $u \rightarrow 0$. Система (5.3) гамильтонова с бесконечным числом степеней свободы.

Сперва мы опишем асимптотику (при фиксированном малом δ и $\epsilon \rightarrow 0$) решений (5.3). Отметим, что гиперболические нелинейные уравнения хорошо изучены [17].

5.3. Построение решения. Обозначим через L оператор Шредингера

$$Lu = -c^2 u_{xx} + W_\delta(x)u. \quad (5.4)$$

Предположим, что функция $W_\delta - \delta^{-2}$ из класса Шварца $S(R)$. Кроме того, предположим, что этот оператор имеет конечное число локализованных “главных” собственных функций $\Psi_i(x) \in L_2(R)$, где $i = 1, 2, \dots, N$, с собственными значениями $\omega_i^2 = O(1) > 0$, в то время как весь остальной спектр (дискретный и непрерывный) лежит в интервале $(c\delta^{-2}, \infty)$, где $c > 0$ и не зависит от δ при малых δ . Мы можем предположить, не ограничивая общности, что функции Ψ_j ортонормальны. При $x \rightarrow \infty$ функции Ψ_i экспоненциально убывают по x как $\exp(-\kappa_i|x|)$, где $c^2\kappa_i^2 = \delta^{-2} - \omega_i^2$.

Такой потенциал с заданными $\omega_1, \dots, \omega_N$ легко построить, представляя W_δ в виде суммы хорошо разделенных потенциальных ям. По существу, эта же идея использована и в работе [2]. Простой пример сингулярного потенциала с похожими свойствами возникает в механике [18].

Для построения W_δ рассмотрим сначала потенциал $W(x)$ такой, что $(W - 1) \in S(R)$ и он имеет минимум при $x = 0$. Можно построить этот не зависящий от δ потенциал W таким образом, что соответствующий оператор L будет иметь наименьшее собственное значение, равное нулю, и весь остальной спектр будет лежать в интервале $(2\lambda_1, \infty)$, $\lambda_1 > 0$. Далее, можно добавить к W малое возмущение $O(\delta^2)$ из класса Шварца такое, что оператор L будет иметь наименьшее собственное значение $\delta^2\omega^2$ и весь остальной спектр будет принадлежать интервалу (λ_1, ∞) . Построенный таким образом потенциал W обозначим через $\widetilde{W}_\omega$. После этого возьмем произвольные точки $x_1, x_2, \dots, x_N$ и построим W_δ в окрестности каждой точки как $\delta^{-2}\widetilde{W}_{\omega_i}((x - x_i)/\delta)$. Склеим полученные потенциалы так, чтобы получить с точностью до $O(\exp(-cd\delta^{-1}))$ постоянный потенциал для x таких, что $\min_i |x - x_i| > d > 0$ [2]. Можно показать, что тогда при достаточно малом δ мы будем иметь оператор L с описанными выше свойствами.

Решение (5.3) для малых $\epsilon \ll \delta$ будем искать в виде

$$u(x, t) = U_0(x, q(t)) + \epsilon \tilde{u}(x, t), \quad (5.5)$$

где

$$U_0(x, q) = \sum_{j=1}^N q_j \Psi_j(x) \quad (5.6)$$

есть вклад главных локализованных мод с амплитудами q_j и $\tilde{u}$ есть поправка такая, что

$$\mathbf{P} \tilde{u} = 0. \quad (5.7)$$

Здесь $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j$ является ортогональной проекцией на “главный” дискретный спектр, операторы $\mathbf{P}_j$ определены с помощью соотношений $\mathbf{P}_j u = \langle u, \Psi_j \rangle \Psi_j$. Пусть оператор $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$. Тогда этот оператор представляет собой проектор на ортогональное дополнение к Ψ_j . Подставляя (5.5) в (5.3) и действуя на обе части получившегося уравнения проекторами $\mathbf{P}_j$ и $\mathbf{Q}$, находим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} + \omega_j^2 q_j = \langle F(x, U_0(x, q) + \tilde{u}), \Psi_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.8)$$

$$\tilde{u}_{tt} + L\tilde{u} = \mathbf{Q}F(x, U_0(x, q(t)) + \tilde{u}). \quad (5.9)$$

Первый шаг в решении системы (5.8), (5.9) состоит в исключении $\tilde{u}$ из (5.8) на большом интервале времени длиной порядка ϵ^{-1} . Это, как показано ниже, может быть сделано строго.

Для описания решений второго уравнения этой системы введем банахово пространство B_s функций $u(x)$, $x \in R$, с ограниченной нормой

$$|u|_s = \max \left\{ \sup_{k \in R} (1 + |k|)^s |\hat{u}_k|, \max_l |\hat{u}_l| \right\}, \quad (5.10)$$

где $\hat{u}_k, \hat{u}_l$ — коэффициенты Фурье разложения $\tilde{u}$ по собственным функциям оператора L . Здесь индекс l пробегает некоторое дискретное множество, соответствующее дискретным собственным функциям, не входящим в набор выделенных выше главных мод Ψ_j . Параметр k пробегает вещественную ось $(-\infty, \infty)$ и соответствует функциям непрерывного спектра. В качестве фазового пространства для задачи (5.8), (5.9) выберем пространство $H_{s,T}$, состоящее из пар непрерывных по t функций $(q(t), \tilde{u}(t))$, где $t \in [0, T]$, $\tilde{u}(t) \in B_s$ и $\mathbf{Q}\tilde{u} = 0$ с нормой

$$\|(q, u)\|_s = \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{u}(t)|_s + \sup_{t \in [0, T]} |q(t)|. \quad (5.11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *При достаточно малом T существует ограниченное в норме $C^{2,2}$ классическое решение системы (5.8), (5.9).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем систему (5.8), (5.9) в виде интегральных уравнений для коэффициентов Фурье. Например, для $\hat{u}_k$ имеем

$$\begin{aligned}\hat{u}_k(t) &= b_k \cos(\omega(k)t + \beta_k) + \epsilon \omega^{-1}(k) \int_0^t \sin(\omega(k)(t - t_1)) \widehat{\tilde{F}}_k(t_1) dt_1, \\ \omega^2(k) &= \delta^{-2} + c^2 k^2,\end{aligned}\quad (5.12)$$

где b_k определены начальными данными, $\tilde{F} = \mathbf{Q}F$. Нетрудно показать, что пространство B_s с нормой $\|\cdot\|_s$ при $s > 5$ образует банахову алгебру относительно умножения и что оно вложено в $C^2(R)$. Поскольку B_s – алгебра, то мы имеем, используя наши предположения на F , следующую оценку коэффициентов Фурье:

$$|\widehat{\tilde{F}}_k(t_1)| < C_s (1 + |k|)^{-s} (|\widehat{F}_{0_k}(t_1)| + P(|\tilde{u}|_s)), \quad (5.13)$$

где $F_0 = \mathbf{Q}F(x, U_0(q))$, $P(z)$ – полином такой, что $P = O(z)$ при $z \rightarrow 0$. Аналогичная оценка имеется для $\tilde{u}_l$ (без множителя $(1 + |k|)^{-s}$). Взяв теперь достаточно большое R , можно показать с помощью оценки (5.13), что для малых T интегральный оператор K , определенный правой частью (5.12), является сжимающим и отображает шар радиуса R в $H_{s,T}$ в себя. Следовательно, обобщенное решение $(q, \tilde{u}) = K(q, \tilde{u})$ существует (оно удовлетворяет интегральному уравнению по времени вместо дифференциального). В действительности $t \rightarrow q(t) \in C^2$, и отображение $t \rightarrow \tilde{u}(t) \in B_s$ также дважды дифференцируемо по времени. Можно показать с помощью теорем вложения, что эти временные производные лежат в C^2 при $s > 5$. Итак, классическое решение нашей задачи существует на достаточно малом интервале времени. Предложение 5.1 доказано.

5.4. Вывод упрощенных гамильтоновых уравнений для q_j . Наши предположения о разделении спектра L на главные моды и спектр, отделенный от мнимой оси, играют решающую роль в доказательстве следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *При достаточно малом ϵ и $|\tilde{u}(\cdot, 0)|_s < c\epsilon$, $|\tilde{u}_t(\cdot, 0)|_s < c\epsilon$ на временах $0 < t < c\epsilon^{-1}$ имеет место оценка*

$$\sup_x |\tilde{u}(x, t)| \leq C_s |\tilde{u}(\cdot, t)|_s < C(F, s, W_\delta) \epsilon. \quad (5.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство в (5.14) – простая теорема вложения. Обозначим $X(t) = |\tilde{u}(\cdot, t)|_s$. Действуя как и при доказательстве предыдущего предложения, можно показать, что существует открытый интервал $I = (0, T_0)$ такой, что $|X(t)| \leq 1$ для $t \in I$. Следовательно, на интервале I имеет место неравенство

$$|\widehat{\tilde{F}}_k(t) - \widehat{F}_{0_k}(t)| < \tilde{C}_s (1 + |k|)^{-s} X(t), \quad (5.15)$$

где $F_0 = \mathbf{Q}F(x, U_0(q(t)))$. Основная проблема сводится к оценке членов

$$S_k = \omega^{-1}(k) \int_0^t \sin(\omega(k)(t - t_1)) \widehat{F}_{0_k}(t_1) dt_1. \quad (5.16)$$

Прежде всего, в уравнениях (5.8) для q_j перейдем к координатам действие – угол J_j, ϕ_j . Положим

$$q_j = J_j^{\frac{1}{2}}(t) \cos(\omega_j t + \phi_j(t)), \quad p_j = \omega_j J_j^{\frac{1}{2}}(t) \cos(\omega_j t + \phi_j(t)). \quad (5.17)$$

Тогда

$$\frac{dJ_j^{\frac{1}{2}}}{dt} = c_j \epsilon F_j \sin(\omega_j t + \phi_j(t)), \quad \frac{d\phi_j}{dt} = \tilde{c}_j J_j^{-\frac{1}{2}} \epsilon F_j \cos(\omega_j t + \phi_j(t)), \quad (5.18)$$

где $F_j = \langle F, \Psi_j \rangle$ и, следовательно,

$$|F_j| < c_2 \sup_x |F_0(x, U_0(x, q))| + c_3 |X| < c_4 \left(\sup_x |F_0(x, U_0(x, q))| + 1 \right) \quad (5.19)$$

на интервале I . Оценка (5.19) показывает, что функция $F_0(x, t)$ имеет следующий вид:

$$F_0(x, t) = \sum_n f_n(x) P_n(t, \tau), \quad \tau = \epsilon t, \quad (5.20)$$

где каждое f_n лежит в классе Шварца и P_n – полином по $\cos \omega_j t, \sin \omega_j t$ с коэффициентами, зависящими от медленного времени τ . Используем теперь наши предположения о виде спектра оператора L для оценки интеграла (5.16) по t_1 от F_0 . Если δ мало и

$$T_0 < c_5 \epsilon^{-1}, \quad (5.21)$$

то этот интеграл допускает оценку $O(1)$ (при $\epsilon \rightarrow 0$). Следовательно, при $t \in [0, \min\{T_0, c_5 \epsilon^{-1}\}]$ имеем

$$X(t) \leq \epsilon C_F + \epsilon C_1 \int_0^t X(t_1) dt_1 \quad (5.22)$$

для положительной функции $X(t)$. Из этого интегрального неравенства следует, что

$$X(t) \leq \epsilon \tilde{C}_F < 1 \quad (5.23)$$

при $t \in [0, \min\{T_0, c_5 \epsilon^{-1}\}]$. Оценка (5.23) показывает при малых ϵ , что $T_0 = c_5 \epsilon^{-1}$. Это завершает доказательство предложения 5.2.

Доказанный результат позволяет при $t = O(\epsilon^{-1})$ положить $\tilde{y} = 0$ в (5.8). Тогда, вводя потенциал $\Phi(x, u)$ с помощью соотношения $\Phi_u(x, u) = F(x, u)$ и полагая

$$\tilde{H}_F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, U_0(x, q)) dx, \quad (5.24)$$

получаем, что уравнения (5.8) имеют гамильтонову структуру с гамильтонианом вида (5.1).

5.5. Конструкция нелинейной струны с предписанной гамильтоновой динамикой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Если частоты ω_i находятся “в общем положении”, то каково бы ни было полиномиальное возмущение $\tilde{H}(q)$ вида (5.2), найдется такое полиномиальное по аргументу u возмущение F в (5.3), что $\tilde{H}_F(q) = \tilde{H}(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на специальном выборе функции $\Phi = \sum_{n=0}^p f_n(x)u^{n+2}$. Положим

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} Y_{kn} \delta_1 \rho \left(\frac{x - \bar{x}_{kn}}{\delta_1} \right), \quad (5.25)$$

где $\rho(z)$ – положительная гладкая функция с носителем в $(-1, 1)$, интеграл от которой равен 1, δ_1 – малый параметр, Y_{kn} – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Число M_n равно числу мультииндексов $\mathbf{i}$ длины n (см. формулу (5.2)). Точки $\bar{x}_{kn} > 0$ выберем так, чтобы можно было заменить собственную функцию Ψ_j на ее экспоненциальную асимптотику. Заметим теперь, что

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \Psi_{i_1}(x) \Psi_{i_2}(x) \dots \Psi_{i_n}(x) dx.$$

Следовательно, коэффициенты Y_{kn} могут быть определены для каждого n из линейной алгебраической системы M_n уравнений относительно M_n неизвестных Y_{kn} . При нашем выборе точек $\bar{x}_{kn}$ и малом δ_1 эта система уравнений с точностью до малых поправок принимает вид

$$\sum_k^{M_n} \exp(-\theta_{\mathbf{i}}) Y_{kn} = B_{\mathbf{i}, n}, \quad (5.26)$$

где, как и в (5.2), сумма берется по M_n мультииндексам длины n , правые части $B_{\mathbf{i}, n}$ пропорциональны заданным коэффициентам $C_{\mathbf{i}, n}$ и показатели $\theta_{\mathbf{i}}$ определены соотношениями

$$c^2 \theta_{\mathbf{i}}^2 = \sum_{k=1}^n \delta^{-2} - \omega_{i_k}^2. \quad (5.27)$$

Согласно КАМ-теории все показатели $\theta_{\mathbf{i}}$ различны для различных мультииндексов $\mathbf{i}$, если частоты ω_{i_k} находятся “в общем положении” (напомним, что $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$). Эти частоты могут быть выбраны произвольными за счет выбора потенциала W_δ . Но тогда определитель системы (5.26) будет являться определителем Вандермонда и не будет равен нулю. Это показывает возможность нахождения неизвестных коэффициентов Y_{kn} и заканчивает доказательство предложения 5.3.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что как в диссипативных, так и в консервативных нелинейных распределенных системах взаимодействие между локализованными модами может быть очень сложным. Подбирая соответствующим образом неоднородность среды, можно получить любую структурно-устойчивую динамику в случае

диссипативных систем и любой полиномиальный гамильтониан в консервативном случае. Таким образом, для некоторых классов нелинейных распределенных систем (как гамильтоновых, так и диссипативных) динамика может быть неограниченно сложной и, кроме того, контролируемой параметрами системы.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ, грант № 99-01-00694.

Список литературы

- [1] *S. A. Vakulenko.* Annales de L'Institut H. Poincaré Physique Théorique. 1997. V. 66. P. 373.
- [2] *S. A. Vakulenko.* Advances in Differential Equations. 2000. V. 5. P. 1739.
- [3] *Г. Николис, И. Пригожин.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
- [4] *H. Haken.* Synergetic, An Introduction, 3rd ed. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer, 1983.
- [5] *Y. Kuramoto.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
- [6] *О. А. Ладыженская.* УМН. 1987. Т. 42. Вып. 6. С. 25.
- [7] *J. K. Hale.* Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. Providence: American Mathematical Society, 1988.
- [8] *A. B. Babin, M. I. Vishik.* J. Math. Pures Appl. 1983. V. 62. P. 441.
- [9] *P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam.* Integrable Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Differential Equations. New-York: Springer, 1989.
- [10] *Ю. Ильяшенко, Вейгу Ли.* Нелокальные бифуркации. М.: МЦНМО, 1999.
- [11] *P. Poláčik.* J. Diff. Equations. 1995. V. 119. P. 24.
- [12] *E. N. Dancer, P. Poláčik.* Memoirs of Amer. Math. Society. 1999. V. 140. № 668. P. 1.
- [13] *J. J. Hopfield.* Proc. of Natl. Acad. USA. 1982. V. 79. P. 2554.
- [14] *R. Edwards.* Math. Meth. Appl. Sci. 1996. V. 19. P. 651.
- [15] *Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников.* УФН. 1988. Т. 156. Вып. 2. С. 193.
- [16] *Н. В. Николенко.* УМН. 1980. Т. 35. С. 121.
- [17] *J. Bourgain.* Nonlinear Schrödinger equations. In: Hyperbolic Equations and Frequency Interactions. IAS/PARC City Mat. Ser. 5. Eds. L. Caffarelli et al. Providence, RI: AMS, 1999. P. 3.
- [18] *A. K. Abramyán.* J. of Technical Acoustic. 1995. V. 2. № 3. P. 5.

Поступила в редакцию 24.V.2001 г.