Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Ольшанецкий, В. К. Рогов, Унитарные представления квантовой группы Лоренца и квантовая релятивистская цепочка Тоды, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 3, 355–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:30:47

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАНТОВОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И КВАНТОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЦЕПОЧКА ТОДЫ

В статье дана теоретико-групповая интерпретация трех типов q -функций Бесселя. Рассматривается семейство квантовых групп Лоренца и семейство квантовых пространств Лобачевского. Для трех значений параметра квантового пространства Лобачевского операторы Казимира отвечают гамильтонианам двухчастичной релятивистской открытой цепочки Тоды, собственными функциями которых являются модифицированные q -функции Бесселя трех типов. Строится основная серия унитарных неприводимых представлений квантовых групп Лоренца. Специальные матричные элементы в неприводимых пространствах представляют собой q -функции Макдональда и являются волновыми функциями двухчастичной релятивистской открытой цепочки Тоды. Получены интегральные представления этих функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует глубокая связь между гармоническим анализом на симметрических пространствах и квантовыми интегрируемыми системами [1]. При этом зональные сферические функции играют роль волновых функций некоторых интегрируемых моделей. Например, функции Бесселя являются зональными сферическими функциями, относящимися к группе симметрий евклидовых пространств [2]. С другой стороны, они являются волновыми функциями рациональной модели Калоджеро–Мозера.

Модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда возникают при другом подходе. Рассмотрим собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами в орисферических координатах на пространстве Лобачевского. Модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда являются их преобразованиями Фурье на орисфере [2]. С точки зрения интегрируемых систем оператор Лапласа–Бельтрами в орисферических координатах появляется в случае простейшей формы гамильтониана открытой цепочки Тоды. Костант обобщил эту связь и установил простые соотношения между открытой

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: olshanet@heron.itep.ru

†Московский государственный университет путей сообщения, Москва, Россия.
E-mail: vrogov@cemi.rssi.ru

цепочкой Тоды и моделью Уиттекера неприводимых представлений расщепимой простой группы G [3] (см. также обзоры [4], [5]). Эту конструкцию можно обобщать различными способами. Например, периодическая цепочка Тоды возникает, если вместо простой группы G рассматривать центральное расширение группы петель [6], [7].

Зональные сферические функции для квантовых групп исследовались в ряде работ (см. [8], [9]). В частности, q -функции Бесселя были описаны Ваксманом и Корогодским [10] как зональные сферические функции, относящиеся к квантовой плоскости.

В статье [11] мы применили схему Костанта к квантовой группе Лоренца, построенной Подлешом и Вороновичем [12]. Оказалось, что соответствующая интегрируемая система представляет собой открытую двухчастичную релятивистскую цепочку Тоды [13]. Ее гамильтониан связан с оператором Казимира квантовой группы Лоренца, записанным в системе координат, аналогичной описферической, на соответствующем квантовом пространстве Лобачевского. С точностью до q -экспоненциального множителя собственными функциями являются модифицированные q -функции Бесселя и q -функции Макдональда. Их свойства были изучены в работах [14]–[16]. Для полных квантовых групп аналог модели Уиттекера был построен в [17], [18]. Недавно интегральные представления для волновых функций в N -частичном случае (эти функции лежат в основе модели Уиттекера $\mathcal{U}_q(SL(N, \mathbb{R}))$) были даны в [19].

В данной статье вновь будет подробно исследован двухчастичный случай. В основе анализа лежит модель Уиттекера для квантовой группы Лоренца $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$. Таким образом, мы даем теоретико-групповую интерпретацию модифицированных q -функций Бесселя и q -функций Макдональда. Для этого строятся унитарные неприводимые представления семейства твистованных квантовых групп Лоренца. Заодно нами получены некоторые результаты гармонического анализа на квантовых пространствах Лобачевского, играющих роль однородных пространств по отношению к твистованным квантовым группам Лоренца. Три члена семейства выделены. В этих трех случаях операторы Казимира на квантовых пространствах Лобачевского приводят к разностным операторам второго порядка. С точностью до сопряжения они совпадают с квантовыми гамильтонианами релятивистской двухчастичной открытой цепочки Тоды. Их собственные функции суть три типа q -функций Бесселя. Мы строим аналог основной серии унитарных неприводимых представлений. Затем рассматриваются некоторые специальные матричные элементы групповых элементов, действующих в неприводимом пространстве представлений класса 1. Эти матричные элементы являются волновыми функциями цепочки Тоды и имеют вид двойного интеграла. Из результатов статьи [15] следует, что они являются q -функциями Макдональда.

В разделе 2 мы напоминаем соотношения между группой Лоренца $SL(2, \mathbb{C})$ и двухточечной открытой моделью Тоды. В разделе 3 построено твистованное семейство квантовых групп Лоренца и соответствующее семейство квантовых пространств Лобачевского. Основная серия унитарных неприводимых представлений введена в разделе 4. Собственные функции операторов Казимира на квантовом пространстве Лобачевского исследуются в разделе 5. Интегральные представления волновых функций для откры-

той модели Тоды указаны в разделе 6. В разделе 7 мы даем представление волновых функций в виде интеграла Меллина–Бернса. Подобное представление было получено в работе [19].

2. КЛАССИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

2.1. Группа Лоренца. Матричная группа Лоренца – это группа комплексных унитарных матриц второго порядка

$$G = SL(2, \mathbb{C}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Ее алгебра Ли имеет три генератора

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{2} \operatorname{diag}(1, -1), \quad f = e'$$

с коммутационными соотношениями

$$[e, f] = 2h, \quad [h, e] = e, \quad [h, f] = -f.$$

Они порождают алгебру $sl(2, \mathbb{R})$ над $\mathbb{R}$ и алгебру $sl(2, \mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$. Как вещественная алгебра, алгебра $sl(2, \mathbb{C})$ порождается шестью генераторами, и ее можно рассматривать как алгебру $sl(2, \mathbb{R})$ и второй ее экземпляр, порожденный генераторами $(\bar{e}, \bar{h}, \bar{f})$.

2.2. Основная серия [20]. Основная серия $\pi_{\nu, n}$ унитарных представлений группы $G = SL(2, \mathbb{C})$ определяется следующим образом. Пусть N^- – подгруппа нижних треугольных матриц, A – вещественные диагональные матрицы и M – унитарные диагональные матрицы. Борелевская подгруппа B в G ,

$$B = N^- AM, \quad b = v \operatorname{diag}(h, h^{-1}) \operatorname{diag}(e^{2\pi i \theta}, e^{-2\pi i \theta}), \quad v \in N^-,$$

имеет характеры

$$\chi_{\nu, n}(v a m) = \exp[(i\nu - 1) \ln h + n\theta].$$

Основная серия представлений $\pi_{\nu, n}$ группы G индуцируется характерами подгруппы B в пространстве гладких функций на G ,

$$f(bg) = \chi_{\nu, n}(b)f(g), \quad \pi_{\nu, n}(g)f(x) = f(xg), \quad x \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (2.1)$$

Другими словами, мы определяем действия в пространстве сечений линейного расслоения над $\mathbf{P}^1$. В самом деле, рассмотрим гауссово разложение плотного подмножества $\{g \mid \alpha \neq 0\} \subset SL(2, \mathbb{C})$, $G = BN$, N – нильпотентная подгруппа верхних треугольных матриц,

$$g = bn(g), \quad n_{12}(g) = z = \frac{\beta}{\alpha}, \quad b_{11} = \alpha. \quad (2.2)$$

Формулы (2.2) означают, что правое действие (2.1) группы $SL(2, \mathbb{C})$ индуцирует преобразование Мёбиуса на $\mathbf{P}^1$

$$z \rightarrow zg = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \alpha}.$$

Рассмотрим линейное расслоение $\mathcal{L}_{\nu, n}$ над $\mathbf{P}^1$ с пространством сечений

$$V_{\nu, n} = \Gamma(\mathcal{L}_{\nu, n}) \sim \mathcal{A}^{(-\frac{r}{2}, -\frac{\tilde{r}}{2})}(\mathbf{P}^1), \quad r = i\nu + n - 1, \quad \tilde{r} = i\nu - n - 1. \quad (2.3)$$

Сечения имеют вид $f(z, \bar{z})(dz)^{-r/2}(d\bar{z})^{-\tilde{r}/2}$, где $f(z, \bar{z})$ является гладкой функцией с асимптотическим поведением

$$f(z, \bar{z})|_{z \rightarrow \infty} \sim z^r \bar{z}^{\tilde{r}}. \quad (2.4)$$

С помощью (2.2) можно сузить действие $\pi_{\nu, n}$ (2.1) на $V_{\nu, n}$ (2.3),

$$\pi_{\nu, n}(g)f(z, \bar{z}) = (\gamma z + \alpha)^{i\nu+n-1}(\bar{\gamma}\bar{z} + \bar{\alpha})^{i\nu-n-1}f(zg, \bar{z}\bar{g}). \quad (2.5)$$

Так как $\bar{r} + \tilde{r} = -2$, существует эрмитова форма на $\mathcal{A}^{(-\frac{r}{2}, -\frac{\tilde{r}}{2})}(\mathbf{P}^1)$ вида

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_{\mathbf{P}^1} f_1(z, \bar{z}) \overline{f_2(z, \bar{z})} dz d\bar{z}. \quad (2.6)$$

Представление $\pi_{\nu, n}$ (2.5) реализуется в $V_{\nu, n}$ унитарными операторами, так как

$$\langle \pi_{\nu, n}(g)f_1 | f_2 \rangle = \langle f_1 | \pi_{\nu, n}(g^{-1})f_2 \rangle.$$

Инфинитезимальная версия этой конструкции имеет вид

$$\begin{aligned} e \rightarrow T^+ &= \partial_z, & h \rightarrow T^3 &= -z\partial_z + \frac{r}{2}, \\ f \rightarrow T^- &= -z^2\partial_z + rz, & r &= n - 1 + i\nu; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{e} \rightarrow \bar{T}^+ &= \partial_{\bar{z}}, & \bar{h} \rightarrow \bar{T}^3 &= -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \frac{\tilde{r}}{2}, \\ \bar{f} \rightarrow \bar{T}^- &= -\bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + \tilde{r}\bar{z}, & \tilde{r} &= -n - 1 + i\nu. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Действия этих операторов сохраняют асимптотику (2.4).

Имеются два оператора Казимира на $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\Omega = h^2 + h + fe, \quad \tilde{\Omega} = \bar{h}^2 + \bar{h} + \bar{f}\bar{e}.$$

Они являются скалярными операторами в $V_{\nu, n}$,

$$\Omega|\Psi\rangle = \left[\frac{1}{4}(i\nu + n)^2 - \frac{1}{4}\right]|\Psi\rangle, \quad \tilde{\Omega}|\Psi\rangle = \left[\frac{1}{4}(i\nu - n)^2 - \frac{1}{4}\right]|\Psi\rangle, \quad |\Psi\rangle \in V_{\nu, n}. \quad (2.9)$$

Если $n = 0$, то в $V_{\nu, 0}$ существует вектор, инвариантный относительно $SU(2)$ и имеющий вид $(1 + |z|^2)^{i\nu-1}$.

2.3. Пространство Лобачевского. Один класс рассмотренных представлений $r = i\nu - 1$ ($n = 0$) (представления класса 1) связан с разложением функций на пространстве Лобачевского $\mathbf{L}^3 = SU(2) \backslash SL(2, \mathbb{C})$. Последнее может быть реализовано как пространство эрмитовых положительно определенных матриц второго порядка. Любая точка $x \in \mathbf{L}^3$ представляется в виде

$$x = g^\dagger g = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}\alpha + \bar{\gamma}\gamma & \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta \\ \bar{\beta}\alpha + \bar{\delta}\gamma & \bar{\beta}\beta + \bar{\delta}\delta \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Разложение Ивасавы

$$g = kb, \quad g \in SL(2, \mathbb{C}), \quad k \in SU(2), \quad b \in AN$$

позволяет ввести орисферические координаты в $\mathbf{L}^3$. Если

$$b = \begin{pmatrix} h & hz \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix},$$

то из (2.10) следует, что

$$x = b^\dagger b = \begin{pmatrix} \bar{h}h & \bar{h}hz \\ \bar{z}\bar{h}h & \bar{z}\bar{h}hz + (\bar{h}h)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Тройка чисел $(H = \bar{h}h, z, \bar{z})$ однозначно определяется точкой x . Эти числа называются орисферическими координатами x . Из (2.10) и (2.11) следует, что

$$H = \bar{\alpha}\alpha + \bar{\gamma}\gamma, \quad Hz = \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta, \quad \bar{z}H = \bar{\beta}\alpha + \bar{\delta}\gamma.$$

Рассмотрим пространство гладких комплекснозначных интегрируемых функций $\mathcal{R}_{\mathbf{L}} = \{f(H, z, \bar{z})\}$ на $\mathbf{L}^3$ таких, что

$$\int |f(H, z, \bar{z})|^2 H dH dz d\bar{z} < \infty. \quad (2.12)$$

Операторы Ли, порожденные правыми сдвигами, действуют в $\mathcal{R}_{\mathbf{L}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} e &\rightarrow \mathcal{D}^+ = \partial_z, \\ h &\rightarrow \mathcal{D}^3 = \frac{1}{2}H\partial_H - z\partial_z, \\ f &\rightarrow \mathcal{D}^- = Hz\partial_H - z^2\partial_z + H^{-2}\partial_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Операторы $\bar{e}$, $\bar{h}$, $\bar{f}$ определяются комплексно-сопряженными операторами

$$\begin{aligned} \bar{e} &\rightarrow \bar{\mathcal{D}}^+ = \partial_{\bar{z}}, \\ \bar{h} &\rightarrow \bar{\mathcal{D}}^3 = \frac{1}{2}H\partial_H - \bar{z}\partial_{\bar{z}}, \\ \bar{f} &\rightarrow \bar{\mathcal{D}}^- = H\bar{z}\partial_H - \bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + H^{-2}\partial_z. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Рассмотрим семейство V_ν , $\nu \in \mathbb{R}$, подпространств в $\mathcal{R}_L$,

$$V_\nu = \{f(\bar{z}, aH, z) = a^{(i\nu-1)} f(\bar{z}, H, z)\}.$$

Предположим, что операторы e, h, f действуют в пространстве голоморфных (не зависящих от $\bar{z}$) функций, а операторы $\bar{e}, \bar{h}, \bar{f}$ действуют в пространстве антиголоморфных функций. Сравнивая (2.13) и (2.14) с (2.7) и (2.8), приходим к выводу, что $V_\nu = V_{\nu,0}$. Инвариантный интеграл (2.12) совпадает с эрмитовой формой (2.6) в неприводимом подпространстве.

Операторы Казимира в орисферической системе координат принимают вид

$$\Omega = \frac{1}{4}H^2\partial_H^2 + \frac{3}{4}H\partial_H + H^{-2}\partial_{\bar{z}\bar{z}}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega. \quad (2.15)$$

В соответствии с (2.9) они являются скалярными операторами в V_ν ,

$$\Omega|_{V_\nu} = -\frac{1}{4}(\nu^2 + 1) \text{Id}.$$

2.4. Функции Уиттекера. Пусть $U_{\nu,\mu} = \{f_\nu(\bar{z}, H, z)\}$ — пространство гладких функций на L^3 , удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $f_\nu(\bar{z}, H, z)$ являются собственными функциями оператора Казимира (2.15),

$$\Omega f_\nu(\bar{z}, H, z) = -\frac{1}{4}(\nu^2 + 1)f_\nu(\bar{z}, H, z);$$

2) $\partial_z f(\bar{z}, H, z) = i\mu f(\bar{z}, H, z)$, $\partial_{\bar{z}} f(\bar{z}, H, z) = i\mu f(\bar{z}, H, z)$.

Условие 2 означает, что

$$f_\nu(\bar{z}, H, z) = \exp i\mu(z + \bar{z})F_\nu(H).$$

Подставляя это выражение в условие 1, получим уравнение

$$\left(\frac{1}{4}H^2\partial_H^2 + \frac{3}{4}H\partial_H - H^{-2}\mu^2\right)F_\nu(H) = -\frac{1}{4}(\nu^2 + 1)F_\nu(H). \quad (2.16)$$

Два линейно независимых решения этого уравнения являются модифицированными функциями Бесселя $H^{-1}I_{\pm i\nu}(2\mu H^{-1})$. Ограниченным решением является функция Макдональда

$$H^{-1}K_{i\nu}(2\mu H^{-1}) = H^{-1} \frac{\pi(I_{-i\nu}(2\mu H^{-1}) - I_{i\nu}(2\mu H^{-1}))}{2i \operatorname{sh} \nu}. \quad (2.17)$$

Последнее выражение позволяет найти асимптотическое поведение решения при $H \rightarrow 0$,

$$K_{i\nu}(2\mu H^{-1}) \sim \frac{\pi}{2i \operatorname{sh} \nu} \left[\frac{1}{\Gamma(1 - i\nu)} \left(\frac{H}{2}\right)^{-i\nu} - \frac{1}{\Gamma(1 + i\nu)} \left(\frac{H}{2}\right)^{i\nu} \right].$$

Ограниченное решение (2.17) может быть представлено как специальный матричный элемент оператора

$$g(T^3 | \varphi) = \exp 2(T^3 \otimes \varphi) \in \mathcal{U}(SL(2, \mathbb{C})) \otimes \mathcal{A}_L, \quad H = e^\varphi, \quad (2.18)$$

который является специальным групповым элементом в тензорном произведении универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(SL(2, \mathbb{C}))$ и групповой алгебры $\mathcal{A}_L$. Он действует в неприводимом пространстве V_ν . Определим два вектора ψ_L, ψ_R следующим образом:

$$T^+ \psi_R = i\mu \psi_R, \quad \bar{T}^+ \psi_R = i\mu \psi_R, \quad (T^+ - \bar{T}^-) \psi_L = (T^3 - \bar{T}^3) \psi_L = 0.$$

Это означает, что вектор ψ_R является собственным вектором нильпотентной подгруппы N , а вектор ψ_L является $SU(2)$ -инвариантным вектором. Состояние ψ_R называется *вектором Уиттекера*. Тогда из (2.7) и (2.8) следует, что

$$\psi_R = \exp i\mu(z + \bar{z}) \quad (2.19)$$

и

$$\psi_L = \frac{1}{(1 + |z|^2)^{1-i\nu}}. \quad (2.20)$$

На самом деле вектор ψ_R не лежит в V_ν , а является обобщенной функцией над некоторым подпространством в V_ν . Тем не менее интеграл

$$\langle \psi_L | g(T^3 | \varphi) | \psi_R \rangle \quad (2.21)$$

определен (см. (2.6)). Эта конструкция может быть обобщена на любую расщепимую группу [3], [4]. Ограниченное решение называется *функцией Уиттекера*.

Докажем, что матричный элемент (2.21) является решением $F_\nu(H)$ уравнения (2.16). Действительно, принимая во внимание, что $g(T^3 | \varphi)T^- = e^{2\varphi}T^-g(T^3 | \varphi)$, имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(\nu^2 + 1)\langle \psi_L | g(T^3 | \varphi) | \psi_R \rangle &= \langle \psi_L | g(T^3 | \varphi) \Omega |_{V_\nu} | \psi_R \rangle = \\ &= \left(\frac{1}{4}H^2 \partial_H^2 + \frac{3}{4}H \partial_H \right) \langle \psi_L | g(T^3 | \varphi) | \psi_R \rangle + \langle \psi_L | g(T^3 | \varphi) T^- T^+ | \psi_R \rangle. \end{aligned}$$

Тогда условия (2.19), (2.20) и коммутационное соотношение $H \partial_H g(T^3 | \varphi) = g(T^3 | \varphi) T^3$ дают

$$\langle \psi_L | g(T^3 | \varphi) T^- T^+ | \psi_R \rangle = -\mu^2 H^{-2} \langle \psi_L | g(T^3 | \varphi) | \psi_R \rangle,$$

что и доказывает выполнимость уравнения (2.16).

Подставляя выражения (2.18)–(2.20) в (2.21), находим ограниченное решение уравнения (2.16),

$$\begin{aligned} \langle \psi_L | g(T^3 | \varphi) | \psi_R \rangle &= \exp((i\nu + 1)\varphi) \iint d\bar{z} dz \frac{\exp(i\mu(z + \bar{z}))}{(1 + e^{2\varphi}|z|^2)^{1+i\nu}} \sim \\ &\sim H^{-1} K_{i\nu}(2\mu H^{-1}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Переходя к полярной системе координат и интегрируя по углу, последнюю формулу можно переписать в виде

$$H^{-1}K_{i\nu}(2\mu H^{-1}) = \Gamma(1+i\nu)H^{-i\nu-1} \int_0^\infty \frac{J_0(2\mu\rho)\rho}{(H^{-2}+\rho^2)^{1+i\nu}} d\rho. \quad (2.23)$$

Сделаем в (2.16) подстановку $F_\nu(H) = e^{-\varphi}\Phi_\nu(\varphi)$. Тогда уравнение (2.16) примет вид квантового уравнения Лиувилля

$$\left(\frac{1}{4}\partial_\varphi^2 - \mu^2 e^{-2\varphi}\right)\Phi_\nu(\varphi) = -\frac{1}{4}\nu^2\Phi_\nu(\varphi). \quad (2.24)$$

Уравнение (2.16) особенно просто выглядит в импульсном представлении. Положим $HF_\nu(H) = \Phi_\nu(\varphi)$ и сделаем преобразование Фурье

$$\psi_\nu(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \Phi_\nu(\varphi) e^{ip\varphi} d\varphi.$$

Уравнение (2.16) для функции $\psi_\nu(p)$ принимает вид

$$\frac{1}{4}(\nu^2 - p^2)\psi_\nu(p) - \mu^2\psi_\nu(p - 2i) = 0.$$

Ограниченным решением этого уравнения, стремящимся к нулю при $p \rightarrow \pm\infty$, является функция

$$\psi_\nu(p) = a(\nu)\mu^{ip}\Gamma\left(\frac{i}{2}(p+\nu)\right)\Gamma\left(\frac{i}{2}(p-\nu)\right). \quad (2.25)$$

3. КВАНТОВАЯ ГРУППА ЛОРЕНЦА

3.1. Общая конструкция. Деформации групповой алгебры $\mathcal{A}(SL(2, \mathbb{C}))$, основанные на разложениях Ивасава и Гаусса, были рассмотрены в работах [12] и [21]. Позже трехпараметрические деформации были представлены в [22]. Здесь мы рассматриваем дуальный объект $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$ и описываем двухпараметрическое семейство $\mathcal{U}_q^{(r,s)}(SL(2, \mathbb{C}))$.

Мы начинаем с пары стандартных алгебр Хопфа $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R}))$. Первая алгебра порождается генераторами A, B, C, D и единицей с соотношениями

$$\begin{aligned} AD &= DA = 1, & AB &= qBA, & BD &= qDB, \\ AC &= q^{-1}CA, & CD &= q^{-1}DC, \\ [B, C] &= \frac{1}{q - q^{-1}}(A^2 - D^2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Это алгебра Хопфа с коумножением

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= A \otimes A, & \Delta(D) &= D \otimes D, \\ \Delta(B) &= A \otimes B + B \otimes D, \\ \Delta(C) &= A \otimes C + C \otimes D, \end{aligned} \quad (3.2)$$

коединицей

$$\varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и антиподом

$$S \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -q^{-1}B \\ -qC & A \end{pmatrix}.$$

Вторая алгебра $\mathcal{U}_q^*(SL(2, \mathbb{R}))$ порождается генераторами A^*, B^*, C^*, D^* , коммутирующими с A, B, C, D . Коумножение для генераторов со звездочкой определяется условием $(\Delta(X^*)) = (\Delta(X))^*$, а антипод выводится из правила $S \circ * \circ S \circ * = \text{Id}$. Пара двух независимых экземпляров $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R}))$ и $\mathcal{U}_q^*(SL(2, \mathbb{R}))$, которые коммутируют и кокоммутируют, определяет нетвистованную версию квантовой алгебры Лоренца $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$. Заметим, что эта форма отличается от конструкций Ивасавы [21] и Гаусса [22].

Квантовая подалгебра $\mathcal{U}_q(SU(2))$ [23] определяется следующим образом:

$$\mathcal{U}_q(SU(2)) = \{B^* = C, C^* = B, A^* = A\}. \quad (3.3)$$

Имеются два элемента Казимира в $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$, которые коммутируют с любым $u \in \mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$,

$$\Omega_q := \frac{(q^{-1} + q)(A^2 + A^{-2}) - 4}{2(q^{-1} - q)^2} + \frac{1}{2}(BC + CB), \quad (3.4)$$

$$\tilde{\Omega}_q := \frac{(\bar{q}^{-1} + q)((A^*)^2 + (A^*)^{-2}) - 4}{2(\bar{q}^{-1} - \bar{q})^2} + \frac{1}{2}(B^*C^* + C^*B^*). \quad (3.5)$$

Мы будем использовать элемент Казимира в виде

$$\Omega_q = \frac{qA^2 + q^{-1}A^{-2} - 2}{(q - q^{-1})^2} + CB. \quad (3.6)$$

Для дальнейшего, следуя Дринфельду [24], введем зависящий от двух параметров твист в форме [25]. Пусть $A = q^K$, $A^* = \bar{q}^{K^*}$ и

$$\mathcal{F}(r, s) = q^{rK^* \otimes K + K \otimes sK^*} \in \mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R})) \otimes \mathcal{U}_q^*(SL(2, \mathbb{R})).$$

Элемент $\mathcal{F}(r, s)$ является так называемым левым твистом алгебры $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R}))$, так как он удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} \otimes 1)(\Delta \otimes \text{Id})\mathcal{F} &= (1 \otimes \mathcal{F})(\text{Id} \otimes \Delta)\mathcal{F}, \\ (\varepsilon \otimes \text{Id})\mathcal{F} &= 1 = (\text{Id} \otimes \varepsilon)\mathcal{F}. \end{aligned}$$

Эти условия позволяют вывести новое коумножение из старого, $\Delta^{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}$. В нашем случае

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}}(A) &= \Delta(A) = A \otimes A, \\ \Delta^{\mathcal{F}}(B) &= (A^*)^{-r}A \otimes B + B \otimes D(A^*)^s, \\ \Delta^{\mathcal{F}}(C) &= (A^*)^rA \otimes C + C \otimes D(A^*)^{-s}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Антипод изменяется в соответствии с новым коумножением,

$$m(S^{\mathcal{F}} \otimes \text{Id})\Delta^{\mathcal{F}}(u) = m(\text{Id} \otimes S^{\mathcal{F}})\Delta^{\mathcal{F}}(u) = \varepsilon(u),$$

где m означает умножение. Таким образом,

$$S^{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -q^{-1}(A^*)^{r-s}B \\ -q(A^*)^{s-r}C & A \end{pmatrix}.$$

Так мы получаем твистованную алгебру $\mathcal{U}_q^{\mathcal{F}}(SL(2, \mathbb{R}))$. Алгебра $U_q^{*\mathcal{F}}(SL(2, \mathbb{R}))$ с элементом $\mathcal{F}$, зависящим от той же пары параметров (r, s) , может быть построена аналогично,

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}}(A^*) &= \Delta(A^*) = A^* \otimes A^*, \\ \Delta^{\mathcal{F}}(B^*) &= A^{-r}A^* \otimes B^* + B^* \otimes D^*A^s, \\ \Delta^{\mathcal{F}}(C^*) &= A^rA^* \otimes C^* + C^* \otimes D^*A^{-s}, \\ S^{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D^* & -\bar{q}A^{r-s}B^* \\ -\bar{q}^{-1}A^{s-r}C^* & A^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пара $\mathcal{U}_q^{\mathcal{F}}(SL(2, \mathbb{R}))$ и $\mathcal{U}_q^{*\mathcal{F}}(SL(2, \mathbb{R}))$ образует семейство коммутативных, некокоммутативных квантовых алгебр Лоренца $\mathcal{U}_q^{(r,s)}(SL(2, \mathbb{C}))$. В частности, при $r = 1, s = 1$ эти дуальные объекты являются гауссовой формой квантовой алгебры Лоренца [21].

3.2. Квантовое пространство Лобачевского. Квантовое пространство Лобачевского $\mathbf{L}_{\kappa, q}$ — это ассоциативная $*$ -алгебра над $\mathbb{C}$ с единицей и тремя образующими (z^*, H, z) , $H^* = H$, $(z)^* = z^*$, $1^* = 1$. Коммутационные соотношения зависят от двух параметров $\kappa, q \in \mathbb{C}$,

$$zH = \kappa Hz, \quad z^*H = \bar{\kappa}^{-1}Hz^*, \quad (3.9)$$

$$zz^* = az^*z - bH^{-2}, \quad a = \left(\frac{\kappa}{q}\right)^2, \quad b = \bar{\kappa}^{-1} \left(\frac{\kappa}{q}\right)^2 \left(1 - q^2 \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right). \quad (3.10)$$

Оба параметра должны быть подобраны таким образом, чтобы коэффициенты a, b в (3.10) были вещественными. Это может быть в следующих двух случаях:

- 1) κ и q вещественны;
- 2) $|q| = 1$ и $\text{Arg}(q) = \text{Arg}(\kappa)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пространство $\mathbf{L}_{\kappa, q}$ является правым $\mathcal{U}_q^{(0,s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим правое действие $\mathcal{U}_q^{(0,s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ на $\mathbf{L}_{\kappa,q}$ соотношениями

$$\begin{aligned} z^*.A &= z^*, & H.A &= q^{\frac{1}{2}}H, & z.A &= q^{-1}z, \\ z^*.A^* &= \left(\frac{\kappa}{q}\right)^{\frac{2}{s}}z^*, & H.A^* &= \left(\frac{q}{\kappa}\right)^{\frac{1}{s}}H, & z.A^* &= z, \\ z^*.B &= 0, & H.B &= 0, & z.B &= q^{-\frac{1}{2}}, \\ z^*.C &= q^{\frac{3}{2}}\kappa^{-1}H^{-2}, & H.C &= Hz, & z.C &= -q^{\frac{1}{2}}z^2, \\ x.B^* &= 0, & x.C^* &= 0 & \text{для любого } x \in \mathbf{L}_{\kappa,q}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Левые действия A^*, A, B^*, C^* имеют вид

$$\begin{aligned} A^*.z^* &= \bar{q}^{-1}z^*, & A^*.H &= \bar{q}^{\frac{1}{2}}H, & A^*.z &= z, \\ A.z^* &= z^*, & A.H &= \left(\frac{\bar{q}}{\kappa}\right)^{\frac{1}{s}}H, & A.z &= \left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{q}}\right)^{\frac{2}{s}}z, \\ B^*.z^* &= \bar{q}^{-\frac{1}{2}}, & B^*.H &= 0, & B^*.z &= 0, \\ C^*.z^* &= -\bar{q}^{\frac{1}{2}}(z^*)^2, & C^*.H &= z^*H, & C^*.z &= \bar{q}^{\frac{3}{2}}\bar{\kappa}^{-1}H^{-2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Коумножение в $\mathcal{U}_q^{(0,s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ (3.7), (3.8) согласовано с правилами умножения в $\mathbf{L}_{\kappa,q}$ (3.9), (3.10). Также согласованы $*$ -структуры в $\mathbf{L}_{\kappa,q}$ и в $\mathcal{U}_q^{(0,s)}(SL(2, \mathbb{C}))$. Это означает, что действия (3.11) и (3.12) связаны соотношением

$$(x.K)^* = K^*.x^*$$

для $K = A, B, C$ и $x = z^*, H, z$.

Для того чтобы исключить неоднозначность, связанную с некоммутативностью в $\mathbf{L}_{\kappa,q}$, будем рассматривать только упорядоченные мономы, записывая z^* слева, z справа и оставляя H в середине монома, т.е.

$$: f(z^*, H, z) := \sum_{m,k,n} c_{m,k,n} w(m, k, n), \quad w(m, k, n) = z^{*m} H^k z^n. \quad (3.13)$$

Действия (3.11), (3.12) на $w(m, k, n)$ принимают вид

$$\begin{aligned} w(m, k, n).A &= q^{-n+\frac{k}{2}}w(m, k, n), & w(m, k, n).A^* &= \left(\frac{q}{\kappa}\right)^{\frac{-2m+k}{s}}w(m, k, n), \\ w(m, k, n).B &= q^{-n+\frac{k+1}{2}}\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}w(m, k, n-1), \\ w(m, k, n).C &= q^{n-\frac{3(k-1)}{2}}\kappa^{k-1}\frac{1-q^{2m}}{1-q^2}w(m-1, k-2, n)- \\ &\quad - q^{-n+\frac{k+3}{2}}\frac{1-q^{2n-2k}}{1-q^2}w(m, k, n+1); \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
A^*.w(m, k, n) &= \bar{q}^{-m+\frac{k}{2}} w(m, k, n), \quad A.w(m, k, n) = \left(\frac{\bar{q}}{\bar{\kappa}}\right)^{\frac{-2n+k}{s}} w(m, k, n), \\
B^*.w(m, k, n) &= \bar{q}^{-m+\frac{k+1}{2}} \frac{1-\bar{q}^{2m}}{1-\bar{q}^2} w(m-1, k, n), \\
C^*.w(m, k, n) &= \bar{q}^{m-\frac{3(k-1)}{2}} \bar{\kappa}^{k-1} \frac{1-\bar{q}^{2n}}{1-\bar{q}^2} w(m, k-2, n-1) - \\
&\quad - \bar{q}^{-m+\frac{k+3}{2}} \frac{1-\bar{q}^{2m-2k}}{1-\bar{q}^2} w(m+1, k, n)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

и

$$\begin{aligned}
w(m, k, n). \Omega_q &= q^{-k+1} \frac{(1-q^{k+1})^2}{(1-q^2)^2} w(m, k, n) + \\
&\quad + q^{-k+1} \kappa^{k-1} \frac{(1-q^{2m})(1-q^{2n})}{(1-q^2)^2} w(m-1, k-2, n-1).
\end{aligned}$$

Определим разностные операторы $\mathcal{D}_{z^*}, \mathcal{D}_z$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{z^*} f(z^*, H, z) &= (z^*)^{-1} \frac{f(z^*, H, z) - f(q^2 z^*, H, z)}{1 - q^2}, \\
\mathcal{D}_z f(z^*, H, z) &= \frac{f(z^*, H, z) - f(z^*, H, q^2 z)}{1 - q^2} z^{-1}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}}_{z^*} f(z^*, H, z) &= (z^*)^{-1} \frac{f(z^*, H, z) - f(\bar{q}^2 z^*, H, z)}{1 - \bar{q}^2}, \\
\overline{\mathcal{D}}_z f(z^*, H, z) &= \frac{f(z^*, H, z) - f(z^*, H, \bar{q}^2 z)}{1 - \bar{q}^2} z^{-1}.
\end{aligned}$$

Тогда действия (3.14), (3.15) генераторов на упорядоченные функции могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
f(z^*, H, z).A &= f(z^*, q^{\frac{1}{2}} H, q^{-1} z), \quad f(z^*, H, z).A^* = f\left(\left(\frac{\kappa}{q}\right)^{\frac{2}{s}} z^*, \left(\frac{\kappa}{q}\right)^{\frac{1}{s}} H, z\right), \\
f(z^*, H, z).B &= q^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_z f(z^*, q^{\frac{1}{2}} H, q^{-1} z), \\
f(z^*, H, z).C &= q^{\frac{3}{2}} \kappa^{-1} \mathcal{D}_{z^*} f(z^*, q^{-\frac{3}{2}} \kappa H, q \kappa^2 z) H^{-2} + \\
&\quad + \frac{q^{\frac{3}{2}}}{1 - q^2} [f(z^*, q^{-\frac{3}{2}} H, q z) - f(z^*, q^{\frac{1}{2}} H, q z)] z - \\
&\quad - q^{\frac{3}{2}} \mathcal{D}_z f(z^*, q^{\frac{1}{2}} H, q^{-1} z) z^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

и

$$\begin{aligned}
A.f(z^*, H, z) &= f\left(z^*, \left(\frac{\bar{\kappa}}{bq}\right)^{\frac{1}{s}} H, \left(\frac{\bar{\kappa}}{q}\right)^{\frac{2}{s}} z\right), & A^*.f(z^*, H, z) &= f(\bar{q}^{-1} z^*, \bar{q}^{\frac{1}{2}} H, z), \\
B^*.f(z^*, H, z) &= \bar{q}^{\frac{1}{2}} \overline{\mathcal{D}}_{z^*} f(\bar{q}^{-1} z^*, \bar{q}^{\frac{1}{2}} H, z), \\
C^*.f(z^*, H, z) &= -\bar{q}^{\frac{3}{2}} (z^*)^2 \overline{\mathcal{D}}_{z^*} f(\bar{q}^{-1} z^*, \bar{q}^{\frac{1}{2}} H, z) + \\
&\quad + \frac{\bar{q}^{\frac{3}{2}}}{1 - \bar{q}^2} z^* [f(\bar{q} z^*, q^{-\frac{3}{2}} H, z) - f(\bar{q} z^*, \bar{q}^{\frac{1}{2}} H, z)] + \\
&\quad + \bar{q}^{\frac{3}{2}} \bar{\kappa}^{-1} H^{-2} \overline{\mathcal{D}}_z f(\bar{q} \bar{\kappa}^2 \kappa^2 z^*, \bar{q}^{-\frac{3}{2}} \bar{\kappa} H, z).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Заметим, что при $q \rightarrow 1$ мы приходим к соотношениям (2.13),

$$\partial_q A \rightarrow \mathcal{D}^3, \quad B \rightarrow \mathcal{D}^+, \quad C \rightarrow \mathcal{D}^-.$$

Функционал Хаара $I_{\mathbf{L}_{\kappa, q}}$ на $\mathbf{L}_{\kappa, q}$ — это отображение $\mathbf{L}_{\kappa, q} \rightarrow \mathbb{C}$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$I_{\mathbf{L}_{\kappa, q}}(f.u) = \varepsilon(u) I_{\mathbf{L}_{\kappa, q}}(f), \quad f \in \mathbf{L}_{\kappa, q}, \quad u \in \mathcal{U}_q^{(0, s)}(SL(2, \mathbb{C})).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Интеграл Джексона для упорядоченной функции $f(z^*, H, z)$*
(3.13)

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{L}_{\kappa, q}}(f) &= \iiint :f(z^*, H, z) d_q z^* H d_{q^{\frac{1}{2}}} H d_q z: = \\
&= (1 - q)^2 (1 - q^{\frac{1}{2}}) \sum_{s, r, t \in \mathbf{Z}} q^{s+r+t} [:f(q^s, q^{\frac{1}{2}r}, q^t): + :f(-q^s, q^{\frac{1}{2}r}, -q^t): + \\
&\quad + :f(q^s, q^{\frac{1}{2}r}, -q^t): + :f(-q^s, q^{\frac{1}{2}r}, q^t):]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

является функционалом Хаара на $\mathbf{L}_{\kappa, q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основным соотношением, которое должно быть использовано для проверки (3.16), является

$$\int f(qx) d_q x = q^{-1} \int f(x) d_q x.$$

Тогда утверждение предложения следует из определения действий (3.11). Кроме того, из (3.16), (3.17) мы делаем вывод, что интеграл (3.18) инвариантен относительно действия $f \rightarrow u^*.f$.

4. ОСНОВНАЯ СЕРИЯ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Основная серия представлений квантовой группы Лоренца рассматривалась в работах [26], [27]. Здесь мы даем формулы для операторов основной серии, вытекающие из действий операторов на квантовых пространствах Лобачевского. По этой причине мы забываем структуру коалгебры и потому используем обозначение $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$.

Рассмотрим то же пространство $V_{\nu, n}$, что и в классическом случае (2.3), но введем другую эрмитову форму

$$\langle f | g \rangle = q^{\frac{i\nu+n-1}{2}} \bar{q}^{\frac{i\nu-n+1}{2}} \iint \overline{(f(\bar{q}^{\frac{i\nu-n+1}{2}} \bar{z}, q^{\frac{i\nu+n-1}{2}} z))} g(\bar{q}^{\frac{i\nu-n+1}{2}} \bar{z}, q^{\frac{i\nu+n-1}{2}} z) d\bar{z} dz. \quad (4.1)$$

Определим действие представления π_ν алгебры $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$ на $V_{\nu, n}$. Предположим, что $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R}))$ действует только на голоморфную часть $V_{\nu, n}$, в то время как $\mathcal{U}_q^*(SL(2, \mathbb{R}))$ действует только на антиголоморфную часть. Следуя правилам раздела 3, будем записывать голоморфные действия справа, а антиголоморфные – слева. Правые действия имеют вид

$$\begin{aligned} f(z) \cdot \pi_\nu(A) &= q^{\frac{i\nu+n-1}{2}} f(q^{-1}z), \\ f(z) \cdot \pi_\nu(B) &= q^{\frac{i\nu+n}{2}} \frac{f(q^{-1}z) - f(qz)}{1 - q^2} z^{-1}, \\ f(z) \cdot \pi_\nu(C) &= \frac{z}{1 - q^2} \left[-q^{\frac{i\nu+n+2}{2}} f(q^{-1}z) + q^{-\frac{3(i\nu+n)}{2}+3} f(qz) \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Точно так же левые действия записываются в виде

$$\begin{aligned} \pi_\nu(A^*) \cdot f(\bar{z}) &= \bar{q}^{\frac{1}{2}(i\nu-n-1)} f(\bar{q}^{-1}\bar{z}), \\ \pi_\nu(B^*) \cdot f(\bar{z}) &= \bar{q}^{\frac{i\nu-n}{2}} \frac{f(\bar{q}^{-1}\bar{z}) - f(\bar{q}\bar{z})}{1 - \bar{q}^2} \bar{z}^{-1}, \\ \pi_\nu(C^*) \cdot f(\bar{z}) &= \frac{\bar{z}}{1 - \bar{q}^2} \left[-\bar{q}^{\frac{i\nu-n+2}{2}} f(\bar{q}^{-1}\bar{z}) + \bar{q}^{-\frac{3(i\nu-n)}{2}+3} f(\bar{q}\bar{z}) \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. 1. Операторы π_ν (4.2), (4.3) являются неприводимыми представлениями $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$.

2. При $\nu \in \mathbb{R}$ они унитарны относительно формы (4.1), т.е.

$$\begin{aligned} \langle g | f \cdot \pi_\nu(u) \rangle &= \langle \pi_\nu(S(u^*)) \cdot g | f \rangle, \\ g, f &\in V_{\nu, n}, \quad u \in \mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственные вычисления показывают, что операторы $\pi_\nu(u)$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и операторы u (3.1), (3.2), где $u = A, B, C, D$. Более того, действие представления π_ν сохраняет асимптотику (2.4).

Другим способом увидеть, что операторы представления π_ν удовлетворяют необходимым коммутационным соотношениям в случае $n = 0$, является рассмотрение подпространства $\tilde{V}_\nu$ на $\mathbf{L}_{\kappa,q}$ функций вида

$$f(z^*, cH, z) = c^{i\nu-1} f(z^*, H, z).$$

Другими словами, базисными функциями в $\tilde{V}_\nu$ являются функции $w(m, i\nu - 1, n) = (z^*)^m H^{i\nu-1} z^n$. Исходя из (3.14), (3.15) мы определим действия операторов из $\mathcal{U}_q^{(0,s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ в $\tilde{V}_\nu$ так, чтобы правые действия $\pi_\nu(A, B, C, A^*)$ не затрагивали z^* -переменные ($m = 0$ в (3.14)). Точно так же левые действия операторов $\pi_\nu(A^*, B^*, C^*, A)$ не должны затрагивать z -переменные ($n = 0$ в (3.15)). Тогда $\tilde{V}_\nu$ является инвариантным относительно π_ν . Так как зависимость от H является фиксированной, можно положить $H = 1$. Тогда мы получим представления (4.2) и (4.3), где V_ν определяется как $\tilde{V}_\nu|_{H=1}$.

Рассмотрим действия операторов Казимира (3.4), (3.5) на V_ν . Очевидно, они становятся скалярными операторами

$$\pi_\nu(\Omega) = \left(\left[-\frac{i\nu + n}{2} \right]_q \right)^2 \text{Id}, \quad \pi_\nu(\Omega^*) = \left(\left[-\frac{i\nu - n}{2} \right]_{\bar{q}} \right)^2 \text{Id}. \quad (4.4)$$

По этой причине представления π_ν неприводимы. Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Рассмотрим сначала действие оператора $\pi_\nu(A)$,

$$\begin{aligned} \int [f(z^*)]^* (g(q^{i\nu-1}z)) \cdot \pi_\nu(A) d_{q^2}z &= \int [f(z^*)]^* q^{\frac{i\nu-1}{2}} g(q^{i\nu-1}q^{-1}z) d_{q^2}z = \\ &= \int [q^{\frac{-i\nu+1}{2}} qf(qz)]^* g(q^{i\nu-1}z) d_{q^2}z = \int [q^{-\frac{i\nu-1}{2}} f(qz^*)]^* g(q^{i\nu-1}z) d_{q^2}z = \\ &= \int [\pi(S^{\mathcal{F}}A^*) \cdot f(z^*)]^* g(q^{i\nu-1}z) d_{q^2}z. \end{aligned}$$

Для $\pi_\nu(B)$ имеем

$$\begin{aligned} \int [(f(z^*))^*]^* (g(q^{i\nu-1}z)) \cdot \pi_\nu(B) d_{q^2}z &= \int [f(z^*)]^* q^{\frac{i\nu}{2}} \mathcal{D}_z g(q^{-1}q^{i\nu-1}z) d_{q^2}z = \\ &= - \int [q^{\frac{i\nu}{2}+1} \mathcal{D}_z^* f(q^{-1}z^*)]^* g(q^{i\nu-1}z) d_{q^2}z = \\ &= \int [\pi_\nu(S^{\mathcal{F}}B^*) \cdot f(z^*)]^* g(q^{i\nu-1}z) d_{q^2}z. \end{aligned}$$

Наконец, для $\pi_\nu(C)$

$$\begin{aligned} \int [f(z^*)]^* (g(q^{i\nu-1}z)) \cdot \pi_\nu(C) d_{q^2}z &= \\ &= \int [f(z^*)]^* \left[-q^{\frac{3}{2}i\nu} g(q^{i\nu-2}z) + q^{-\frac{1}{2}i\nu+2} g(q^{i\nu}z) \right] d_{q^2}z = \\ &= \int \left[-q^{-\frac{3}{2}i\nu+2} f(qz^*)z^* + q^{\frac{1}{2}i\nu} f(q^{-1}z^*)z^* \right]^* g(q^{i\nu-1}z) d_{q^2}z = \\ &= \int [\pi_\nu(S^{\mathcal{F}}C^*) \cdot f(z^*)]^* g(q^{i\nu-1}z) d_{q^2}z. \end{aligned}$$

В классическом пределе мы получаем основную серию представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ (2.7),

$$\begin{aligned}\lim_{q \rightarrow 1} \pi_\nu(B) &= T^+, & \lim_{q \rightarrow 1} \pi_\nu(C) &= T^+, \\ \lim_{q \rightarrow 1} f(z) \cdot \pi_\nu(A) &= (1 + T^3)f(z),\end{aligned}$$

а эрмитова форма (4.1) совпадает с классической формой (2.6).

Из (4.2) и (4.3) следует, что ν определяется с точностью до аддитивной константы. Два представления (ν, n) и (ν', n) являются эквивалентными, если

$$\nu' = \nu + \frac{4\pi m}{\hbar}, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad \hbar = \ln q,$$

и мы предположим, что

$$\nu \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \nu \leq \frac{4\pi}{\hbar}.$$

Случай $n = 0$ соответствует представлениям класса 1 в $V_{\nu,0} = V_\nu$. В доказательстве предложения (4.1) показано, что они связаны с квантовым пространством Лобачевского. Более того, как и в классическом пределе, существует $\mathcal{U}_q(SU(2))$ -инвариант в V_ν . Он будет найден в разделе 6.

5. q^2 -ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Здесь мы будем считать, что числа q и κ вещественны и $\kappa = q^\delta$.

Рассмотрим задачу о собственных функциях оператора Казимира (3.4),

$$f_\nu^{(\delta)}(z^*, H, z) \cdot \Omega_q = \left(\left[\frac{i\nu}{2} \right]_q \right)^2 f_\nu^{(\delta)}(z^*, H, z).$$

Вследствие этого $f_\nu^{(\delta)}(z^*, H, z) \in V_\nu$. Из (3.14) следует, что если

$$\Omega_q^\nu = \Omega_q - q^{-i\nu+2} \frac{(1 - q^{i\nu})^2}{(1 - q^2)^2},$$

то

$$\begin{aligned}w(m, k, n) \cdot \Omega_q^\nu &= \frac{q^{-k+1}(1 - q^{i\nu+k+1})(1 - q^{-i\nu+k+1})}{(1 - q^2)^2} w(m, k, n) + \\ &+ \frac{q^{(k-1)(\delta-1)}(1 - q^{2m})(1 - q^{2n})}{(1 - q^2)^2} w(m-1, k-2, n-1).\end{aligned} \quad (5.1)$$

Будем искать решение уравнения

$$f_\nu^{(\delta)}(z^*, H, z) \cdot \Omega_q^\nu = 0$$

в виде

$$f_{\nu}^{(\delta)}(z^*, H, z) = e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z^*)F_{\nu}^{(\delta)}(H)e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z),$$

где e_{q^2} — q^2 -экспонента

$$e_{q^2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q^2, q^2)_n} = \frac{1}{(x, q^2)_{\infty}}, \quad |x| < 1.$$

q^2 -Экспоненты $e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z^*)$ и $e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{z^*} e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z^*) &= i\mu e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z^*), \\ \mathcal{D}_z e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z) &= i\mu e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z), \end{aligned} \quad (5.2)$$

соответственно. Равенство (5.1) можно переписать как

$$\begin{aligned} e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z^*)H^k e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z) \cdot \Omega_q^{\nu} &= \\ = \frac{q^{-k+1}(1 - q^{i\nu+k+1})(1 - q^{-i\nu+k+1})}{(1 - q^2)^2} e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z^*)H^k e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z) + \\ + q^{(k-1)(\delta-1)} \mathcal{D}_{z^*} e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z^*)H^{k-2} \mathcal{D}_z e_{q^2}(i\mu(1 - q^2)z). \end{aligned}$$

Из последнего выражения и (5.2) следует, что $F_{\nu}^{(\delta)}(H)$ является решением разностного уравнения

$$\frac{qF_{\nu}^{(\delta)}(qH) - (q^{i\nu} + q^{-i\nu})F_{\nu}^{(\delta)}(H) + q^{-1}F_{\nu}^{(\delta)}(q^{-1}H)}{(1 - q^2)^2} - \mu^2 q^{-\delta-1} H^{-2} F_{\nu}^{(\delta)}(q^{\delta-1}H) = 0. \quad (5.3)$$

Подстановка $F_{\nu}^{(\delta)}(H) = H^{-1} \mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(H^{-1})$, $H^{-1} = x$ приводит к разностному уравнению для $\mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(x)$,

$$\mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(q^{-1}x) - (q^{i\nu} + q^{-i\nu})\mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(x) + \mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(qx) - \mu^2 q^{-2\delta} (1 - q^2)^2 x^2 \mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(q^{1-\delta}x) = 0. \quad (5.4)$$

Определим разностный оператор второго порядка

$$\Delta_q \psi(x) = \frac{\psi(qx) - 2\psi(x) + \psi(q^{-1}x)}{(q - q^{-1})^2}.$$

Тогда уравнение (5.4) принимает вид

$$\Delta_q \mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(x) - \mu^2 q^{-2\delta+2} x^2 \mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(q^{1-\delta}x) = \left(\left[\frac{i\nu}{2} \right]_q \right)^2 \mathcal{F}_{\nu}^{(\delta)}(x).$$

Оно в точности является дискретным аналогом уравнения Лиувилля (2.24), соответствующего случаю двухчастичной открытой релятивистской цепочки Тоды [13] с зависящим от параметра δ гамильтонианом

$$\hat{H} = -\Delta_q + \mu^2 q^{-2\delta+2} x^2 (T_q)^{1-\delta},$$

где T_q – оператор сдвига, $T_q \psi(x) = \psi(qx)$. Волновые функции этой системы находятся среди решений уравнения (5.4). Из (5.4) следует, что мы имеем разностное уравнение второго порядка лишь при трех значениях параметра $\delta = 0, 1, 2$. Другие случаи приводят нас к разностным уравнениям более высокого порядка. Поэтому будем рассматривать только эти три случая.

Пусть

$$\mathcal{F}_\nu^{(\delta)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (1-q^2)^{2k} (i\mu x)^{i\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k (q^{2i\nu+2}, q^2)_k}.$$

Тогда из (5.4) следует, что

$$a_k = (-1)^k q^{(2-\delta)k(k+i\nu)-k\delta},$$

и мы находим, что решениями являются q^2 -функции Бесселя

$$\begin{aligned} J_{i\nu}^{(j)}(2i\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) &= \\ &= \frac{q^{-\frac{1}{2}i\delta\nu}}{\Gamma_{q^2}(i\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{(2-\delta)k(k+i\nu)-k\delta} (1-q^2)^{2k} (i\mu x)^{i\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k (q^{2i\nu+2}, q^2)_k}, \end{aligned}$$

где

$$j = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta = 2, \\ 2 & \text{при } \delta = 0, \\ 3 & \text{при } \delta = 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

В работах [14], [15] были подробно описаны функции

$$I_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) = e^{\frac{1}{2}\nu\pi} J_{i\nu}^{(j)}(2i\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2),$$

которые при $j = 1$ соответствуют модифицированным q^2 -функциям Бесселя 1-го рода, при $j = 2$ – модифицированным q^2 -функциям Бесселя 2-го рода [28], при $j = 3$ – модифицированным q^2 -функциям Хана–Экстона [29].

Очевидно, функции $I_{-i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2)$ также являются решениями уравнения (5.4). Соответствующие вронскианы имеют вид

$$\begin{aligned} W^{(j)}(x; q^2) &= I_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) I_{-i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{1-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) - \\ &\quad - I_{-i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) I_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{1-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) = \\ &= \frac{1}{\Gamma_{q^2}(i\nu+1) \Gamma_{q^2}(-i\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{(2-\delta)k(k-i\nu)-k\delta} (1-q^2)^{2k} (\mu x)^{2k}}{(q^2, q^2)_k} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^k \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}_{q^2} \frac{q^{-2(2-\delta)n(k-n-i\nu)} (q^{-i\nu+2k-2n} - q^{i\nu+2n})}{(q^{2i\nu+2}, q^2)_n (q^{-2i\nu+2}, q^2)_n} \end{aligned} \quad (5.6)$$

при $i\nu \neq n$, n – целое число. Здесь

$$\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}_{q^2} = \frac{(q^2, q^2)_k}{(q^2, q^2)_n (q^2, q^2)_{k-n}}.$$

Внутренняя сумма в (5.6), которую мы обозначим через $S^{(\delta)}$, есть

$$S^{(\delta)} = \begin{cases} (-1)^k q^{-k(k+2i\nu-1)-i\nu}(1-q^{2i\nu}), & \delta = 0, \quad k \geq 0, \\ q^{-i\nu}(1-q^{2i\nu}), & \delta = 1, \quad k = 0, \\ 0, & \delta = 1, \quad k > 0, \\ -q^{-i\nu}(1-q^{2i\nu}), & \delta = 2, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$W^{(j)} = \begin{cases} \frac{q^{-i\nu}(1-q^{2i\nu})}{\Gamma_{q^2}(i\nu+1)\Gamma_{q^2}(-i\nu+1)} E_{q^2}(-4\mu^2(1-q^2)q^2 x^2), & \delta = 0, \\ \frac{q^{-i\nu}(1-q^{2i\nu})}{\Gamma_{q^2}(i\nu+1)\Gamma_{q^2}(-i\nu+1)}, & \delta = 1, \\ \frac{q^{-i\nu}(1-q^{2i\nu})}{\Gamma_{q^2}(i\nu+1)\Gamma_{q^2}(-i\nu+1)} e_{q^2}(4\mu^2(1-q^2)q^{-2}x^2), & \delta = 2. \end{cases}$$

Следовательно, модифицированные q^2 -функции Бесселя $I_{i\nu}^{(j)}$, $I_{-i\nu}^{(j)}$ образуют фундаментальную систему решений. Они не являются ограниченными, но наша цель – найти их линейную комбинацию, являющуюся ограниченным решением, так же как и в классическом случае (2.22).

6. q -ФУНКЦИИ УИТТЕКЕРА

В этом разделе, так же как и раньше, мы будем считать, что числа $\kappa = q^\delta$ и q вещественны.

Рассмотрим аналог группового элемента, определенного на $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C})) \otimes \mathbf{L}_{\kappa, q}^{(1)}$,

$$g(A | H) = e^{\mathcal{K} \otimes 2\phi}, \quad A = e^{\hbar \mathcal{K}}, \quad H = e^\phi, \quad \hbar = \ln q. \quad (6.1)$$

Действие $\pi_\nu(g(A | H))$ в V_ν (см. (4.2)) задается соотношением

$$\pi_\nu(g(A | H)): f(\bar{z}, z) \rightarrow H^{i\nu-1} f(\bar{z}, H^{-2}z). \quad (6.2)$$

Перепишем эрмитову форму (4.1) в виде

$$\langle f | g \rangle = q^{i\nu+n-1} \iint \overline{f(\bar{z}, z)} g(q^{i\nu-n+1}\bar{z}, q^{i\nu+n-1}z) d\bar{z} dz. \quad (6.3)$$

С помощью (6.3) определим матричный элемент $\pi_\nu(g(A, H))$ в V_ν ,

$$F_\nu^{(\delta)}(H) = \langle \psi_L | \psi_R \cdot g(A | H) \rangle = \langle S(g(A^* | H)) \cdot \psi_L | \psi_R \rangle. \quad (6.4)$$

Мы опускаем здесь и далее символ представления π_ν .

Пусть векторы $\psi_L, \psi_R \in V_\nu$ удовлетворяют условиям

$$C^* \cdot \psi_L(\bar{z}, z) = \psi_L(\bar{z}, z) \cdot B, \quad (6.5)$$

$$B^* \cdot \psi_R \cdot B = -\bar{\mu} \mu q^{1-\delta} \psi_R \cdot A^{2(\delta-1)}. \quad (6.6)$$

Используя соотношения (4.2), (4.3), получаем

$$B^* \cdot \psi_R(\bar{z}, z) \cdot B = -\bar{\mu} \mu q^{(i\nu-2)(\delta-1)} \psi_R(\bar{z}, q^{2-2\delta}z). \quad (6.7)$$

Следовательно, ψ_R можно рассматривать как квантовый вектор Уиттекера для $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$.

¹⁾Групповой элемент g определяется в тензорном произведении $\mathcal{U}_q \otimes \mathcal{A}_q$ и удовлетворяет условию $\Delta g \otimes \text{Id} = g_{12}g_{23}$ [30], [31].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Матричный элемент $F_\nu^{(\delta)}(H)$ удовлетворяет уравнению (5.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F_\nu^{(\delta)}(H)$ является матричным элементом в неприводимом пространстве V_ν , оператор Казимира Ω_q (3.6) действует как скалярный оператор (4.4)

$$\left\langle \psi_L \left| \psi_R.g(A | H) \left(\frac{qA^2 + q^{-1}A^{-2} - 2}{(q - q^{-1})^2} + CB \right) \right\rangle = \left[-\frac{i\nu}{2} \right]_q^2 \langle \psi_L | \psi_R.g(A | H) \rangle. \quad (6.8)$$

Из (6.1) следует, что

$$F_\nu^{(\delta)}(qH) = \langle \psi_L | \psi_R.g(A | H)A^2 \rangle. \quad (6.9)$$

Тогда A -зависимая составляющая в левой части этого уравнения сводится к разностному оператору второго порядка

$$\begin{aligned} F_\nu^{(\delta)}(H) \cdot \left(\frac{qA^2 + q^{-1}A^{-2} - 2}{(q - q^{-1})^2} \right) &= \left\langle \psi_L \left| \psi_R.g(A | H) \left(\frac{qA^2 + q^{-1}A^{-2} - 2}{(q - q^{-1})^2} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{qF_\nu(qH) - 2F_\nu(H) + q^{-1}F_\nu(q^{-1}H)}{(q - q^{-1})^2}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

С другой стороны, из (3.1) вытекает соотношение

$$g(A | H)C = CH^{-2}g(A | H).$$

Поэтому

$$\langle \psi_L | \psi_R.g(A | H)CB \rangle = H^{-2} \langle \psi_L | \psi_R.Cg(A | H)B \rangle.$$

Из (6.5) и унитарности относительно формы (6.3) мы имеем

$$\begin{aligned} \langle \psi_L | \psi_R.g(A | H)CB \rangle &= H^{-2} \langle S(C^*). \psi_L | (\psi_R.B).g(A | H) \rangle = \\ &= H^{-2} \langle \psi_L.S(B) | (\psi_R.B).g(A | H) \rangle = H^{-2} \langle \psi_L | (B^*. \psi_R.B).g(A | H) \rangle. \end{aligned}$$

Условия (6.7) и (6.9) позволяют переписать последнее выражение в виде

$$\begin{aligned} -\bar{\mu}\mu q^{1-\delta} H^{-2} \langle \psi_L | (\psi_R.A^{2(\delta-1)}).g(A | H) \rangle &= \\ = -\bar{\mu}\mu q^{1-\delta} H^{-2} \langle \psi_L | \psi_R.g(A | H)A^{2(\delta-1)} \rangle &= \\ = -\bar{\mu}\mu q^{1-\delta} H^{-2} \langle \psi_L | \psi_R.g(A | q^{\delta-1}H) \rangle = -\bar{\mu}\mu q^{1-\delta} H^{-2} F_\nu(q^{\delta-1}H). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_\nu^{(\delta)}(H).CB = -\bar{\mu}\mu q^{1-\delta} H^{-2} F_\nu(q^{\delta-1}H).$$

Подставляя это равенство и (6.10) в (6.8), мы приходим к (5.3).

СЛЕДСТВИЕ 6.1. $F_\nu^{(\delta)}(H)$ является собственной функцией сопряженного оператора Казимира Ω_q^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.4) следует, что

$$\Omega_q^*.F_\nu^{(\delta)}(H) = \left(\left[\frac{i\nu}{2} \right]_q \right)^2 F_\nu^{(\delta)}(H).$$

Так как

$$F_\nu^{(\delta)}(H) = (F_\nu^{(\delta)}(H))^* = \langle g(A^* | H). \psi_R^* | \psi_L^* \rangle,$$

то

$$\Omega_q^*.F_\nu^{(\delta)}(H) = \left\langle \left(\frac{(qA^*)^2 + q^{-1}(A^*)^{-2} - 2}{(q - q^{-1})^2} + B^*C^* \right) g(A^* | H). \psi_R^* \mid \psi_L^* \right\rangle.$$

Таким образом, мы можем использовать условия (6.5), (6.6), так как $(\psi.u)^* = u^*.\psi^*$.

Найдем явное выражение для матричного элемента (6.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Матричный элемент $F_\nu^{(\delta)}(H) = \langle \psi_L | g(A, H) | \psi_R \rangle$ может быть представлен в виде

$$F_\nu^{(\delta)}(H) = q^{i\nu-1} H^{i\nu-1} \iint \frac{(-q^{2i\nu+4} \bar{z}z, q^2)_\infty}{(-q^2 \bar{z}z, q^2)_\infty} \xi_1(q^{i\nu+1} \bar{z}) \xi_2(q^{i\nu-1} H^{-2} z) dz d\bar{z}, \quad (6.11)$$

где функции ξ_1, ξ_2 определены ниже формулами (6.12), (6.13)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$A^*.\psi_L(\bar{z}, z).(A^{-1}) = \psi_L(\bar{z}, z).$$

Это условие вместе с условием (6.5) означает, что ψ_L является $\mathcal{U}_q(SU_2)$ -инвариантным вектором (см. (3.3)) в V_ν .

Из (6.5) следует, что состояние ψ_L имеет вид

$$\psi_L(\bar{z}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(q^2, q^2)_m} (\bar{z})^m z^m.$$

Тогда с помощью условия (6.5) и формул (4.2) можно найти коэффициенты $b_m = (-1)^m q^{2m} (q^{-2i\nu+2}, q^2)_m$, т.е.

$$\psi_L(\bar{z}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{2m} (q^{-2i\nu+2}, q^2)_m}{(q^2, q^2)_m} (\bar{z}z)^m = \frac{(-q^{-2i\nu+4}x, q^2)_\infty}{(-q^2x, q^2)_\infty},$$

где $x = |z|^2$.

Теперь рассмотрим вектор Уиттекера ψ_R . Будем искать его в виде

$$\psi_R(\bar{z}, z) = \xi_1(\bar{z})\xi_2(z),$$

где

$$\xi_1(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(1-q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} \bar{\mu}^n (\bar{z})^n, \quad \xi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(1-q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} \mu^n z^n.$$

Тогда из (6.7) следует, что

$$\begin{aligned} a_n c_k &= -\bar{\mu} \mu a_{n-1} c_{k-1} q^{i\nu\delta - 2i\nu - 2\delta + 1 + (k-1)(3-2\delta) + n} = \\ &= a_0 (i\mu)^n q^{\frac{n(n-1)}{2} + n(1-i\nu)} c_0 (i\mu)^k q^{\frac{k(k-1)}{2} (3-2\delta) + k(1-i\nu)} q^{(i\nu\delta - 2\delta + 2)k}. \end{aligned}$$

Полагая $a_0 = c_0 = 1$, получим

$$\xi_1(\bar{z}) = {}_1\Phi_1(0; -q; q, -i\mu(1-q^2)q^{1-i\nu}\bar{z}), \quad (6.12)$$

где ${}_r\Phi_s$ — базисный гипергеометрический ряд [32]. Для функции $\xi_2(z)$ аналогично имеем

$$c_k = (i\mu)^k q^{\frac{k(k-1)}{2} (3-2\delta) + k(1-i\nu) + (i\nu\delta - 2\delta + 2)k}.$$

Следовательно,

$$\xi_2(z) = \begin{cases} {}_0\Phi_2(-; 0, -q; q, -i\mu(1-q^2)q^{3-i\nu}z) & \text{при } \delta = 0, \\ {}_1\Phi_1(0; -q; q, -i\mu(1-q^2)qz) & \text{при } \delta = 1, \\ {}_3\Phi_1(0, 0, 0; -q; q, -i\mu(1-q^2)q^{i\nu-1}z) & \text{при } \delta = 2. \end{cases} \quad (6.13)$$

Таким образом, используя (6.2) и (6.3), мы получаем матричный элемент $F_\nu^{(\delta)}(H)$ в виде (6.11).

Покажем, что (6.11) является q -аналогом (2.22). Если переписать интеграл (6.11) в полярной системе координат $z = \rho e^{i\phi}$,

$$\begin{aligned} F_\nu^{(\delta)}(H) &= 2q^{i\nu-1} H^{i\nu-1} \int_0^\infty \frac{(-q^{2i\nu+4}\rho^2, q^2)_\infty}{(-q^2\rho^2, q^2)_\infty} \rho d\rho \times \\ &\times \int_{-\pi}^\pi \xi_1(q^{i\nu+1}\rho e^{-i\phi}) \xi_2(q^{i\nu-1}H^{-2}\rho e^{i\phi}) d\phi, \end{aligned}$$

и представить функции ξ_1 и ξ_2 в виде рядов, то внутренний интеграл в последнем выражении примет вид

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (1-q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} (i\mu q^2 \rho)^n e^{-in\phi} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{3-2\delta}{2} k(k-1)} (1-q^2)^k}{(q^2, q^2)_k} (i\mu q^{i\nu\delta - 2\delta + 2} H^{-2} \rho)^k e^{ik\phi} d\phi. \end{aligned}$$

При $\delta < 3/2$ ряды сходятся равномерно по ρ и ϕ , и мы можем интегрировать почленно. Тогда получим для рассматриваемого интеграла выражение

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{(2-\delta)n^2} (1-q^2)^{2n}}{(q^2, q^2)_n^2} (\mu q^{i\nu\delta-\delta+2} H^{-1} \rho)^{2n} = \\ = 2\pi J_0^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{(i\nu-1)\frac{\delta}{2}+1} H^{-1} \rho; q^2). \end{aligned}$$

q^2 -Функция Бесселя

$$J_\nu^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{(i\nu-1)\frac{\delta}{2}+1} H^{-1} \rho; q^2)$$

является голоморфной функцией ρ при $\delta < 3/2$ и она является мероморфной функцией ρ с простыми полюсами

$$\rho = \pm i \frac{q^{-i\nu} H}{2\mu(1-q^2)}$$

при $\delta = 2$. Таким образом, при $\delta = 0, 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} F_\nu^{(\delta)}(H) = 4\pi q^{i\nu-1} H^{i\nu-1} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{(-q^{2i\nu+4}\rho^2, q^2)_\infty}{(-q^2\rho^2, q^2)_\infty} J_0^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{(i\nu-1)\frac{\delta}{2}+1} H^{-1} \rho; q^2) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Докажем существование интеграла в (6.14). Рассмотрим первый подынтегральный сомножитель. Используя свойства q -биномиальной формулы [15], получим

$$\begin{aligned} \frac{(1+\rho^2)(-q^{2i\nu+4}\rho^2, q^2)_\infty}{(-q^2\rho^2, q^2)_\infty} &= \frac{(1+\rho^2)(-q^{2i\nu+2}\rho^2, q^2)_\infty}{(1+q^{2i\nu+2}\rho^2)(-q^2\rho^2, q^2)_\infty} = \\ &= \frac{(1+\rho^2)(q^{2i\nu}, q^2)_\infty}{(1+q^{2i\nu+2}\rho^2)(q^2, q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{-2i\nu+2}, q^2)_n q^{2i\nu n}}{(q^2, q^2)_n (1+q^{2n+2}\rho^2)}, \end{aligned}$$

т.е. абсолютно интегрируемую функцию. Рассмотрим второй сомножитель в подынтегральном выражении. Из [14] следует, что если $\rho \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \left| \frac{\rho}{1+\rho^2} J_0^{(1)}(2\mu(1-q^2)q^{i\nu} H^{-1} \rho; q^2) \right| &\leq \\ &\leq \frac{A^{(1)}\sqrt{\rho}}{1+\rho^2} |e_q(-i\mu(1-q^2)q^{i\nu} H^{-1} \rho) + ie_q(i\mu(1-q^2)q^{i\nu} H^{-1} \rho)| \leq C^{(1)}, \\ \left| \frac{\rho}{1+\rho^2} J_0^{(2)}(2\mu(1-q^2)q H^{-1} \rho) \right| &\leq \\ &\leq \frac{A^{(2)}\sqrt{\rho}}{1+q^2} |E_q(-i\mu(1-q^2)q H^{-1} \rho) + iE_q(i\mu(1-q^2)q H^{-1} \rho; q^2)| \leq C^{(2)}. \end{aligned}$$

Если $j = 3$, то

$$J_0^{(3)}(2x, q^2) = \frac{(qx^2, q^2)_\infty}{(q^2, q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k (qx^2, q^2)_k},$$

т. е.

$$\left| \frac{\rho}{1+\rho^2} J_0^{(3)}(2\mu(1-q^2)q^{\frac{i\nu+1}{2}} H^{-1}\rho; q^2) \right| \leq C^{(3)}$$

и интеграл в (6.14) сходится абсолютно.

Сделав замену

$$q^{1+\frac{i\nu\delta}{2}} \rho = r,$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} F_\nu^{(\delta)}(H) &= 4\pi q^{i\nu(\delta+1)} H^{i\nu-1} \times \\ &\times \int_0^\infty e^{\frac{i\nu\delta}{2} \ln q} \frac{(-q^{2i\nu+2-i\nu\delta} r^2, q^2)_\infty}{(-q^{-i\nu\delta} r^2, q^2)_\infty} J_0^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{\delta}{2}} H^{-1}r; q^2) r dr = \\ &= -\frac{8\pi q^{-\nu^2+\frac{3}{2}i\nu\delta} \ln q}{(1-q^2)\Gamma_{q^2}(i\nu+1)A_{i\nu}^{|1-\delta|}} \mu^{i\nu} H^{-1} K_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{\delta}{2}} H^{-1}; q^2), \end{aligned}$$

где

$$A_{i\nu} = \sqrt{\frac{I_{i\nu}^{(2)}(2; q^2)}{I_{-i\nu}^{(2)}(2; q^2)}}, \quad (6.15)$$

а $j = 1, 2, 3$ связаны с $\delta = 2, 0, 1$ соотношением (5.5) [16]. Путь интегрирования при $\delta = 2$ ($j = 1$) должен удовлетворять условию $\nu \ln q \neq (k+1/2)\pi$.

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ q -ФУНКЦИЙ МАКДОНАЛЬДА В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА–БЕРНСА

Формула (2.25) является известным преобразованием Меллина классической функции Макдональда,

$$\int_0^{i\infty} K_{i\nu}(2\mu H^{-1})(2\mu H^{-1})^{ip-1} dp = -i2^{-ip-2} \Gamma\left(\frac{i}{2}(p-\nu)\right) \Gamma\left(\frac{i}{2}(p+\nu)\right),$$

$$\operatorname{Im} s > \operatorname{Im} \nu \geq 0.$$

Формула обращения имеет вид

$$K_{i\nu}(2\mu H^{-1}) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \Gamma\left(\frac{i}{2}(p-\nu)\right) \Gamma\left(\frac{i}{2}(p+\nu)\right) (2\mu H^{-1})^{-ip} dp. \quad (7.1)$$

Обобщим эти формулы на квантовый случай (см. также [19]). Рассмотрим сходящийся интеграл

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(s) x^{-s} ds, \quad (7.2)$$

и пусть функция $G(x)$ удовлетворяет уравнению (5.4). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} q^{-s} (1 - q^{s+i\nu}) (1 - q^{s-i\nu}) g(s) x^{-s} ds = \\ = \frac{(1 - q^2)^2}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(s) q^{-2\delta + (\delta-1)s} x^{-(s-2)} ds \end{aligned}$$

и мы приходим к рекуррентному уравнению для $g(s)$,

$$q^{-s} \frac{(1 - q^{s+i\nu})(1 - q^{s-i\nu})}{(1 - q^2)^2} g(s) = q^{(\delta-1)s-2} g(s+2).$$

Его решение имеет вид

$$g(s) = q^{-\frac{\delta}{4}s^2 + \frac{2+\delta}{2}s} \Gamma_{q^2} \left(\frac{s+i\nu}{2} \right) \Gamma_{q^2} \left(\frac{s-i\nu}{2} \right), \quad (7.3)$$

и при $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} \nu \geq 0$ интеграл (7.2) сходится равномерно по x на полуоси $(1, \infty)$.

Так как $I_{i\nu}^{(j)}$ и $K_{i\nu}^{(j)}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (5.4) [16], то

$$G(x) = A I_{i\nu}^{(j)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2) + B K_{i\nu}^{(j)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2). \quad (7.4)$$

Пусть $j = 1$. В [14] было показано, что $I_{i\nu}^{(1)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами

$$x = \pm \frac{q^{-r + \frac{1}{2}\delta}}{\mu(1 - q^2)}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

а $K_{i\nu}^{(1)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2)$ и $G(x)$ в (7.4) являются голоморфными функциями в области $\operatorname{Re} x > 0$. Следовательно, в этом случае $A = 0$.

Пусть $j = 2, 3$. Нетрудно показать [33], что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} I_{i\nu}^{(j)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} K_{i\nu}^{(j)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2) &= 0 \end{aligned}$$

и $G(x)$ в (7.4) стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, $A = 0$ и при $j = 2, 3$.

Из (7.2) следует, что функция $g(s)$ (7.3) является обратным преобразованием Меллина функции $B K_{i\nu}^{(j)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2)$,

$$g(s) = B \int_0^\infty K_{i\nu}^{(j)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2) x^{s-1} dx. \quad (7.5)$$

Следовательно,

$$K_{i\nu}^{(j)} (2\mu(1 - q^2) q^{-\frac{1}{2}\delta} x; q^2) = \frac{B^{-1}}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} q^{-\frac{\delta}{4}s^2 + \frac{2+\delta}{2}s} \Gamma_{q^2} \left(\frac{s+i\nu}{2} \right) \Gamma_{q^2} \left(\frac{s-i\nu}{2} \right) x^{-s} ds$$

и нам нужно найти коэффициент B . q -Функции Макдональда удовлетворяют следующему соотношению [33]:

$$\begin{aligned} \frac{q^{\frac{1}{2}\delta}}{\mu(1+q)x} \tilde{\mathcal{D}}_x x^{i\nu} K_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) = \\ = -q^{-\frac{2-\delta}{2}(i\nu-1)} x^{i\nu-1} K_{i\nu-1}^{(j)}(2(1-q^2)q^{1-\delta}x; q^2), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mathcal{D}}_x f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}.$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) x^{s-1} dx = \\ = -\frac{q^{\frac{2-\delta}{2}(s+i\nu)}}{\mu(1+q)} \int_0^\infty \tilde{\mathcal{D}}_x (x^{i\nu+1} K_{i\nu+1}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2)) x^{s-i\nu-2} dx. \quad (7.6) \end{aligned}$$

Пусть $f(x)$ — гладкая функция и функции $f(x)$, $f'(x)$ интегрируемы на $(0, \infty)$. Тогда можно показать, что

$$\int_0^\infty \tilde{\mathcal{D}}_x f(x) dx = \frac{\ln q}{1-q} f(0).$$

Положим $s = i\nu + 2$. Напомним [16], что

$$\begin{aligned} K_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) = \frac{1}{2} q^{\nu^2+i\nu} \Gamma_{q^2}(i\nu) \Gamma_{q^2}(1-i\nu) \times \\ \times [A_{i\nu}^{|1-\delta|} I_{-i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) - A_{-i\nu}^{|1-\delta|} I_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2)], \quad (7.7) \end{aligned}$$

где $A_{i\nu}$ определяется формулой (6.15) (см. [33]) и

$$I_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) = \frac{q^{-\frac{1}{2}i\delta\nu}}{\Gamma_{q^2}(i\nu+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{q^{(2-\delta)k(k+i\nu)-k\delta}(1-q^2)^{2k}(\mu x)^{i\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k (q^{2i\nu+2}, q^2)_k}. \quad (7.8)$$

Тогда из (7.5)–(7.8) следует, что

$$\begin{aligned} q^{\frac{\delta}{4}\nu^2 + i\frac{2-\delta}{2}\nu+2} \Gamma_{q^2}(i\nu+1) = \\ = -B \frac{q^{(2-\delta)(i\nu+1)}}{\mu(1+q)} \int_0^\infty \tilde{\mathcal{D}}_x (x^{i\nu+1} K_{i\nu+1}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2)) dx = \\ = -\frac{B \ln q}{2(1-q^2)} \mu^{-i\nu-2} \Gamma_{q^2}(i\nu+1) A_{i\nu+1}^{|1-\delta|} q^{(1+i\nu)(2-i\nu-\frac{1}{2}\delta)}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $A_{i\nu+1} = A_{i\nu}$ [14], получим

$$B = -\frac{2(1-q^2)}{\ln q} \mu^{i\nu+2} A_{-i\nu}^{|1-\delta|} q^{-\frac{4-\delta}{4}\nu^2 + \frac{1}{2}\delta}.$$

Таким образом, мы доказали следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. q -Функции Макдональда могут быть представлены в виде интеграла Бернса

$$K_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}x; q^2) = -\frac{\ln q \mu^{-i\nu-2}}{4\pi(1-q^2)} A_\nu^{[1-\delta]} q^{\frac{4-\delta}{4}\nu^2 - \frac{1}{2}\delta} \times \\ \times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} q^{-\frac{\delta}{4}s^2 + \frac{2+\delta}{2}s} \Gamma_{q^2}\left(\frac{s+i\nu}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(\frac{s-i\nu}{2}\right) x^{-s} ds, \quad (7.9)$$

где коэффициент A_ν определяется формулой (6.15), а $j = 1, 2, 3$ и $\delta = 2, 0, 1$ связаны соотношением (5.5).

Полагая в (7.9) $x = H^{-1}$ и делая замену переменной интегрирования $s = ip$, получим

$$K_{i\nu}^{(j)}(2\mu(1-q^2)q^{-\frac{1}{2}\delta}H^{-1}; q^2) = -\frac{\ln q \mu^{-i\nu-2}}{4\pi i(1-q^2)} A_\nu^{[1-\delta]} q^{\frac{4-\delta}{4}\nu^2 - \frac{1}{2}\delta} \times \\ \times \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} q^{\frac{\delta}{4}p^2 + i\frac{2+\delta}{2}p} \Gamma_{q^2}\left(\frac{i}{2}(p+\nu)\right) \Gamma_{q^2}\left(\frac{i}{2}(p-\nu)\right) H^{ip} dp. \quad (7.10)$$

Очевидно, интегральное представление q^2 -функции Макдональда (7.9) является q -аналогом интегрального представления (7.1). Такое же представление в случае $|q| = 1$ было получено в работе [19].

Благодарности. Авторы выражают благодарность С. Харчеву за полезные обсуждения. Работа М. А. О. частично поддержана фондом INTAS (грант № 99-01782), Российским фондом поддержки научных школ (грант № 96-15-96455), В.-Б. К. Р. – Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 00-01-00143) и фондом НИОКР МПС РФ.

Список литературы

- [1] M. Olshanetsky, A. Perelomov. Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313.
- [2] Н. Я. Вуленкин. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
- [3] B. Kostant. Invent. Math. 1978. V. 48. P. 101.
- [4] М. А. Семенов-Тянь-Шанский. Квантование незамкнутых цепочек Тоды. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. Динамические системы-7. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1987. С. 194.
- [5] A. Gerasimov et al. Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 2523.
- [6] B. Feigin, E. Frenkel. Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. Suppl. 1A. P. 197.
- [7] R. Goodman, N. Wallach. Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 315. P. 1.
- [8] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi, K. Ueno. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. Math. 1988. V. 307. P. 559.
- [9] L. Vaksman. Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1989. V. 65. P. 169.
- [10] Л. Л. Ваксман, Л. И. Корогодский. ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 5. С. 1036.
- [11] M. A. Olshanetsky, V.-B. K. Rogov. J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 4669.
- [12] P. Podleš, S. L. Woronowicz. Commun. Math. Phys. 1990. V. 130. P. 381.
- [13] S. Ruijsenaars. Commun. Math. Phys. 1990. V. 133. P. 217.
- [14] М. А. Ольшанецкий, В.-Б. К. Рогов. Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 109.
- [15] М. А. Ольшанецкий, В.-Б. К. Рогов. Матем. сб. 1997. Т. 188. № 8. С. 125.

- [16] V.-B. K. Rogov. The integral representations of the q -Bessel–Macdonald functions. math.QA/0101259; Preprint ITEP-TH-06/01, 2001.
- [17] P. Etingof. Whittaker functions on quantum groups and q -deformed Toda operators. math.QA/9901053.
- [18] A. Sevostyanov. Quantum deformation of Whittaker modules and Toda lattice. math.QA/9905128.
- [19] S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky. Unitary representations of $U_q(sl(2, R))$, the modular double, and the multiparticle q -deformed Toda chains. hep-th/0102180.
- [20] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
- [21] S. L. Woronowicz, S. Zakrzewski. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1992. V. 28. P. 809.
- [22] S. L. Woronowicz, S. Zakrzewski. Compos. Math. 1994. V. 90. P. 211.
- [23] Н. Решетихин, Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 178.
- [24] В. Дринфельд. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 6. С. 114.
- [25] N. Reshetikhin. Lett. Math. Phys. 1990. V. 20. P. 331.
- [26] W. Pusz. Commun. Math. Phys. 1993. V. 152. P. 591.
- [27] L. Dabrowsky, V. Dobrev, R. Floreanini. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 971.
- [28] F. H. Jackson. Proc. London Math. Soc. (2). 1905. V. 2. P. 192.
- [29] H. T. Koelink. Duke Math. J. 1994. V. 76. P. 483.
- [30] A. Mironov. Quantum deformations of τ -functions, bilinear identities and representation theory. hep-th/9409190.
- [31] A. Morozov, L. Vinet. Free field representation of group element for simple quantum groups. hep-th/9409093.
- [32] Дж. Гаспер, М. Рахман. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.
- [33] V.-B. K. Rogov. q -Bessel–Macdonald functions. math.QA/0010170; Preprint ITEP-TH-56/00, 2000.

Поступила в редакцию 8.X.2001 г.