Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Белавин, А. В. Одесский, Р. А. Усманов, Новые соотношения в алгебре Q -операторов Бакстера, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 3, 383–413

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:05:35

© 2002 г. А. А. Белавин*, А. В. Одесский*, Р. А. Усманов*

НОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В АЛГЕБРЕ Q -ОПЕРАТОРОВ БАКСТЕРА

Рассмотрены неприводимые циклические представления алгебры матриц монодромии, соответствующие R -матрице шестивершинной модели. В корнях из единицы Q -оператор Бакстера может быть представлен как след тензорного произведения L -операторов, отвечающих одному из таких представлений. Для него справедливо TQ -уравнение. Найдена новая алгебраическая структура, образуемая этими L -операторами и, как следствие, Q -операторами.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1] Бакстер ввел Q -оператор, который он использовал для решения восьмивершинной модели. Q -операторы образуют семейство, коммутирующее с семейством трансфер-матриц $T(u)$, причем имеет место TQ -уравнение, связывающее два семейства между собой и являющееся ключевым для решения модели.

В работе [2] (см. также [3], [4]) были найдены выражения для больцмановских весов киральной модели Поттса, являющихся решением уравнения “звезда–треугольник”. R -матрица модели S может быть представлена в виде произведения четырех таких больцмановских весов.

Алгебраическая структура Q -оператора в частном случае шестивершинной модели и связь между ним и R -матрицей киральной модели Поттса были найдены в работе Бажанова и Строганова [5], которые в корнях N -й степени из единицы (N – простое число) нашли N -мерное циклическое представление $\mathcal{L}$ алгебры Янга–Бакстера, связанной с R -матрицей обычной шестивершинной модели. След по N -мерному квантовому пространству тензорного произведения L -операторов обладает свойствами Q -оператора. В частности, он удовлетворяет TQ -уравнению.

В работе Тарасова [6] были исследованы неприводимые циклические представления алгебры матриц монодромии, соответствующей R -матрице шестивершинной модели в корнях из единицы.

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, г. Черноголовка, Московская обл., Россия

В последнее время Q -оператор опять привлек повышенное внимание в связи с тем, что он является квантовым аналогом преобразования Беклунда, как это было показано в работах [7]–[10] для некоторых моделей статистической физики.

В упомянутой уже работе [5] R -матрица S киральной модели Поттса была получена как оператор, сплетающий тензорные произведения двух циклических представлений алгебры матриц монодромии, причем последние перемножаются сначала в одном порядке, а затем в обратном.

Четыре сомножителя, образующие R -матрицу S , являются сплетающими операторами для специальных случаев некоторых элементарных изоморфизмов циклических представлений алгебры L -операторов и их тензорных произведений.

В данной работе мы выясняем, при каких условиях в одном случае два циклических представления, а в другом — два тензорных произведения пары циклических представлений алгебры матриц монодромии являются эквивалентными, и находим соответствующие сплетающие операторы. Последние являются обобщением известных вершинных весов киральной модели Поттса и удовлетворяют некоторой модификации уравнений “звезда–треугольник”.

План работы следующий. Во втором разделе мы вводим циклические представления алгебры L -операторов. В третьем — обсуждаем разные варианты записи циклических представлений. В разделе 4 выводится TQ -уравнение. В пятом разделе рассмотрены некоторые частные случаи элементарных изоморфизмов, действующих на циклических представлениях алгебры матриц монодромии. В шестом разделе мы выводим их в общем случае и показываем, что сплетающие операторы этих элементарных изоморфизмов удовлетворяют обобщенному уравнению “звезда–треугольник” киральной модели Поттса. В разделе 7 выписываются соотношения в алгебре Q -операторов. В восьмом разделе обсуждаются перспективы будущих исследований. В приложениях дается вывод некоторых формул, встречающихся в тексте.

2. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЯНГА–БАКСТЕРА

Следуя работе [6], введем определение R -матрицы

$$R(u) = \begin{pmatrix} 1 - u\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega(1 - u) & u(1 - \omega) & 0 \\ 0 & 1 - \omega & 1 - u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - u\omega \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Она связана с алгеброй $U_q(sl_2)$ [11]–[13] и может быть получена из R -матрицы обычной шестивершинной модели при помощи простого преобразования (см. раздел 3). Для краткости обозначим $\mathcal{M} = \text{End } \mathbb{C}^2$, так что $R(u) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$.

Алгебра матриц монодромии $\mathcal{A}$ — это алгебра с генераторами $A(u), B(u), C(u), D(u)$,

H , H^{-1} и соотношениями

$$\begin{aligned} R(u) \overset{1}{L}(uv) \overset{2}{L}(v) &= \overset{2}{L}(v) \overset{1}{L}(uv) R(u), \\ [\hat{\omega} \otimes H, L(u)] &= 0, \quad HH^{-1} = H^{-1}H = 1, \\ L(u) &= \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}, \quad \hat{\omega} = \text{diag}(1, \omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Цифры 1 и 2 над L обозначают двумерное пространство, по которому соответствующий L -оператор умножается на R -матрицу. При этом оба L -оператора действуют в одном и том же квантовом пространстве.

Как указано в [6], в алгебре $\mathcal{A}$ можно определить копроизведение Δ :

$$\begin{aligned} \Delta(L(u)) &= L_1(u)L_2(u) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \\ \Delta(H) &= H \otimes H. \end{aligned}$$

Нижние индексы 1 и 2 обозначают квантовые пространства, в которых действуют соответствующие L -операторы. При этом сами L -операторы, рассматриваемые как двумерные матрицы (каждый матричный элемент является оператором в квантовом пространстве), перемножаются между собой по обычным правилам умножения матриц. Тем самым тензорное произведение представлений алгебры $\mathcal{A}$ также является представлением $\mathcal{A}$.

Определим квантовый детерминант

$$\det_q L(u) = D(u)A(u\omega^{-1}) - C(u)B(u\omega^{-1}). \quad (3)$$

Можно показать, что $H^{-1} \det_q L(u)$ является центральным элементом алгебры $\mathcal{A}$. Здесь и далее будем считать, что $\omega^N = 1$. В этом случае, как показано в [6], центр алгебры $\mathcal{A}$ увеличивается, а именно, центральными становятся операторы

$$\langle \mathcal{O} \rangle(u) = \prod_{k=0}^{N-1} \mathcal{O}(u\omega^k), \quad \mathcal{O} = A, B, C, D,$$

и, таким образом, можно определить матрицу элементов центра

$$\langle L \rangle = \begin{pmatrix} \langle A \rangle & \langle B \rangle \\ \langle C \rangle & \langle D \rangle \end{pmatrix}.$$

Можно показать [6], что для $L = L_1 L_2$ имеет место равенство

$$\Delta(\langle L \rangle) = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle, \quad \langle \det_q L \rangle = \det \langle L \rangle.$$

N -мерное представление π алгебры $\mathcal{A}$ определяется следующим образом [6]:

$$L(u, p_1, p_2) = \begin{pmatrix} c_1 c_2 Z - b_1 b_2 u & -u(b_1 d_2 - c_1 a_2 Z)X \\ X^{-1}(d_1 b_2 - a_1 c_2 Z) & d_1 d_2 - a_1 a_2 \omega u Z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$H_\pi = hZ, \quad p_i = (a_i, b_i, c_i, d_i), \quad i = 1, 2.$$

Действие операторов X, Z для стандартного базиса в $\mathbb{C}^N$ дается формулами

$$Z|k\rangle = \omega^k |k\rangle, \quad X|k\rangle = |k+1\rangle, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad |N\rangle \equiv |0\rangle.$$

Мы также имеем

$$\langle L(p_1, p_2) \rangle(v) = \begin{pmatrix} c_1^N c_2^N - b_1^N b_2^N v & -v(b_1^N d_2^N - c_1^N a_2^N) \\ d_1^N b_2^N - a_1^N c_2^N & d_1^N d_2^N - a_1^N a_2^N v \end{pmatrix}.$$

Хотя в формулы (4) входят восемь параметров (помимо спектрального), N -мерное представление зависит только от шести из них, поскольку при замене

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow \lambda a_1, & a_2 &\rightarrow \lambda^{-1} a_2, \\ c_1 &\rightarrow \lambda c_1, & c_2 &\rightarrow \lambda^{-1} c_2, \\ b_1 &\rightarrow b_1, & b_2 &\rightarrow b_2, & d_1 &\rightarrow d_1, & d_2 &\rightarrow d_2, \end{aligned}$$

где λ – произвольное число, оператор $L(u, p_1, p_2)$ не меняется. То же верно и для замены

$$\begin{aligned} b_1 &\rightarrow \lambda b_1, & b_2 &\rightarrow \lambda^{-1} b_2, \\ d_1 &\rightarrow \lambda d_1, & d_2 &\rightarrow \lambda^{-1} d_2, \\ a_1 &\rightarrow a_1, & a_2 &\rightarrow a_2, & c_1 &\rightarrow c_1, & c_2 &\rightarrow c_2. \end{aligned}$$

Кроме того, с точностью до классов проективной эквивалентности L -оператор зависит только от четырех параметров:

$$L(\lambda p_1, p_2) = \lambda L(p_1, p_2), \quad L(p_1, \mu p_2) = \mu L(p_1, p_2),$$

где λ, μ – произвольные числа.

Два представления $L_1(u, p_1, p_2)L_2(u, p_3, p_4)$ и $L_2(u, p_3, p_4)L_1(u, p_1, p_2)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда можно выбрать p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) так, что они удовлетворяют условиям

$$\frac{a_i^N \pm b_i^N}{c_i^N \pm d_i^N} = \lambda_\pm, \quad (5)$$

где $\lambda_\pm$ не зависят от i (см. приложение Б). Сплетающий оператор, определяемый уравнением

$$\mathbf{S}(p_1, p_2, p_3, p_4)L_1(u, p_1, p_2)L_2(u, p_3, p_4) = L_1(u, p_3, p_4)L_2(u, p_1, p_2)\mathbf{S}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (6)$$

может быть явно выражен через болцмановские веса киральной модели Поттса W_{pq} , $\overline{W}_{pq}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \mathbf{P}F(p_1, p_4; X_1 X_2^{-1})G(p_1, p_3; Z_1)G(p_2, p_4; Z_2)F(p_2, p_3; X_1 X_2^{-1}), \\ G(p, q; \omega^k) &= W_{pq}(k), \quad F(p, q; \omega^k) = \sum_{l=1}^N \omega^{kl} \overline{W}_{pq}(l), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{P}$ – обычный оператор перестановки, меняющий пространства 1 и 2 местами.

3. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЯНГА–БАКСТЕРА В ФОРМЕ БАЖАНОВА–СТРОГАНОВА

Наряду с введенными в предыдущей части L -операторами можно рассматривать их вариант, связанный с другим выбором R -матрицы.

Рассмотрим обычную R -матрицу модели льда

$$R_{\text{ice}}(x) = \begin{bmatrix} x\omega_1 - x^{-1}\omega_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x - x^{-1} & \omega_1 - \omega_1^{-1} & 0 \\ 0 & \omega_1 - \omega_1^{-1} & x - x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x\omega_1 - x^{-1}\omega_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

и соответствующие ей соотношения в алгебре Янга–Бакстера:

$$R_{\text{ice}}(x) \overset{1}{L}_{\text{ice}}(xy) \overset{2}{L}_{\text{ice}}(y) = \overset{2}{L}_{\text{ice}}(y) \overset{1}{L}_{\text{ice}}(xy) R_{\text{ice}}(x). \quad (9)$$

N -мерное представление алгебры (9) можно записать следующим образом:

$$L_{\text{ice}}(y, p_1, p_2) = \begin{pmatrix} y^{-1}c_1c_2Z_1 - b_1b_2yZ_1^{-1} & -(b_1d_2Z_1^{-1} - c_1a_2Z_1)X \\ \omega_1X^{-1}(d_1b_2Z_1^{-1} - a_1c_2Z_1) & y^{-1}d_1d_2Z_1^{-1} - a_1a_2\omega_1^2yZ_1 \end{pmatrix},$$

где операторы Z_1, X удовлетворяют соотношениям

$$Z_1^N = 1, \quad X^N = 1, \quad Z_1X = \omega_1XZ_1.$$

Сделаем замену

$$\begin{aligned} R_{12} &\rightarrow C_1^{-1}(xy)C_2^{-1}(y)R_{12}C_2(y)C_1(xy), & L_1(xy) &\rightarrow C_1^{-1}(xy)L_1(xy)C_1(xy), \\ L_2(y) &\rightarrow C_2^{-1}(y)L_2(y)C_2(y), \end{aligned}$$

где

$$C(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

а индекс у матрицы C показывает, в каком из двух пространств она действует. В результате такой замены уравнение $RLL = LLR$ по-прежнему будет иметь место. При этом

$$\mathcal{R}(x) = \begin{pmatrix} x\omega_1 - x^{-1}\omega_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x - x^{-1} & x(\omega_1 - \omega_1^{-1}) & 0 \\ 0 & x^{-1}(\omega_1 - \omega_1^{-1}) & x - x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x\omega_1 - x^{-1}\omega_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а L -оператор дается формулой

$$\mathcal{L}(y, p_1, p_2) = \begin{pmatrix} y^{-1}c_1c_2Z_1 - b_1b_2yZ_1^{-1} & -y(b_1d_2Z_1^{-1} - c_1a_2Z_1)X \\ \omega_1y^{-1}X^{-1}(d_1b_2Z_1^{-1} - a_1c_2Z_1) & y^{-1}d_1d_2Z_1^{-1} - a_1a_2\omega_1^2yZ_1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Именно последний L -оператор был найден в работе [5], и именно его мы будем называть циклическим представлением алгебры матриц монодромии в форме Бажанова–Строганова.

Домножим теперь $L(y)$ на yZ_1 и введем следующие обозначения:

$$v = y^2, \quad Z = Z_1^2, \quad \omega = \omega_1^2.$$

Тогда получим используемый нами оператор (4). При этом, чтобы уравнение $RLL = LLR$ было по-прежнему верным, необходимо домножить R -матрицу с двух сторон следующим образом:

$$R(u) = -\omega_1 x K_1 \mathcal{R}(x) K_2^{-1},$$

где

$$u = x^2, \quad K = \omega_1^{(\sigma^z - 1)/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_1^{-1} \end{pmatrix},$$

а нижний индекс у матрицы K обозначает пространство, в котором она действует. Матрица $R(u)$, как нетрудно видеть, совпадает с (1), а L -оператор — с L -оператором (4).

Подчеркнем, что в дальнейшем мы везде будем обозначать циклические представления в форме Тарасова буквой L , а циклические представления в форме Бажанова–Строганова — буквой $\mathcal{L}$. Матричные элементы L -операторов будем обозначать соответственно $L_{i\alpha}^{j\beta}$ и $\mathcal{L}_{i\alpha}^{j\beta}$, $i, j = 0, 1$, $\alpha, \beta = 0, \dots, N-1$.

4. Q -ОПЕРАТОР И TQ -УРАВНЕНИЕ

Трансфер-матрица, построенная с помощью $\mathcal{L}(u)$,

$$\mathcal{Q}(u) = \text{tr}_0 \mathcal{L}_{10}(u) \mathcal{L}_{20}(u) \dots \mathcal{L}_{n0}(u),$$

где след берется по N -мерному пространству, обладает одним очень важным свойством. Она удовлетворяет TQ -уравнению, что позволяет говорить о ней как о Q -операторе Бакстера [5]. Покажем это.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{R}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u) \mathcal{L}_{j_1 \alpha}^{k_1 \beta}(uv) \mathcal{L}_{j_2 \beta}^{k_2 \gamma}(v) = \mathcal{L}_{i_2 \alpha}^{j_2 \beta}(uv) \mathcal{L}_{i_1 \beta}^{j_1 \gamma}(v) \mathcal{R}_{j_1 j_2}^{k_1 k_2}(u). \quad (12)$$

Его можно изобразить графически так, как показано на рис. 1. При фиксированных индексах i_1, k_1 обе части уравнения (12) являются операторами в тензорном произведении $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^N$. Подействуем этими операторами на вектор $\psi_{k_2 \gamma}$, принадлежащий ядру оператора $\mathcal{L}_{23}(v)$, т.е. на вектор, удовлетворяющий равенству

$$\mathcal{L}_{j_2 \beta}^{k_2 \gamma}(v) \psi_{k_2 \gamma} = 0.$$

Ненулевое ядро у $\mathcal{L}_{23}(v)$ имеется только при некоторых специальных значениях $v = v_*$: $v_*^2 = c_1 d_1 / a_1 b_1$ или $v_*^2 = c_2 d_2 / a_2 b_2$. Из рис. 1 видно, что ядро оператора $\mathcal{L}_{23}(v_*)$ представляет собой подпространство, инвариантное относительно тензорного произведения

$\mathcal{L}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u)$. Дополнение ядра, рассматриваемое как фактор-пространство, в этом случае также является инвариантным подпространством. Поэтому матрица оператора $\mathcal{L}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u)$ имеет блочно-диагональный вид

$$\mathcal{L}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u) = \begin{pmatrix} P_1 & * \\ 0 & P_2 \end{pmatrix},$$

где все блоки суть N -мерные квадратные матрицы, а звездочкой обозначены несущественные для нас матричные элементы. Мы здесь ввели следующий способ упорядочения векторов базиса: первые N векторов образуют ядро, а остальные N – его дополнение.

Рис. 1

Пусть при некоторых значениях параметров $\mathcal{L}(v_*)$ имеют место равенства

$$P_1 = \phi_1 \mathcal{L}(uv_* \lambda), \quad P_2 = \phi_2 \mathcal{L}(uv_* \lambda^{-1}). \quad (13)$$

Тогда после перемножения n копий оператора $\mathcal{L}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u)$ по пространствам 2 и 3 (см. рис. 2) и взятия следа мы получим уравнение

$$\tilde{\mathcal{Q}}(uv_*)T(u) = \phi_1^n \tilde{\mathcal{Q}}(uv_* \lambda) + \phi_2^n \tilde{\mathcal{Q}}(uv_* \lambda^{-1}), \quad (14)$$

где

$$\tilde{\mathcal{Q}}(uv_*) = \text{tr}_3 \mathcal{L}_{13}(uv_*) \mathcal{L}_{1'3}(uv_*) \dots \mathcal{L}_{1^{(n)}3},$$

Рис. 2

а $T(u)$ – обычная трансфер-матрица модели льда. Сделав замену $\mathcal{Q}(u) = \tilde{\mathcal{Q}}(uv_*)$, мы придем к TQ -уравнению.

Оказывается, что при том определении оператора $\mathcal{L}(v)$, которое мы имеем, довести изложенную схему до конца не удастся, поскольку ни при каком выборе параметров добиться выполнения условий (13) нельзя.

Однако можно так переопределить оператор $\mathcal{L}(v)$, чтобы условие (13), а следовательно, и уравнение (14) действительно имели место [5]. Для этого параметры p_1 нужно сделать зависящими от спектрального параметра v , а параметры p_2 оставить прежними, т. е.

$$p_1(v) = (a_1 v^{-1}, b_1, c_1, d_1 v), \quad p_2(v) = (a_2, b_2, c_2, d_2).$$

В приложении А показано, что $\mathcal{Q}(u) = \mathcal{Q}(u, p_1(u), p_2)$ действительно удовлетворяет TQ -уравнению:

$$\mathcal{Q}(u)T(u) = (u - u^{-1})^n \mathcal{Q}(u\omega) + (u\omega - u^{-1}\omega^{-1})^n \mathcal{Q}(u\omega^{-1}).$$

Здесь $T(u)$ – обычная трансфер-матрица модели льда.

5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ: ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим два представления алгебры L -операторов $L(u, p_1, p_2)$ и $L(u, p_2, p_1)$. Пусть параметры p_1 и p_2 таковы, что оба эти представления эквивалентны. Введем оператор G , удовлетворяющий уравнению

$$G(Z)L(u, p_1, p_2) = L(u, p_2, p_1)G(Z), \quad (15)$$

где $G(Z)$ действует в N -мерном пространстве.

Теперь рассмотрим два тензорных произведения пары циклических представлений: $L_1(u, p_1, p_2)L_2(u, p_3, p_4)$ и $L_1(u, p_1, p_3)L_2(u, p_2, p_4)$ (следует обратить внимание на перестановку $p_2 \leftrightarrow p_3$). Пусть параметры p_1, p_2, p_3, p_4 таковы, что оба представления эквивалентны. Введем оператор F , сплетающий их:

$$F(X_1 X_2^{-1})L_1(u, p_1, p_2)L_2(u, p_3, p_4) = L_1(u, p_1, p_3)L_2(u, p_2, p_4)F(X_1 X_2^{-1}). \quad (16)$$

Здесь $F(X_1 X_2^{-1})$ также действует в N -мерном пространстве.

Оказывается, условия (5) являются заведомо достаточными для существования операторов G и F . При их выполнении оба оператора даются следующими формулами:

$$\frac{G(p_1, p_2; \omega^k)}{G(p_1, p_2; 1)} = \prod_{j=1}^k \frac{d_1 b_2 - a_1 c_2 \omega^j}{b_1 d_2 - c_1 a_2 \omega^j}, \quad (17)$$

$$\frac{F(p_1, p_2; \omega^k)}{F(p_1, p_2; 1)} = \prod_{j=1}^k \frac{\omega a_1 d_2 - d_1 a_2 \omega^j}{c_1 b_2 - b_1 c_2 \omega^j}. \quad (18)$$

Здесь символами $G(p_1, p_2; \omega^k)$ и $F(p_1, p_2; \omega^k)$ обозначены диагональные матричные элементы N -мерных матриц $G(p_1, p_2; Z)$ и $F(p_1, p_2; X_1 X_2^{-1})$ в соответствующем каждой из них собственном базисе (матрицы G и F одновременно не могут быть приведены к диагональному виду).

В следующем разделе оба оператора будут вычислены в более общем случае, а сейчас просто отметим, что формулы (17), (18) совпадают с формулами (7).

Существование элементарных изоморфизмов G и F объясняет факторизацию R -матрицы киральной модели Поттса. Переставляя пары, получим цепочку

$$(p_1, p_2)(p_3, p_4) \xrightarrow{F_1} (p_1, p_3)(p_2, p_4) \xrightarrow{G_1, G_2} (p_3, p_1)(p_4, p_2) \xrightarrow{F_2} (p_3, p_4)(p_1, p_2).$$

Отсюда факторизация R -матрицы становится очевидной.

6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

6.1. G -оператор. Рассмотрим два представления алгебры L -операторов $L(u, p_1, \bar{p}_1)$ и $L(u, p_2, \bar{p}_2)$. Мы хотим выяснить, при каких условиях они эквивалентны, и найти соответствующий сплетающий оператор, который является обобщением оператора G , введенного формулой (15). Для простоты будем обозначать этот обобщенный сплетающий оператор той же буквой G .

Для указанных представления эквивалентны при выполнении следующих условий (см. приложение В):

$$\begin{aligned} a_1^N \bar{a}_1^N &= a_2^N \bar{a}_2^N, & b_1^N \bar{b}_1^N &= b_2^N \bar{b}_2^N, \\ \frac{\bar{c}_1^N \bar{d}_1^N}{\bar{a}_1^N \bar{b}_1^N} &= \frac{c_2^N d_2^N}{a_2^N b_2^N}, & \frac{\bar{c}_2^N \bar{d}_2^N}{\bar{a}_2^N \bar{b}_2^N} &= \frac{c_1^N d_1^N}{a_1^N b_1^N}, \\ \frac{d_1^N \bar{d}_1^N}{a_1^N \bar{a}_1^N} &= \frac{d_2^N \bar{d}_2^N}{a_2^N \bar{a}_2^N}, \\ d_1^N b_1^N - a_1^N \bar{c}_1^N &= d_2^N b_2^N - a_2^N \bar{c}_2^N. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим простейший вариант, когда извлечение корня N -й степени производится простым зачеркиванием буквы N . В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_1 \bar{a}_1 &= a_2 \bar{a}_2, & b_1 \bar{b}_1 &= b_2 \bar{b}_2, \\ \frac{\bar{c}_1 \bar{d}_1}{\bar{a}_1 \bar{b}_1} &= \frac{c_2 d_2}{a_2 b_2}, & \frac{\bar{c}_2 \bar{d}_2}{\bar{a}_2 \bar{b}_2} &= \frac{c_1 d_1}{a_1 b_1}, \\ d_1 \bar{d}_1 &= d_2 \bar{d}_2, \\ d_1^N \bar{b}_1^N - a_1^N \bar{c}_1^N &= d_2^N \bar{b}_2^N - a_2^N \bar{c}_2^N. \end{aligned} \quad (20)$$

Найдем теперь такой оператор G , что

$$GL(u, p_1, \bar{p}_1) = L(u, p_2, \bar{p}_2)G.$$

При выполнении условий (20) оператор G существует. Покажем это. Воспользуемся следующим анзацем:

$$G = G(Z).$$

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} G(Z)A_1 &= A_2 G(Z), \\ G(Z)B_1 &= B_2 G(Z), \\ G(Z)C_1 &= C_2 G(Z), \\ G(Z)D_1 &= D_2 G(Z). \end{aligned}$$

Выбираем базис $|k\rangle$, $k = 0, \dots, N-1 \pmod{N}$:

$$Z|k\rangle = \omega^k |k\rangle, \quad X|k\rangle = |k+1\rangle.$$

Очевидно, в этом базисе матрица $G(Z)$ является диагональной. Найдем ее ненулевые матричные элементы.

Первое уравнение полученной системы принимает вид

$$G(Z)(c_1 \bar{c}_1 Z - b_1 \bar{b}_1 u) = (c_2 \bar{c}_2 Z - b_2 \bar{b}_2 u)G(Z).$$

Действуя обеими частями этого уравнения на вектор $|k\rangle$ и приравнявая коэффициенты при разных степенях u , приходим к следующему ограничению на параметры:

$$c_1 \bar{c}_1 = c_2 \bar{c}_2, \quad b_1 \bar{b}_1 = b_2 \bar{b}_2. \quad (21)$$

Аналогично из четвертого уравнения

$$G(Z)(d_1 \bar{d}_1 - a_1 \bar{a}_1 \omega u Z) = (d_2 \bar{d}_2 - a_2 \bar{a}_2 \omega u Z)G(Z)$$

получаем, что

$$d_1 \bar{d}_1 = d_2 \bar{d}_2, \quad a_1 \bar{a}_1 = a_2 \bar{a}_2. \quad (22)$$

Второе уравнение

$$G(Z)X^{-1}[d_1 \bar{b}_1 - a_1 \bar{c}_1 Z] = [d_2 \bar{b}_2 - a_2 \bar{c}_2 Z]G(Z)$$

дает

$$G(\omega^{k+1}) = \frac{d_1 \bar{b}_1 - a_1 \bar{c}_1 \omega^{k+1}}{d_2 \bar{b}_2 - a_2 \bar{c}_2 \omega^{k+1}} G(\omega^k), \quad (23)$$

где величины $G(\omega^k)$, $k = 0, \dots, N-1$, обозначают диагональные элементы матрицы $G(Z)$. Точно так же из третьего уравнения

$$G(Z)[b_1 \bar{d}_1 - c_1 \bar{a}_1 Z]X = [b_2 \bar{d}_2 - c_2 \bar{a}_2 Z]XG(Z)$$

легко получить, что

$$G(\omega^{k+1}) = \frac{b_2 \bar{d}_2 - c_2 \bar{a}_2 \omega^{k+1}}{b_1 \bar{d}_1 - c_1 \bar{a}_1 \omega^{k+1}} G(\omega^k). \quad (24)$$

Поскольку функция $G(\omega^k)$ однозначна,

$$(d_1 \bar{b}_1 - a_1 \bar{c}_1 \omega^{k+1})(b_1 \bar{d}_1 - c_1 \bar{a}_1 \omega^{k+1}) = (d_2 \bar{b}_2 - a_2 \bar{c}_2 \omega^{k+1})(b_2 \bar{d}_2 - c_2 \bar{a}_2 \omega^{k+1}).$$

Приравнявая здесь коэффициенты при разных степенях ω и учитывая равенства (21), (22), получим еще одно дополнительное к уже имеющимся условие:

$$\frac{\bar{c}_1 \bar{d}_1}{\bar{a}_1 \bar{b}_1} + \frac{c_1 d_1}{a_1 b_1} = \frac{\bar{c}_2 \bar{d}_2}{\bar{a}_2 \bar{b}_2} + \frac{c_2 d_2}{a_2 b_2}. \quad (25)$$

Кроме того, из условия периодичности $G(\omega^{N+1}) = G(\omega)$ следует, что

$$d_1^N \bar{b}_1^N - a_1^N \bar{c}_1^N = d_2^N \bar{b}_2^N - a_2^N \bar{c}_2^N. \quad (26)$$

Используя калибровочные симметрии L -операторов, можно положить

$$a_1 = \bar{a}_2, \quad b_1 = \bar{b}_2. \quad (27)$$

Тогда из условий (20) непосредственно следуют равенства (21), (22), (25), (26).

Таким образом, матричные элементы $G(\omega^k)$ существуют и даются рекуррентным соотношением (23).

Нетрудно переписать $G(\omega^k)$ через $p_1, \bar{p}_1$. Подставляя

$$\bar{c}_2 = \frac{c_1 \bar{c}_1}{c_2}$$

в (26), выражаем c_2 через $p_1, \bar{p}_1$:

$$c_2 = \bar{c}_1 \sqrt[N]{\frac{b_1^N \bar{d}_1^N - c_1^N \bar{a}_1^N}{d_1^N \bar{b}_1^N - a_1^N \bar{c}_1^N}} = \Lambda(p_1, \bar{p}_1) \bar{c}_1,$$

где мы ввели функцию

$$\Lambda(p_1, p_2) = \sqrt[N]{\frac{b_1^N d_2^N - c_1^N a_2^N}{d_1^N b_2^N - a_1^N c_2^N}}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{G(p_1, \bar{p}_1; \omega^k)}{G(p_1, \bar{p}_1; 1)} = \Lambda(p_1, \bar{p}_1)^k \prod_{j=1}^k \frac{d_1 \bar{b}_1 - a_1 \bar{c}_1 \omega^j}{\bar{d}_1 b_1 - \bar{a}_1 c_1 \omega^j}.$$

Подчеркнем, что G зависит только от $p_1, \bar{p}_1$.

Итак, полученный оператор G осуществляет изоморфизм двух представлений алгебры матриц монодромии $L(u, p_1, \bar{p}_1)$, $L(u, p_2, \bar{p}_2)$, причем параметры $p_2, \bar{p}_2$ выражаются через $p_1, \bar{p}_1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} a_2 &= \bar{a}_1, & \bar{a}_2 &= a_1, \\ b_2 &= \bar{b}_1, & \bar{b}_2 &= b_1, \\ c_2 &= \Lambda(p_1, \bar{p}_1) \bar{c}_1, & \bar{c}_2 &= \Lambda(p_1, \bar{p}_1)^{-1} c_1, \\ d_2 &= \Lambda(p_1, \bar{p}_1)^{-1} \bar{d}_1, & \bar{d}_2 &= \Lambda(p_1, \bar{p}_1) d_1. \end{aligned} \tag{28}$$

Оператор G , полученный здесь, является обобщением оператора G , фигурирующего в формулах (7), (15). Для того чтобы перейти к такому частному случаю, необходимо положить $p_2 = \bar{p}_1$, $\bar{p}_2 = p_1$. При этом на параметры $p_1, \bar{p}_1$ возникает дополнительное ограничение $\Lambda(p_1, \bar{p}_1) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы извлекали корни N -й степени простым зачеркиванием буквы N . Видимо, общий случай сводится к этому. Полное исследование можно было бы провести следующим образом. Чтобы два неприводимых представления были эквивалентными, необходимо, чтобы совпадали их центры. Однако, получая наши условия, мы приравнивали не все элементы центров. К системе рассмотренных выше уравнений необходимо добавить условие равенства квантовых детерминантов. Мы не исследовали полностью вопрос, к чему приводит это дополнительное условие. Видимо, его можно использовать для выяснения того, как нужно извлекать корень N -й степени. При этом резко ограничивается число возможных вариантов.

6.2. F -оператор. Рассмотрим два представления алгебры L -операторов $L_1(u, p_1, \bar{p}_1)L_2(u, p_2, \bar{p}_2)$ и $L_1(u, p_3, \bar{p}_3)L_2(u, p_4, \bar{p}_4)$. Мы хотим найти условия, при которых эти представления будут эквивалентными, и вычислить соответствующий сплетающий оператор, обобщающий оператор F , введенный в формулах (7), (16).

Матрица элементов центра имеет вид

$$\langle L(u, p, \bar{p}) \rangle = \begin{pmatrix} c^N \bar{c}^N - b^N \bar{b}^N u & -u(b^N \bar{d}^N - c^N \bar{a}^N) \\ d^N \bar{b}^N - a^N \bar{c}^N & d^N \bar{d}^N - a^N \bar{a}^N u \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Необходимым условием эквивалентности двух представлений является совпадение центров этих представлений. Поэтому

$$\langle L_1(u, p_1, \bar{p}_1) \rangle \langle L_2(u, p_2, \bar{p}_2) \rangle = \langle L_1(u, p_3, \bar{p}_3) \rangle \langle L_2(u, p_4, \bar{p}_4) \rangle,$$

откуда также следует, что

$$\det \langle L_1(u, p_1, \bar{p}_1) \rangle \det \langle L_2(u, p_2, \bar{p}_2) \rangle = \det \langle L_1(u, p_3, \bar{p}_3) \rangle \det \langle L_2(u, p_4, \bar{p}_4) \rangle. \quad (30)$$

В приложении В показано, что из этих условий получаются следующие соотношения между параметрами (мы не рассматриваем тривиальный случай $p_3 = p_1, \bar{p}_3 = \bar{p}_1, p_4 = p_2, \bar{p}_4 = \bar{p}_2$):

$$\begin{aligned} b_1^N \bar{b}_1^N &= b_3^N \bar{b}_3^N, & b_2^N \bar{b}_2^N &= b_4^N \bar{b}_4^N, \\ a_1^N \bar{a}_1^N &= a_3^N \bar{a}_3^N, & a_2^N \bar{a}_2^N &= a_4^N \bar{a}_4^N, \\ d_1^N \bar{d}_1^N &= d_3^N \bar{d}_3^N, & a_2^N \bar{c}_2^N &= a_4^N \bar{c}_4^N, \\ \frac{c_2^N d_2^N}{a_2^N b_2^N} &= \frac{\bar{c}_3^N \bar{d}_3^N}{\bar{a}_3^N \bar{b}_3^N}, & \frac{c_1^N d_1^N}{a_1^N b_1^N} &= \frac{c_3^N d_3^N}{a_3^N b_3^N}, \\ \frac{\bar{c}_2^N \bar{d}_2^N}{\bar{a}_2^N \bar{b}_2^N} &= \frac{\bar{c}_4^N \bar{d}_4^N}{\bar{a}_4^N \bar{b}_4^N}, & \frac{c_4^N d_4^N}{a_4^N b_4^N} &= \frac{\bar{c}_1^N \bar{d}_1^N}{\bar{a}_1^N \bar{b}_1^N}, \\ b_2^N \bar{c}_3^N &= c_2^N \bar{b}_1^N \frac{b_2^N \bar{c}_1^N - \bar{a}_1^N d_2^N}{c_2^N \bar{b}_1^N - a_2^N \bar{d}_1^N}, \\ \bar{a}_1^N d_4^N &= \bar{d}_1^N a_2^N \frac{b_2^N \bar{c}_1^N - \bar{a}_1^N d_2^N}{c_2^N \bar{b}_1^N - a_2^N \bar{d}_1^N}. \end{aligned} \quad (31)$$

Опять просто зачеркнем букву N , тогда

$$\begin{aligned} b_1 \bar{b}_1 &= b_3 \bar{b}_3, & b_2 \bar{b}_2 &= b_4 \bar{b}_4, \\ a_1 \bar{a}_1 &= a_3 \bar{a}_3, & a_2 \bar{a}_2 &= a_4 \bar{a}_4, \\ d_1 \bar{d}_1 &= d_3 \bar{d}_3, & a_2 \bar{c}_2 &= a_4 \bar{c}_4, \\ \frac{c_2 d_2}{a_2 b_2} &= \frac{\bar{c}_3 \bar{d}_3}{\bar{a}_3 \bar{b}_3}, & \frac{c_1 d_1}{a_1 b_1} &= \frac{c_3 d_3}{a_3 b_3}, \\ \frac{\bar{c}_2 \bar{d}_2}{\bar{a}_2 \bar{b}_2} &= \frac{\bar{c}_4 \bar{d}_4}{\bar{a}_4 \bar{b}_4}, & \frac{c_4 d_4}{a_4 b_4} &= \frac{\bar{c}_1 \bar{d}_1}{\bar{a}_1 \bar{b}_1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Вспомним теперь про калибровочные симметрии L -оператора. При замене

$$\begin{aligned} a &\rightarrow \lambda a, & \bar{a} &\rightarrow \lambda^{-1} \bar{a}, \\ c &\rightarrow \lambda c, & \bar{c} &\rightarrow \lambda^{-1} \bar{c}, \\ b &\rightarrow b, & \bar{b} &\rightarrow \bar{b}, & d &\rightarrow d, & \bar{d} &\rightarrow \bar{d} \end{aligned}$$

оператор $L(u, p, \bar{p})$ не меняется. То же верно и для замены

$$\begin{aligned} b &\rightarrow \lambda b, & \bar{b} &\rightarrow \lambda^{-1} \bar{b}, \\ d &\rightarrow \lambda d, & \bar{d} &\rightarrow \lambda^{-1} \bar{d}, \\ a &\rightarrow a, & \bar{a} &\rightarrow \bar{a}, & c &\rightarrow c, & \bar{c} &\rightarrow \bar{c}. \end{aligned}$$

Используя калибровочные степени свободы, можно положить

$$b_1 = b_3, \quad b_2 = b_4, \quad a_1 = a_3, \quad a_2 = a_4. \quad (33)$$

Отсюда и из соотношений (32) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= \bar{b}_3, & \bar{b}_2 &= \bar{b}_4, & \bar{a}_1 &= \bar{a}_3, & \bar{a}_2 &= \bar{a}_4, \\ d_1 &= d_3, & \bar{d}_2 &= \bar{d}_4, & c_1 &= c_3, & \bar{c}_2 &= \bar{c}_4. \end{aligned} \quad (34)$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\bar{c}_3 \bar{d}_3 = c_2 d_2 \frac{\bar{a}_3 \bar{b}_3}{a_2 b_2}, \quad c_4 d_4 = \bar{c}_1 \bar{d}_1 \frac{a_2 b_2}{\bar{a}_1 \bar{b}_1}. \quad (35)$$

Вспоминая формулы (31), получим

$$\bar{c}_3^N = \frac{c_2^N \bar{b}_1^N}{b_2^N} \frac{b_2^N \bar{c}_1^N - \bar{a}_1^N d_2^N}{c_2^N \bar{b}_1^N - a_2^N \bar{d}_1^N}, \quad (36)$$

$$d_4^N = \frac{\bar{d}_1^N a_2^N}{\bar{a}_1^N} \frac{b_2^N \bar{c}_1^N - \bar{a}_1^N d_2^N}{c_2^N \bar{b}_1^N - a_2^N \bar{d}_1^N}. \quad (37)$$

Найдем теперь матрицу F , сплетающую рассматриваемые нами два представления алгебры L -операторов. В частности, покажем, что условия (33)–(37) являются не только необходимыми, но и достаточными для существования F .

Итак, пусть

$$F L_1(p_1, \bar{p}_1) L_2(p_2, \bar{p}_2) = L_1(p_3, \bar{p}_3) L_2(p_4, \bar{p}_4) F. \quad (38)$$

Будем искать оператор F в виде $F(X_1 X_2^{-1})$, где X_1, X_2 – повышающие матрицы, действующие в первом и во втором N -мерном пространствах, соответственно.

Как показано в приложении Г, матрица F действительно существует и выражается через $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2$ при помощи формулы

$$\frac{F(\bar{p}_1, p_2; \omega^k)}{F(\bar{p}_1, p_2; 1)} = \Omega(\bar{p}_1, p_2)^{-k} \prod_{j=1}^k \frac{\bar{c}_1 b_2 - \bar{a}_1 d_2 \omega^j}{\bar{b}_1 c_2 - \bar{d}_1 a_2 \omega^j},$$

где для удобства введена функция

$$\Omega(p_1, p_2) = \sqrt[N]{\frac{b_1^N c_2^N - d_1^N a_2^N}{c_1^N b_2^N - a_1^N d_2^N}}.$$

Подчеркнем, что F зависит только от параметров $\bar{p}_1$ и p_2 . При этом действие F выражается формулами

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1, & \bar{a}_3 &= \bar{a}_1, & a_4 &= a_2, & \bar{a}_4 &= \bar{a}_2, \\ b_3 &= b_1, & \bar{b}_3 &= \bar{b}_1, & b_4 &= b_2, & \bar{b}_4 &= \bar{b}_2, \\ c_3 &= c_1, & d_3 &= d_1, & \bar{c}_4 &= \bar{c}_2, & \bar{d}_4 &= \bar{d}_2, \\ \bar{c}_3 &= \Omega(\bar{p}_1, p_2) \frac{c_2 \bar{b}_1}{b_2}, & c_4 &= \Omega(\bar{p}_1, p_2)^{-1} \frac{\bar{c}_1 b_2}{\bar{b}_1}, \\ \bar{d}_3 &= \Omega(\bar{p}_1, p_2)^{-1} \frac{d_2 \bar{a}_1}{a_2}, & d_4 &= \Omega(\bar{p}_1, p_2) \frac{\bar{d}_1 a_2}{\bar{a}_1}. \end{aligned} \tag{39}$$

Очевидно, что полученное выражение для F является калибровочно-инвариантным.

Кроме указанных выше калибровочных степеней свободы, в случае произведения двух L -операторов имеется еще одна симметрия. А именно, между этими операторами можно вставить единицу, т.е.

$$L_1(p_3, \bar{p}_3) L_2(p_4, \bar{p}_4) = L_1(p_3, \bar{p}_3) M^{-1} M L_2(p_4, \bar{p}_4),$$

где M — произвольная (2×2) -матрица.

Пусть

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\bar{b}_1}{b_2} & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix}.$$

Применим означенную симметрию к нашим L -операторам. В результате получим произведение новых L -операторов, параметры которых связаны с $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1, & \bar{a}_3 &= a_2, & a_4 &= \bar{a}_1, & \bar{a}_4 &= \bar{a}_2, \\ b_3 &= b_1, & \bar{b}_3 &= b_2, & b_4 &= \bar{b}_1, & \bar{b}_4 &= \bar{b}_2, \\ c_3 &= c_1, & d_3 &= d_1, & \bar{c}_4 &= \bar{c}_2, & \bar{d}_4 &= \bar{d}_2, \\ \bar{c}_3 &= \Omega(\bar{p}_1, p_2) c_2, & c_4 &= \Omega(\bar{p}_1, p_2)^{-1} \bar{c}_1, \\ \bar{d}_3 &= \Omega(\bar{p}_1, p_2)^{-1} d_2, & d_4 &= \Omega(\bar{p}_1, p_2) \bar{d}_1. \end{aligned} \tag{40}$$

Выражение для $F(\omega^k)$, конечно, при этом остается неизменным.

Случай, исследованный в работе [6], является частным случаем рассмотренной выше схемы при

$$p_3 = p_1, \quad \bar{p}_3 = p_2, \quad p_4 = \bar{p}_1, \quad \bar{p}_4 = \bar{p}_2.$$

В частности, нетрудно получить F -оператор, фигурирующий в соотношении (7). При этом на параметры $\bar{p}_1, p_2$ налагается дополнительное ограничение

$$\Omega(\bar{p}_1, p_2) = 1.$$

Полученные операторы G и F удовлетворяют соотношению, обобщающему соотношение “звезда–треугольник” для киральной модели Поттса [2]. Именно, имеет место соотношение

$$G(\tilde{q}, \tilde{r}; Z_1)F(\tilde{p}, r; X_1 X_2^{-1})G(p, q; Z_1) = \mu F(p', q'; X_1 X_2^{-1})G(p, r'; Z_1)F(q, r; X_1 X_2^{-1}), \quad (41)$$

где μ – константа, а параметры, от которых зависят сплетающие операторы, связаны с p, q, r при помощи следующих формул:

$$\begin{cases} a'_r = a_r, \\ b'_r = b_r, \\ c'_r = \Omega(q, r)c_r, \\ d'_r = \Omega(q, r)^{-1}d_r, \end{cases} \quad \begin{cases} a'_q = a_q, \\ b'_q = b_q, \\ c'_q = \Omega(q, r)^{-1}c_q, \\ d'_q = \Omega(q, r)d_q, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_p = a_p, \\ b'_p = b_p, \\ c'_p = \Lambda(p, r')^{-1}c_p, \\ d'_p = \Lambda(p, r')d_p, \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{a}_q = a_q, \\ \tilde{b}_q = b_q, \\ \tilde{c}_q = \Lambda(p, q)c_q, \\ \tilde{d}_q = \Lambda(p, q)^{-1}d_q, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_p = a_p, \\ \tilde{b}_p = b_p, \\ \tilde{c}_p = \Lambda(p, q)^{-1}c_p, \\ \tilde{d}_p = \Lambda(p, q)d_p, \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{a}_r = a_r, \\ \tilde{b}_r = b_r, \\ \tilde{c}_r = \Omega(\tilde{p}, r)c_r, \\ \tilde{d}_r = \Omega(\tilde{p}, r)^{-1}d_r. \end{cases}$$

Доказательство этого утверждения приводится в приложении Д.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вышеизложенное дает основание говорить о существовании новой алгебраической структуры, связанной с циклическими представлениями алгебры матриц монодромии.

Рассмотрим алгебру Хопфа с образующими $L_i^j(p_1, p_2)$, $i, j = 0, 1$, $p_1, p_2 \in \mathbb{C}^4$. Копроизведение задается формулой

$$\Delta(L_i^j) = (L_i^k)_1 (L_k^j)_2.$$

Соотношения в алгебре Хопфа имеют вид

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2) L_i^j(p_1, p_2) &= L_i^j(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) G(p_1, p_2), \\ F(\bar{p}_1, p_2) (L_i^k(p_1, \bar{p}_1))_1 (L_k^j(p_2, \bar{p}_2))_2 &= (L_i^k(p_1, \tilde{p}_1))_1 (L_k^j(\tilde{p}_2, \bar{p}_2))_2 F(\bar{p}_1, p_2), \\ (L_i^k(p_1, \bar{p}_1))_1 (L_k^j(p_2, \bar{p}_2))_2 &= (L_i^k(p_1, \bar{p}_1))_1 M_k^l (M^{-1})_l^m (L_m^j(p_2, \bar{p}_2))_2, \end{aligned}$$

где M – произвольная диагональная двумерная матрица, а параметры в правых частях соотношений выражаются через параметры в левых частях при помощи формул (28), (40). По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

7. АЛГЕБРА Q -ОПЕРАТОРОВ

Наряду с введенным в разделе 4 оператором $Q(u)$, связанным с циклическими представлениями алгебры матриц монодромии в форме Бажанова–Строганова, можно рассматривать также оператор

$$Q(u) = \text{tr}_0 L_{10}(u) L_{20}(u) \dots L_{k0}(u),$$

где след берется по N -мерному пространству, а $L_{i0}(u)$ – циклические представления алгебры матриц монодромии в форме Тарасова.

Операторы $Q(u)$ образуют алгебру, соотношения в которой следуют из свойств операторов $L(u)$:

$$Q(\lambda p_1, \bar{p}_1) = \lambda^k Q(p_1, \bar{p}_1), \quad (42)$$

$$Q(p_1, \mu \bar{p}_1) = \mu^k Q(p_1, \bar{p}_1), \quad (43)$$

$$Q(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) = Q(\lambda a_1, b_1, \lambda c_1, d_1, \lambda^{-1} \bar{a}_1, \bar{b}_1, \lambda^{-1} \bar{c}_1, \bar{d}_1), \quad (44)$$

$$Q(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) = Q(a_1, \mu b_1, c_1, \mu d_1, \bar{a}_1, \mu^{-1} \bar{b}_1, \bar{c}_1, \mu^{-1} \bar{d}_1), \quad (45)$$

$$Q(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) = Q(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \Lambda \bar{c}_1, \Lambda^{-1} \bar{d}_1, a_1, b_1, \Lambda^{-1} c_1, \Lambda d_1), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} Q(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) Q(a_2, b_2, c_2, d_2, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2) &= \\ = Q(a_1, b_1, c_1, d_1, \beta \bar{a}_1, \alpha \bar{b}_1, \alpha \bar{c}_1, \beta \bar{d}_1) Q(\beta^{-1} a_2, \alpha^{-1} b_2, \alpha^{-1} c_2, \beta^{-1} d_2, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} Q(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) Q(a_2, b_2, c_2, d_2, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2) &= \\ = Q(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, \Omega c_2, \Omega^{-1} d_2) Q(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \Omega^{-1} \bar{c}_1, \Omega \bar{d}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2), \end{aligned} \quad (48)$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ – произвольные числа, $\Lambda = \Lambda(p_1, \bar{p}_1)$, $\Omega = \Omega(\bar{p}_1, p_2)$.

Вывод всех этих соотношений приведен в приложении Е.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим несколько вопросов, которые могут стать темой будущих исследований.

Подход, использованный в этой работе, может быть применен в более общих случаях. А именно, было бы интересно исследовать элементарные изоморфизмы, сплетающие циклические представления алгебры матриц монодромии, связанной с эллиптической R -матрицей, а также с R -матрицей, отвечающей квантовой алгебре $U_q(sl_n)$.

Спектр трансфер-матрицы шестивершинной модели в корнях из единицы является вырожденным [5], [14]. Неодномерным собственным подпространствам трансфер-матрицы соответствуют некоторые конечномерные представления алгебры Q -операторов, которые действуют на этих пространствах нетривиальным образом, поскольку Q -операторы, вообще говоря, не коммутируют между собой.

В связи с этим исследование конечномерных представлений алгебры Q -операторов, задаваемой соотношениями (42)–(48), может пролить свет на свойства спектра оператора $T(u)$.

Также интересно было бы выяснить связь между алгеброй Q -операторов и симметрией $U(A_1^1)$, обнаруженной в работе [14]¹⁾.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

TQ -уравнение

Найдем ядро оператора $\mathcal{L}_{23}(v; p_1(v), p_2) = \tilde{\mathcal{L}}_{23}(v)$, где

$$p_1(v) = (a_1 v^{-1}, b_1, c_1, d_1 v), \quad p_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2).$$

Имеем

$$\tilde{\mathcal{L}}_{23}(v) = \begin{pmatrix} v^{-1}c_1c_2Z - b_1b_2vZ^{-1} & -v(b_1d_2Z^{-1} - c_1a_2Z)X \\ \omega v^{-1}X^{-1}(d_1b_2vZ^{-1} - a_1c_2v^{-1}Z) & d_1d_2Z^{-1} - a_1a_2\omega^2Z \end{pmatrix}.$$

Выберем базис $|\alpha\rangle$, $\alpha = 0, \dots, N-1 \pmod{N}$:

$$Z|\alpha\rangle = \omega^\alpha|\alpha\rangle, \quad X|\alpha\rangle = |\alpha+1\rangle.$$

Рассмотрим $2N$ -мерный вектор

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix},$$

где Φ_1, Φ_2 — N -мерные векторы. Действуя на вектор Ψ оператором $\tilde{\mathcal{L}}_{23}(v)$ и приравняв результат нулю, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (c_1c_2Z - b_1b_2v^2Z^{-1})\Phi_1 - v^2(b_1d_2Z^{-1} - c_1a_2Z)X\Phi_2 &= 0, \\ \omega X^{-1}v^{-1}(d_1b_2vZ^{-1} - a_1c_2v^{-1}Z)\Phi_1 + (d_1d_2Z^{-1} - a_1a_2\omega^2Z)\Phi_2 &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾После направления статьи в печать мы узнали, что изоморфизмы между представлениями алгебры монодромии в корнях из единицы изучались Пакуляком и Сергеевым для случая релятивистской цепочки Тоды [15].

Нетрудно увидеть, что эта система имеет решения тогда и только тогда, когда

$$v^2 = v_*^2 = \frac{c_2 d_2}{a_2 b_2}.$$

Векторами, образующими ядро, при этом являются

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} -d_2|\alpha\rangle \\ b_2|\alpha-1\rangle \end{pmatrix} = -d_2|0, \alpha\rangle + b_2|1, \alpha-1\rangle.$$

Теперь мы должны подействовать на векторы Ψ_α оператором $\tilde{\mathcal{L}}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u)$ (особо следует обратить внимание на то, что здесь можно пользоваться обычным матричным умножением по двумерному пространству).

Пусть

$$\tilde{\mathcal{L}}_{13}(uv_*) = \begin{pmatrix} A(uv_*) & B(uv_*) \\ C(uv_*) & D(uv_*) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{12}(u) = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{\mathcal{L}}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u) = \begin{pmatrix} a(u)A(uv_*) + c(u)B(uv_*) & b(u)A(uv_*) + d(u)B(uv_*) \\ a(u)C(uv_*) + c(u)D(uv_*) & b(u)C(uv_*) + d(u)D(uv_*) \end{pmatrix}.$$

Действуя каждым из четырех матричных элементов на вектор Ψ_α , получим, например,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{R})_0^0 \Psi_\alpha &= [a(u)A(uv_*) + c(u)B(uv_*)] [-d_2|0, \alpha\rangle + b_2|1, \alpha-1\rangle] = \\ &= -d_2(u\omega - u^{-1}\omega^{-1})(v_*^{-1}u^{-1}c_1c_2\omega^\alpha - b_1b_2uv_*\omega^{-\alpha})|0, \alpha\rangle + \\ &\quad + \omega b_2\{(u - u^{-1})(v_*^{-1}u^{-1}c_1c_2\omega^{\alpha-1} - b_1b_2uv_*\omega^{1-\alpha})|1, \alpha-1\rangle + \\ &\quad + u(\omega - \omega^{-1})(-uv_*)(b_1d_2\omega^{-\alpha} - c_1a_2\omega^\alpha)|0, \alpha\rangle\} = \\ &= (u - u^{-1})(v_*^{-1}u^{-1}c_1c_2\omega^{\alpha-1} - b_1b_2v_*u\omega^{1-\alpha})\Psi_\alpha. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{R})_1^1 \Psi_\alpha &= (u - u^{-1})(d_1d_2\omega^{-\alpha} - a_1a_2\omega^{2+\alpha})\Psi_\alpha, \\ (\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{R})_0^1 \Psi_\alpha &= (u - u^{-1})(-v_*u)(b_1d_2\omega^{-\alpha-1} - c_1a_2\omega^{\alpha+1})\Psi_{\alpha+1}, \\ (\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{R})_1^0 \Psi_\alpha &= (u - u^{-1})\omega v_*^{-1}u^{-1}(d_1b_2uv_*\omega^{1-\alpha} - a_1c_2u^{-1}v_*^{-1}\omega^{\alpha-1})\Psi_{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что ядро $\tilde{\mathcal{L}}_{23}(v_*)$ действительно является инвариантным подпространством относительно оператора $\tilde{\mathcal{L}}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u)$.

Нетрудно увидеть, что полученная N -мерная матрица пропорциональна $\tilde{\mathcal{L}}(uv_*\omega)$, т. е.

$$\tilde{\mathcal{L}}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u)|_{\text{Ker } \mathcal{L}_{23}} = (u - u^{-1})\tilde{\mathcal{L}}(uv_*\omega).$$

Рассмотрим теперь векторы, принадлежащие дополнению *ядра*. Если провести факторизацию по векторам самого ядра, то это дополнение также должно быть инвариантным пространством относительно оператора $\tilde{\mathcal{L}}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u)$. В качестве базиса выберем векторы $\Psi'_\alpha = |0, \alpha\rangle$. Проведя вычисления, получим (по $\text{mod } \Psi_\alpha$):

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{R})_0^0 \Psi'_\alpha &= (u\omega - u^{-1}\omega^{-1})(v_*^{-1}u^{-1}c_1c_2\omega^\alpha - b_1b_2v_*u\omega^{-\alpha})\Psi'_\alpha, \\(\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{R})_1^1 \Psi'_\alpha &= (u\omega - u^{-1}\omega^{-1})(d_1d_2\omega^{1-\alpha} - a_1a_2\omega^{1+\alpha})\Psi'_\alpha, \\(\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{R})_0^1 \Psi'_\alpha &= (u\omega - u^{-1}\omega^{-1})(-v_*u)(b_1d_2\omega^{-\alpha} - c_1a_2\omega^\alpha)\Psi'_{\alpha+1}, \\(\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{R})_1^0 \Psi'_\alpha &= (u\omega - u^{-1}\omega^{-1})\omega v_*^{-1}u^{-1}(d_1b_2uv_*\omega^{-\alpha} - a_1c_2u^{-1}v_*^{-1}\omega^\alpha)\Psi'_{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, полученная N -мерная матрица пропорциональна $\tilde{\mathcal{L}}(uv_*\omega^{-1})$, т. е.

$$\tilde{\mathcal{L}}_{13}(uv_*)\mathcal{R}_{12}(u)|_{(\text{Ker } \mathcal{L}_{23})^\perp} = (u\omega - u^{-1}\omega^{-1})\tilde{\mathcal{L}}(uv_*\omega^{-1}).$$

Таким образом, мы получили, что условия (13) действительно выполняются. При этом

$$\lambda = \omega, \quad \phi_1 = u - u^{-1}, \quad \phi_2 = u\omega - u^{-1}\omega^{-1}$$

и имеет место TQ -уравнение

$$\mathcal{Q}(u)T(u) = (u - u^{-1})^n \mathcal{Q}(u\omega) + (u\omega - u^{-1}\omega^{-1})^n \mathcal{Q}(u\omega^{-1}),$$

где

$$\mathcal{Q}(u) = \text{tr}_3 \tilde{\mathcal{L}}_{13}(u) \tilde{\mathcal{L}}_{1'3}(u) \dots \tilde{\mathcal{L}}_{1^{(n)}3}(u).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Условия эквивалентности представлений. Кривая Ферма

Пусть N – нечетное число. Докажем, что представления $L_1(u, p_1, p_2)L_2(u, p_3, p_4)$ и $L_1(u, p_3, p_4)L_2(u, p_1, p_2)$ в общем случае эквивалентны тогда и только тогда, когда можно выбрать p_i ($i = 1, 2, 3, 4$), удовлетворяющие условиям

$$\frac{a_i^N \pm b_i^N}{c_i^N \pm d_i^N} = \lambda_\pm,$$

определяющим кривую Ферма.

Для удобства везде в дальнейшем произведем следующие переобозначения:

$$a_i^N \rightarrow a_i, \quad b_i^N \rightarrow b_i, \quad c_i^N \rightarrow c_i, \quad d_i^N \rightarrow d_i.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\langle L(u, p_1, p_2) \rangle &= \begin{pmatrix} c_1c_2 - b_1b_2u & -u(b_1d_2 - c_1a_2) \\ d_1b_2 - a_1c_2 & d_1d_2 - a_1a_2u \end{pmatrix}, \\ \langle L(u, p_3, p_4) \rangle &= \begin{pmatrix} c_3c_4 - b_3b_4u & -u(b_3d_4 - c_3a_4) \\ d_3b_4 - a_3c_4 & d_3d_4 - a_3a_4u \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Два представления $L_\pi, L_{\pi'}$ будут эквивалентными, если существует изоморфизм P такой, что

$$L_{\pi'} = PL_\pi P^{-1},$$

т.е. имеется взаимно однозначное соответствие между элементами в L_π и $L_{\pi'}$. Центральные элементы $\langle L_\pi \rangle$ и $\langle L_{\pi'} \rangle$ при этом должны быть одинаковы [6]. Если $\pi = \pi_1 \times \pi_2$, $\pi' = \pi_2 \times \pi_1$, то

$$\langle L_{\pi_1} \rangle \langle L_{\pi_2} \rangle = \langle L_{\pi_2} \rangle \langle L_{\pi_1} \rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\langle L(u, p_1, p_2) \rangle \langle L(u, p_3, p_4) \rangle = \langle L(u, p_3, p_4) \rangle \langle L(u, p_1, p_2) \rangle.$$

Перемножая матрицы, получаем пять уравнений, из которых только три являются независимыми:

$$\begin{aligned} \frac{b_1 d_2 - c_1 a_2}{d_1 b_2 - a_1 c_2} &= \frac{b_3 d_4 - c_3 a_4}{d_3 b_4 - a_3 c_4} = s, \\ \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{b_1 d_2 - c_1 a_2} &= \frac{a_3 a_4 - b_3 b_4}{b_3 d_4 - c_3 a_4} = q, \\ \frac{c_1 c_2 - d_1 d_2}{b_1 d_2 - c_1 a_2} &= \frac{c_3 c_4 - d_3 d_4}{b_3 d_4 - c_3 a_4} = r, \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

где s, q, r — произвольные константы.

Эта система уравнений имеет решения при следующих ограничениях на p_i :

$$\begin{aligned} b_1 d_2 - c_1 a_2 &= s(d_1 b_2 - a_1 c_2), \\ a_1 a_2 - b_1 b_2 &= q(b_1 d_2 - c_1 a_2), \\ c_1 c_2 - d_1 d_2 &= r(b_1 d_2 - c_1 a_2). \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Оказывается, что (Б.2) может выполняться, если p_1 и p_2 — точки кривой, полученной пересечением двух плоскостей (проективная симметрия оператора L), т.е.

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_i + \beta_1 b_i + \gamma_1 c_i + \delta_1 d_i &= 0, \\ \alpha_2 a_i + \beta_2 b_i + \gamma_2 c_i + \delta_2 d_i &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Найдем эти многообразия. Из последней системы имеем

$$\begin{aligned} a_i &= \lambda_i c_i + \mu_i d_i, \\ b_i &= \nu_i c_i + \eta_i d_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Подставляем (Б.3) в (Б.2). Получаем систему уравнений для коэффициентов

$$\begin{aligned} \eta_1 &= s\eta_2, \quad \lambda_2 = s\lambda_1, \quad \nu_1 = \mu_2, \quad \nu_2 = \mu_1, \\ 1 &= -r\lambda_2, \quad -1 = r\eta_1, \quad \nu_1 = \mu_2, \\ \lambda_1 \lambda_2 - \nu_1 \nu_2 &= -q\lambda_2, \quad \mu_1 \mu_2 - \eta_1 \eta_2 = q\eta_1, \\ \lambda_1 \mu_2 - \nu_1 \eta_2 &= q\nu_1 - q\mu_2, \quad \mu_1 \lambda_2 - \nu_2 \eta_1 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \mu_2 = \mu, & \mu_1 &= \nu_2 = \nu, \\ \eta_1 &= \lambda_2 = \lambda, & \lambda_1 &= \eta_2 = \eta, \\ \lambda &= -\frac{1}{r}, & \nu\mu &= (q + \eta)\lambda, & s &= 1.\end{aligned}$$

Кроме того, поскольку точки p_1 и p_2 лежат на одной и той же кривой, то

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta.$$

Следовательно,

$$\lambda = \eta, \quad \nu = \mu.$$

В итоге получаем, что

$$\frac{a_1 + b_1}{c_1 + d_1} = \frac{a_2 + b_2}{c_2 + d_2}, \quad \frac{a_1 - b_1}{c_1 - d_1} = \frac{a_2 - b_2}{c_2 - d_2}.$$

Аналогично можно установить, что

$$\frac{a_3 + b_3}{c_3 + d_3} = \frac{a_4 + b_4}{c_4 + d_4}, \quad \frac{a_3 - b_3}{c_3 - d_3} = \frac{a_4 - b_4}{c_4 - d_4}.$$

Вернемся к старым обозначениям

$$p_i \rightarrow p_i^N, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

В силу (Б.1) в общем случае точки p_1, p_2, p_3, p_4 могут быть связаны следующими двумя способами:

$$\begin{aligned}\text{а)} \quad & \frac{a_1^N \pm b_1^N}{c_1^N \pm d_1^N} = \frac{a_2^N \pm b_2^N}{c_2^N \pm d_2^N} = \frac{a_3^N \pm b_3^N}{c_3^N \pm d_3^N} = \frac{a_4^N \pm b_4^N}{c_4^N \pm d_4^N}, \\ \text{б)} \quad & \frac{a_1^N \pm b_1^N}{c_1^N \pm d_1^N} = \frac{a_2^N \pm b_2^N}{c_2^N \pm d_2^N} = \frac{a_3^N \mp b_3^N}{c_3^N \mp d_3^N} = \frac{a_4^N \mp b_4^N}{c_4^N \mp d_4^N}.\end{aligned}$$

Это обусловлено наличием двух корней уравнения

$$\nu^2 = \mu^2 = -\frac{q}{r} + \frac{1}{r^2}.$$

Однако следует вспомнить про симметрии оператора $L(u, p_1, p_2)$, когда можно сделать замену

$$b_1 \rightarrow \lambda b_1, \quad b_2 \rightarrow \lambda^{-1} b_2, \quad d_1 \rightarrow \lambda d_1, \quad d_2 \rightarrow \lambda^{-1} d_2,$$

и $L(u, p_1, p_2)$ не изменится. Посредством подобной замены с $\lambda = -1$ случай “б” сводится к случаю “а” (напомним, что число N нечетно).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Условия эквивалентности представлений в общем случае

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\phi &= d^N \bar{b}^N, & \psi &= a^N \bar{c}^N, & \beta &= b^N \bar{b}^N, \\ \delta &= a^N \bar{a}^N, & \mu &= \frac{c^N d^N}{a^N b^N}, & \lambda &= \frac{\bar{c}^N \bar{d}^N}{\bar{a}^N \bar{b}^N}.\end{aligned}$$

Тогда $\langle L(u, p, \bar{p}) \rangle$ можно записать в виде

$$\langle L(u, p, \bar{p}) \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\mu\beta\psi}{\phi} - \beta u & -u \left(\frac{\lambda\beta\delta}{\psi} - \frac{\mu\beta\delta}{\phi} \right) \\ \phi - \psi & \frac{\lambda\delta\phi}{\psi} - \delta u \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два представления алгебры L -операторов $L(u, p_1, \bar{p}_1)$ и $L(u, p_2, \bar{p}_2)$ и найдем условия, при которых они эквивалентны. Необходимым условием эквивалентности двух представлений является совпадение центров этих представлений:

$$\langle L(u, p_1, \bar{p}_1) \rangle = \langle L(u, p_2, \bar{p}_2) \rangle. \quad (\text{B.1})$$

Отсюда получаем, приравнявая коэффициенты при степенях u , что

$$\delta_1 = \delta_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \phi_1 - \psi_1 = \phi_2 - \psi_2, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\lambda_1 \phi_1}{\psi_1} = \frac{\lambda_2 \phi_2}{\psi_2}. \quad (\text{B.3})$$

Кроме того, из (B.1) следует, что

$$\det \langle L(u, p_1, \bar{p}_1) \rangle = \det \langle L(u, p_2, \bar{p}_2) \rangle.$$

В последнем уравнении левая и правая части являются полиномами второй степени от u . Корни левого полинома суть

$$u_1 = \lambda_1, \quad \bar{u}_1 = \mu_1,$$

а корни правого –

$$u_2 = \lambda_2, \quad \bar{u}_2 = \mu_2.$$

Ясно, что корни левой и правой частей должны совпадать. Будем рассматривать следующий вариант:

$$\lambda_1 = \mu_2, \quad \lambda_2 = \mu_1. \quad (\text{B.4})$$

Записывая (В.2)–(В.4) с помощью параметров a_i, b_i, c_i, d_i , получим

$$\begin{aligned} a_1^N \bar{a}_1^N &= a_2^N \bar{a}_2^N, & b_1^N \bar{b}_1^N &= b_2^N \bar{b}_2^N, \\ \frac{\bar{c}_1^N d_1^N}{\bar{a}_1^N \bar{b}_1^N} &= \frac{c_2^N d_2^N}{a_2^N b_2^N}, & \frac{\bar{c}_2^N d_2^N}{\bar{a}_2^N \bar{b}_2^N} &= \frac{c_1^N d_1^N}{a_1^N b_1^N}, \\ \frac{d_1^N \bar{d}_1^N}{a_1^N \bar{a}_1^N} &= \frac{d_2^N \bar{d}_2^N}{a_2^N \bar{a}_2^N}, \\ d_1^N \bar{b}_1^N - a_1^N \bar{c}_1^N &= d_2^N \bar{b}_2^N - a_2^N \bar{c}_2^N. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь два представления алгебры L -операторов $L_1(u, p_1, \bar{p}_1) \times L_2(u, p_2, \bar{p}_2)$ и $L_1(u, p_3, \bar{p}_3) L_2(u, p_4, \bar{p}_4)$. Мы хотим найти условия, при которых эти два представления будут эквивалентными. Имеем

$$\det \langle L_1(u, p_1, \bar{p}_1) \rangle \det \langle L_2(u, p_2, \bar{p}_2) \rangle = \det \langle L_1(u, p_3, \bar{p}_3) \rangle \det \langle L_2(u, p_4, \bar{p}_4) \rangle. \quad (\text{В.5})$$

Каждый детерминант является квадратным многочленом относительно u . Нетрудно найти его корни

$$u = \lambda, \quad \bar{u} = \mu.$$

В итоге мы видим, что левая часть (В.5) обращается в нуль при $u_1 = \lambda_1, \bar{u}_1 = \mu_1, u_2 = \lambda_2, \bar{u}_2 = \mu_2$, а правая – при $u_3 = \lambda_3, \bar{u}_3 = \mu_3, u_4 = \lambda_4, \bar{u}_4 = \mu_4$. Ясно, что должно быть совпадение корней слева и справа. Будем рассматривать следующий вариант:

$$\mu_2 = \lambda_3, \quad \mu_1 = \mu_3, \quad \lambda_2 = \lambda_4, \quad \lambda_1 = \mu_4.$$

Тогда

$$\langle L_1(u, p_1, \bar{p}_1) \rangle \langle L_2(u, p_2, \bar{p}_2) \rangle = \langle L_1(u, p_3, \bar{p}_3) \rangle \langle L_2(u, p_4, \bar{p}_4) \rangle, \quad (\text{В.6})$$

Отдельным сомножителям в левой и правой частях уравнения (В.6) отвечают соответственно корни

$$\mu_1, \lambda_1; \quad \mu_2, \lambda_2; \quad \mu_1, \mu_2; \quad \lambda_1, \lambda_2.$$

Мы видим, что два корня λ_1 и μ_2 поменялись местами.

Пусть $u = \lambda_2$. Подействуем слева на вектор Ψ_1 , который является правым нулевым вектором оператора $\langle L_2(\lambda_2, p_2, \bar{p}_2) \rangle$:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \delta_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \langle L_2(\lambda_2, p_2, \bar{p}_2) \rangle \Psi_1 = 0,$$

обеими частями уравнения (В.6). Этот вектор является правым нулевым и для оператора $\langle L_2(\lambda_2, p_4, \bar{p}_4) \rangle$. Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{\delta_2}{\psi_2} = \frac{\delta_4}{\psi_4}.$$

Пусть теперь $u = \mu_1$. Подействуем, но теперь уже справа, обеими частями (В.6) на левый нулевой вектор Ψ_2 оператора $\langle L_1(\mu_1, p_1, \bar{p}_1) \rangle$:

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \mu_1 \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 \langle L_1(\mu_1, p_1, \bar{p}_1) \rangle = 0.$$

Поскольку этот вектор является также левым нулевым вектором оператора $\langle L_1(\mu, p_3, \bar{p}_3) \rangle$, то

$$\frac{\phi_1}{\beta_1} = \frac{\phi_3}{\beta_3}.$$

Очевидно, (В.6) останется справедливым, если вставить между двумя множителями в правой части $1 = M M^{-1}$, где M – двумерная матрица

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Используя эту калибровочную симметрию, можно положить

$$\beta_3 = \beta_1, \quad \delta_4 = \delta_2,$$

откуда сразу же следует, что

$$\phi_3 = \phi_1, \quad \psi_4 = \psi_2.$$

Непосредственно перемножая матрицы в (В.6) и приравнявая коэффициенты при степенях u , нетрудно получить

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \beta_2, & \delta_3 &= \delta_1, \\ \psi_3 &= \phi_4 \frac{\mu_2 \psi_1}{\lambda_1 \phi_2}, \\ \psi_3 \beta_2 - \delta_1 \phi_4 &= \psi_1 \beta_2 - \delta_1 \phi_2. \end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\phi_4 = \frac{\lambda_1 \phi_2 (\beta_2 \psi_1 - \delta_1 \phi_2)}{\beta_2 \mu_2 \psi_1 - \lambda_1 \delta_1 \phi_2}, \quad \psi_3 = \frac{\mu_2 \psi_1 (\beta_2 \psi_1 - \delta_1 \phi_2)}{\beta_2 \mu_2 \psi_1 - \lambda_1 \delta_1 \phi_2}. \quad (\text{В.7})$$

Собирая все полученные равенства, кроме (В.7), получим

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_3, & \beta_2 &= \beta_4, & \delta_1 &= \delta_3, & \delta_2 &= \delta_4, \\ \phi_1 &= \phi_3, & \psi_2 &= \psi_4, & \mu_2 &= \lambda_3, \\ \mu &= \mu_3, & \lambda_2 &= \lambda_4, & \lambda_1 &= \mu_4. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Вычисление оператора F

Матричное уравнение (38) можно записать в виде системы уравнений, соответствующих четырем матричным элементам. Имеем

$$L_1(p_1, \bar{p}_1)L_2(p_2, \bar{p}_2) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} F(X_1X_2^{-1})(A_1A_2 + B_1C_2) &= (A_3a_4 + B_3C_4)F(X_1X_2^{-1}), \\ F(X_1X_2^{-1})(A_1B_2 + B_1D_2) &= (A_3B_4 + B_3D_4)F(X_1X_2^{-1}), \\ F(X_1X_2^{-1})(C_1A_2 + D_1C_2) &= [C_3a_4 + D_3C_4]F(X_1X_2^{-1}), \\ F(X_1X_2^{-1})(C_1B_2 + D_1D_2) &= (C_3B_4 + D_3D_4)F(X_1X_2^{-1}). \end{aligned} \quad (\Gamma.1)$$

Выбираем базис $|k_1, k_2\rangle$, $k_1, k_2 = 0, \dots, N-1 \pmod{N}$,

$$\begin{aligned} X_1|k_1, k_2\rangle &= \omega^{k_1}|k_1, k_2\rangle, & X_2|k_1, k_2\rangle &= \omega^{k_2}|k_1, k_2\rangle, \\ Z_1|k_1, k_2\rangle &= |k_1 - 1, k_2\rangle, & Z_2|k_1, k_2\rangle &= |k_1, k_2 - 1\rangle. \end{aligned}$$

В этом базисе матрица $F(X_1X_2^{-1})$ является диагональной. Вычислим ее ненулевые матричные элементы. Подставляя выражения для A_i, B_i, C_i, D_i , $i = 1, 2$, получим, например, для первого уравнения системы (Г.1)

$$\begin{aligned} F(X_1X_2^{-1})[(c_1\bar{c}_1Z_1 - b_1\bar{b}_1u)(c_2\bar{c}_2Z_2 - b_2\bar{b}_2u) - \\ - u(b_1\bar{d}_1 - c_1\bar{a}_1Z_1)X_1X_2^{-1}(d_2\bar{b}_2 - a_2\bar{c}_2Z_2)] = \\ = [(c_3\bar{c}_3Z_1 - b_3\bar{b}_3u)(c_4\bar{c}_4Z_2 - b_4\bar{b}_4u) - \\ - u(b_3\bar{d}_3 - c_3\bar{a}_3Z_1)X_1X_2^{-1}(d_4\bar{b}_4 - a_4\bar{c}_4Z_2)]F(X_1X_2^{-1}). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, действуя обеими частями этого уравнения на вектор $|k_1, k_2\rangle$, приравнявая коэффициенты при линейно независимых векторах и при разных степенях u , получим

$$\begin{aligned} c_1\bar{c}_1c_2\bar{c}_2 &= c_3\bar{c}_3c_4\bar{c}_4, & b_1\bar{b}_1b_2\bar{b}_2 &= b_3\bar{b}_3b_4\bar{b}_4, \\ b_1\bar{d}_1d_2\bar{b}_2 &= b_3\bar{d}_3d_4\bar{b}_4, & c_1\bar{a}_1a_2\bar{c}_2 &= c_3\bar{a}_3a_4\bar{c}_4, \\ F(\omega^{k+1}) &= \frac{b_3\bar{c}_4(\bar{d}_3a_4\omega^{k+1} - \bar{b}_3c_4)}{b_1\bar{c}_2(\bar{d}_1a_2\omega^{k+1} - \bar{b}_1c_2)}F(\omega^k) = \frac{c_1\bar{b}_2(\bar{a}_1d_2\omega^{k+1} - \bar{c}_1b_2)}{c_3\bar{b}_4(\bar{a}_3d_4\omega^{k+1} - \bar{c}_3b_4)}F(\omega^k), \end{aligned}$$

где $F(\omega^k)$, $k = 0, \dots, N-1$, — диагональные матричные элементы матрицы F . Используя полученные выше ограничения на a_i, b_i, c_i, d_i , сводим эту систему к системе

$$\begin{aligned} \bar{c}_1c_2 &= \bar{c}_3c_4, & \bar{d}_1d_2 &= \bar{d}_3d_4, \\ F(\omega^{k+1}) &= \frac{\bar{d}_3a_4\omega^{k+1} - \bar{b}_3c_4}{\bar{d}_1a_2\omega^{k+1} - \bar{b}_1c_2}F(\omega^k) = \frac{\bar{a}_1d_2\omega^{k+1} - \bar{c}_1b_2}{\bar{a}_3d_4\omega^{k+1} - \bar{c}_3b_4}F(\omega^k). \end{aligned}$$

Легко видеть, что второе уравнение можно вывести из первого, используя соотношения

$$\bar{c}_3 \bar{d}_3 = c_2 d_2 \frac{\bar{a}_3 \bar{b}_3}{a_2 b_2}, \quad c_4 d_4 = \bar{c}_1 \bar{d}_1 \frac{a_2 b_2}{\bar{a}_1 \bar{b}_1}.$$

Поскольку $F(\omega^k)$ – однозначная функция, две дроби, через которые она выражается, необходимо приравнять друг к другу. Поэтому

$$(\bar{d}_3 a_4 \omega^{k+1} - \bar{b}_3 c_4)(\bar{a}_3 d_4 \omega^{k+1} - \bar{c}_3 b_4) = (\bar{d}_1 a_2 \omega^{k+1} - \bar{b}_1 c_2)(\bar{a}_1 d_2 \omega^{k+1} - \bar{c}_1 b_2).$$

Приравнивая коэффициенты при разных степенях ω , найдем

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \bar{d}_1 a_2 d_2 &= \bar{a}_3 \bar{d}_3 a_4 d_4, & \bar{b}_1 \bar{c}_1 b_2 c_2 &= \bar{b}_3 \bar{c}_3 b_4 c_4, \\ \bar{a}_1 \bar{b}_1 a_2 b_2 \left(\frac{\bar{c}_1 \bar{d}_1}{\bar{a}_1 \bar{b}_1} + \frac{c_2 d_2}{a_2 b_2} \right) &= a_4 b_4 \bar{a}_3 \bar{b}_3 \left(\frac{\bar{c}_3 \bar{d}_3}{\bar{a}_3 \bar{b}_3} + \frac{c_4 d_4}{a_4 b_4} \right). \end{aligned}$$

Если опять учесть ограничения на a_i, b_i, c_i, d_i , то отсюда получим

$$\bar{c}_1 c_2 = \bar{c}_3 c_4, \quad (Г.2)$$

т.е. то же, что и раньше. Кроме того, из очевидного равенства

$$F(\omega^{N+k}) = F(\omega^k)$$

следует, что

$$\bar{c}_1^N b_2^N - \bar{a}_1^N d_2^N = \bar{c}_3^N b_4^N - \bar{a}_3^N d_4^N. \quad (Г.3)$$

Покажем, что формулы (Г.2) и (Г.3) следуют из формул (33)–(37). Имеем

$$\begin{aligned} \psi_3 &= a_3^N \bar{c}_3^N = \frac{c_2^N \bar{b}_1^N a_1^N}{b_2^N} \frac{b_2^N \bar{c}_1^N - \bar{a}_1^N d_2^N}{c_2^N \bar{b}_1^N - a_2^N \bar{d}_1^N}, \\ \phi_4 &= d_4^N \bar{b}_4^N = \frac{\bar{d}_1^N a_2^N \bar{b}_2^N}{\bar{a}_1^N} \frac{b_2^N \bar{c}_1^N - \bar{a}_1^N d_2^N}{c_2^N \bar{b}_1^N - a_2^N \bar{d}_1^N}. \end{aligned}$$

Выражая отсюда $\bar{c}_3^N$ и d_4^N и подставляя в (Г.3), получим тождественное равенство. Кроме того, имеем

$$\frac{\bar{c}_3}{d_4} = \frac{c_2}{\bar{d}_1} \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_1}{a_2 b_2}.$$

Умножая последнее уравнение на

$$c_4 d_4 = \bar{c}_1 \bar{d}_1 \frac{a_2 b_2}{\bar{a}_1 \bar{b}_1},$$

получим (Г.2). Таким образом,

$$F(\omega^{k+1}) = \sqrt[N]{\frac{\bar{d}_1^N a_2^N - \bar{b}_1^N c_2^N}{\bar{a}_1^N d_2^N - \bar{c}_1^N b_2^N} \frac{\bar{c}_1 b_2 - \bar{a}_1 d_2 \omega^{k+1}}{\bar{b}_1 c_2 - \bar{d}_1 a_2 \omega^{k+1}}} F(\omega^k).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Уравнение “звезда–треугольник”

Здесь мы докажем соотношение “звезда–треугольник”

$$G(\tilde{q}, \tilde{p}; Z_1)F(\tilde{p}, r; X_1 X_2^{-1})G(p, q; Z_1) = \mu F(p', q'; X_1 X_2^{-1})G(p, r'; Z_1)F(q, r; X_1 X_2^{-1}) \quad (Д.1)$$

и найдем μ . Имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} (p, q)(r, s) & \xrightarrow{F} & (p, r')(q', s) & \xrightarrow{G} & (r'', p')(q', s) \\ \downarrow G & & & & \downarrow F \\ (\tilde{q}, \tilde{p})(r, s) & \xrightarrow{F} & (\tilde{q}, \tilde{r})(p'', s) & \xrightarrow{G} & (r'', q'')(p'', s). \end{array}$$

Если параметры r'', q'', p'' , полученные двумя разными способами, совпадут между собой с точностью до калибровочных преобразований, то равенство (Д.1) действительно будет иметь место.

Напомним определения функций $\Lambda(p_1, p_2)$ и $\Omega(p_1, p_2)$:

$$\Lambda(p_1, p_2) = \sqrt[N]{\frac{b_1^N d_2^N - c_1^N a_2^N}{d_1^N b_2^N - a_1^N c_2^N}}, \quad \Omega(p_1, p_2) = \sqrt[N]{\frac{c_1^N b_2^N - a_1^N d_2^N}{b_1^N c_2^N - d_1^N a_2^N}}.$$

Проведем вычисления для первой цепочки рассматриваемой диаграммы.

Для $(p, q)(r, s) \xrightarrow{F} (p, r')(q', s)$ имеем

$$\begin{aligned} a'_r &= a_r, & a'_q &= a_q, \\ b'_r &= b_r, & b'_q &= b_q, \\ c'_r &= \Omega(q, r)c_r, & c'_q &= \Omega(q, r)^{-1}c_q, \\ d'_r &= \Omega(q, r)^{-1}d_r, & d'_q &= \Omega(q, r)d_q. \end{aligned}$$

Для $(p, r')(q', s) \xrightarrow{G} (r'', p')(q', s)$ имеем

$$\begin{aligned} a''_r &= a'_r, & a'_p &= a_p, \\ b''_r &= b'_r, & b'_p &= b_p, \\ c''_r &= \Lambda(p, r')c'_r, & c'_p &= \Lambda(p, r')^{-1}c_p, \\ d''_r &= \Lambda(p, r')^{-1}d'_r, & d'_p &= \Lambda(p, r')d_p. \end{aligned}$$

Для $(r'', p')(q', s) \xrightarrow{F} (r'', q'')(p'', s)$ имеем

$$\begin{aligned} a''_q &= a'_q, & a''_p &= a'_p, \\ b''_q &= b'_q, & b''_p &= b'_p, \\ c''_q &= \Omega(p', q')c'_q, & c''_p &= \Omega(p', q')^{-1}c'_p, \\ d''_q &= \Omega(p', q')^{-1}d'_q, & d''_p &= \Omega(p', q')d'_p. \end{aligned}$$

Теперь проведем вычисления для второй цепочки диаграммы.

Для $(p, q)(r, s) \xrightarrow{G} (\tilde{q}, \tilde{p})(r, s)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_q &= a_q, & \tilde{a}_p &= a_p, \\ \tilde{b}_q &= b_q, & \tilde{b}_p &= b_p, \\ \tilde{c}_q &= \Lambda(p, q)c_q, & \tilde{c}_p &= \Lambda(p, q)^{-1}c_p, \\ \tilde{d}_q &= \Lambda(p, q)^{-1}d_q, & \tilde{d}_p &= \Lambda(p, q)d_p. \end{aligned}$$

Для $(\tilde{q}, \tilde{p})(r, s) \xrightarrow{F} (\tilde{q}, \tilde{r})(p'', s)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_r &= a_r, & a_p'' &= \tilde{a}_p, \\ \tilde{b}_r &= b_r, & b_p'' &= \tilde{b}_p, \\ \tilde{c}_r &= \Omega(\tilde{p}, r)c_r, & c_p'' &= \Omega(\tilde{p}, r)^{-1}\tilde{c}_p, \\ \tilde{d}_r &= \Omega(\tilde{p}, r)^{-1}d_r, & d_p'' &= \Omega(\tilde{p}, r)\tilde{d}_p. \end{aligned}$$

Для $(\tilde{q}, \tilde{r})(p'', s) \xrightarrow{G} (r'', q'')(p'', s)$ имеем

$$\begin{aligned} a_r'' &= \tilde{a}_r, & a_q'' &= \tilde{a}_q, \\ b_r'' &= \tilde{b}_r, & b_q'' &= \tilde{b}_q, \\ c_r'' &= \Lambda(\tilde{q}, \tilde{r})\tilde{c}_r, & c_q'' &= \Lambda(\tilde{q}, \tilde{r})^{-1}\tilde{c}_q, \\ d_r'' &= \Lambda(\tilde{q}, \tilde{r})^{-1}\tilde{d}_r, & d_q'' &= \Lambda(\tilde{q}, \tilde{r})\tilde{d}_q. \end{aligned}$$

Остается проверить, что полученные L -операторы действительно совпадают. Сравнивая параметры r'' , q'' , p'' , полученные двумя разными способами, заключаем, что равенство (41) выполняется, если

$$\begin{aligned} \Lambda(p, r')\Omega(p', q') &= \Lambda(p, q)\Omega(\tilde{p}, r), \\ \Omega(q, r)\Lambda(p, r') &= \Omega(\tilde{p}, r)\Lambda(\tilde{q}, \tilde{r}). \end{aligned} \tag{Д.2}$$

Нетрудно показать, что равенства (Д.2) выполняются тождественно.

Таким образом, мы доказали соотношение (Д.1) для некоторого, пока неизвестного параметра μ . Найдем μ^N . Очевидно, что

$$\mu^N = \frac{\det G(p, q) \det F(\tilde{p}, r) \det G(\tilde{q}, \tilde{r})}{\det F(q, r) \det G(p, r') \det F(p', q')}.$$

Детерминанты матриц $G(p_1, p_2)$ и $F(p_1, p_2)$ нетрудно найти. Каждую из них можно по отдельности привести к диагональному виду (не одновременно), причем в каждом случае диагональные матричные элементы даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{G(p_1, p_2; \omega^k)}{G(p_1, p_2; 1)} &= \left(\frac{b_1^N d_2^N - c_1^N a_2^N}{d_1^N b_2^N - a_1^N c_2^N} \right)^{\frac{k}{N}} \prod_{j=1}^k \frac{d_1 b_2 - a_1 c_2 \omega^j}{b_1 d_2 - c_1 a_2 \omega^j}, \\ \frac{F(p_1, p_2; \omega^k)}{F(p_1, p_2; 1)} &= \left(\frac{b_1^N c_2^N - d_1^N a_2^N}{c_1^N b_2^N - a_1^N d_2^N} \right)^{\frac{k}{N}} \prod_{j=1}^k \frac{c_1 b_2 - a_1 d_2 \omega^j}{b_1 c_2 - d_1 a_2 \omega^j}. \end{aligned}$$

Положим

$$G(p_1, p_2; 1) = F(p_1, p_2; 1) = 1.$$

Тогда

$$\det G(p_1, p_2) = \left(\frac{b_1^N d_2^N - c_1^N a_2^N}{d_1^N b_2^N - a_1^N c_2^N} \right)^{\frac{N-1}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{j=1}^k \frac{d_1 b_2 - a_1 c_2 \omega^j}{b_1 d_2 - c_1 a_2 \omega^j},$$

$$\det F(p_1, p_2) = \left(\frac{b_1^N c_2^N - d_1^N a_2^N}{c_1^N b_2^N - a_1^N d_2^N} \right)^{\frac{N-1}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{j=1}^k \frac{c_1 b_2 - a_1 d_2 \omega^j}{b_1 c_2 - d_1 a_2 \omega^j}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Соотношения в алгебре Q -операторов

Соотношения в алгебре Q -операторов следуют из свойств циклических представлений алгебры L -операторов. Покажем это.

Соотношения (42)–(45) становятся очевидными, если вспомнить, что

$$Q(u) = \text{tr}_0 L_{10}(u) L_{20}(u) \dots L_{n0}(u)$$

и имеют место симметрии

$$\begin{aligned} L(\lambda p_1, \bar{p}_1) &= \lambda L(p_1, \bar{p}_1), \\ L(p_1, \mu \bar{p}_1) &= \mu L(p_1, \bar{p}_1), \\ L(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) &= L(\lambda a_1, b_1, \lambda c_1, d_1, \lambda^{-1} \bar{a}_1, \bar{b}_1, \lambda^{-1} c_1, \bar{d}_1), \\ L(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) &= L(a_1, \mu b_1, c_1, \mu d_1, \bar{a}_1, \mu^{-1} \bar{b}_1, \bar{c}_1, \mu^{-1} \bar{d}_1), \end{aligned}$$

где λ, μ – произвольные числа. Соотношение (47) следует из симметрии

$$L_1(p_1, \bar{p}_1) L_2(p_2, s) = L_1(p_1, \bar{p}_1) M M^{-1} L_2(p_2, s),$$

или, записывая более подробно,

$$\begin{aligned} L_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) L_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2) = \\ = L_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \beta \bar{a}_1, \alpha \bar{b}_1, \alpha \bar{c}_1, \beta \bar{d}_1) L_2(\beta^{-1} a_2, \alpha^{-1} b_2, \alpha^{-1} c_2, \beta^{-1} d_2, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2), \end{aligned}$$

где α, β – произвольные числа. Здесь матрица

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Соотношение (46) получается из равенства

$$GL(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) G^{-1} = L(a_1, b_1, \Lambda c_1, \Lambda^{-1} d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \Lambda^{-1} \bar{c}_1, \Lambda \bar{d}_1),$$

где

$$\Lambda = \Lambda(p_1, \bar{p}_1) = \sqrt[N]{\frac{b_1^N \bar{d}_1^N - c_1^N \bar{a}_1^N}{d_1^N \bar{a}_1^N - a_1^N \bar{c}_1^N}},$$

а соотношение (48) – из равенства

$$\begin{aligned} FL_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1) L_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2) F^{-1} = \\ = L_1(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, \Omega c_2, \Omega^{-1} d_2) L_2(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \Omega^{-1} \bar{c}_1, \Omega \bar{d}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2), \end{aligned}$$

где

$$\Omega = \Omega(\bar{p}_1, p_2) = \sqrt[N]{\frac{\bar{c}_1^N b_2^N - \bar{a}_1^N d_2^N}{b_1^N c_2^N - d_1^N a_2^N}}.$$

Благодарности. Мы благодарны Б. Фейгину и Ю. Строганову за полезные обсуждения. Один из нас (А. О.) благодарен В. Бажанову за обсуждение свойства факторизации R -матрицы киральной модели Поттса. Работа выполнена при поддержке следующих грантов: РФФИ (№ 01-02-16686; № 99-01-01169; № 00-15-96579), CRDF-RP1 № 2254, INTAS № 00-00055.

Список литературы

- [1] *R. J. Baxter.* Ann. Phys. 1972. V. 70. P. 193; P. 323; 1973. V. 76. P. 48.
- [2] *R. J. Baxter, J. H. H. Perk, H. Au-Yang.* Phys. Lett. A. 1988. V. 128. P. 138.
- [3] *H. Au-Yang, B. M. McCoy, J. H. H. Perk, S. Tang, M. L. Yan.* Phys Lett. A. 1987. V. 123. P. 219.
- [4] *R. J. Baxter, V. V. Bazhanov, J. H. H. Perk.* Int. J. Mod. Phys. B. 1990. V. 4. № 5. P. 803.
- [5] *V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov.* J. Stat. Phys. 1990. V. 51. P. 799.
- [6] *V. O. Tarasov.* Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. 1B. P. 963.
- [7] *V. Pasquier, M. Gaudin.* J. Phys. A: Math. Gen. 1992. V. 25. P. 5243.
- [8] *V. B. Kuznetsov, E. K. Sklyanin.* J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31. P. 2241.
- [9] *E. K. Sklyanin.* Bäcklund transformations and Baxter's Q -operator. nlin.SI/0009009.
- [10] *G. P. Pronko.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 212. P. 687.
- [11] *П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин.* Записки научных семинаров ЛОМИ. 1980. Т. 101. С. 101; *P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin.* J. Soviet Math. 1983. V. 23. P. 2435.
- [12] *M. Jimbo.* Lett. Math. Phys. 1986. V. 11. P. 247.
- [13] *M. Jimbo.* Topics from Representations of $U_q(\{g\})$ – An Introductory Guide to Physicists. Preprint Kyoto University, Japan, 1991.
- [14] *T. Deguchi, K. Fabricius, B. M. McCoy.* J. Stat. Phys. 2001. V. 102. P. 701; cond-mat/9912141.
- [15] *S. Pakuliak, S. Sergeev.* Relativistic Toda chain at root of unity II. Modified Q -operator. nlin.SI/0107062; *С. М. Сергеев.* Вполне интегрируемые дискретные системы в трех измерениях. Дисс. д.ф.-м.н. Дубна: ОИЯИ, 2001.

Поступила в редакцию 9.X.2001 г.