Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мещеряков, Д. В. Мещеряков, Римановы поверхности некоторых статических дисперсионных моделей и проективные пространства, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 3, 414–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:54:14

© 2002 г.

В. А. Мещеряков*, Д. В. Мещеряков†

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ НЕКОТОРЫХ СТАТИЧЕСКИХ ДИСПЕРСИОННЫХ МОДЕЛЕЙ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Показано, что аналитическое продолжение элементов S -матрицы, являющихся мероморфными функциями энергии ω в комплексной плоскости с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$, с физического листа на нефизические приводит к системе нелинейных разностных уравнений. Глобальный анализ этой системы выполнен в проективных пространствах P_N и P_{N+1} . Обсуждается связь между пространствами P_N и P_{N+1} . Получены некоторые частные решения исходной системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о рассеянии адронов при низких энергиях до настоящего времени привлекает к себе внимание [1]. Успешное развитие КХД ставит вопрос о справедливости аналитических свойств амплитуд адрон-адронных процессов, доказанных ранее для сильных взаимодействий. Недавно в серии работ Омэ [2] было показано, что они остаются справедливыми и в КХД. Мы будем рассматривать нерелятивистский предел дисперсионных соотношений, известный под названием *статические уравнения* [3], и ограничимся изучением этого типа уравнений, сведя их к нелинейной краевой задаче [4]. Она имеет вид ряда условий на функции S_i — матричные элементы S -матрицы.

Условия 1.

А. $S_i(z)$ — мероморфные функции в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$, т.е. единственными особенностями этих функций в данной области являются нули и полюсы.

Б. $S_i^*(z) = S_i(z^*)$.

В. $|S_i(\omega + i0)|^2 = 1$ при $\omega \geq 1$, $S_i(\omega + i0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} S_i(\omega + i\epsilon)$.

Г. $S_i(-z) = \sum_{j=1}^N A_{ij} S_j(z)$.

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

† Московский государственный университет, Москва, Россия.

E-mail: meshcher@recrep.phys.msu.su

Действительные значения переменной z являются полной энергией ω релятивистской частицы, рассеивающейся на фиксированном центре. Требование мероморфности функций $S_i(z)$ возникает как следствие статического предела задачи рассеяния [5]. Условие упругой унитарности 1В справедливо лишь на правом разрезе плоскости z . На левом разрезе функции $S_i(z)$ заданы условиями перекрестной симметрии 1Г. Матрица перекрестной симметрии A определяется группой, относительно которой инвариантна S -матрица; для ряда групп она известна [4]. Цель настоящей работы состоит в формулировке способа изучения римановых поверхностей ряда статических дисперсионных моделей.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ S-МАТРИЦЫ НА НЕФИЗИЧЕСКИЕ ЛИСТЫ

Запишем условия 1 в матричной форме. Для этого введем столбец

$$S^{(0)}(z) = [S_1(z), S_2(z), \dots, S_N(z)]^T,$$

где верхний индекс обозначает физический лист римановой поверхности S -матрицы. Условия 1А, Б, Г относятся к физическому листу, а условие унитарности 1В может быть продолжено на комплексные значения ω . При этом оно, так же как условие 1В, имеет покомпонентный вид

$$S_i^{(0)}(z)S_i^{(1)}(z) = 1$$

и осуществляет аналитическое продолжение S -матрицы на первый нефизический лист поверхности Римана. Матричная форма записи условия унитарности 1В получается при введении нелинейной операции инверсии I согласно формуле

$$IS(z) = \left[\frac{1}{S_1(z)}, \frac{1}{S_2(z)}, \dots, \frac{1}{S_N(z)} \right].$$

В результате условия 1 приобретают следующий вид.

Условия 2.

А. $S^{(0)}(z)$ – столбец N мероморфных функций в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$, т.е. единственными особенностями этих функций в данной области являются нули и полюсы.

Б. $S^{(0)*}(z) = S^{(0)}(z^*)$.

В. $S^{(1)}(z) = IS^{(0)}(z)$.

Г. $S^{(0)}(-z) = AS^{(0)}(z)$.

Аналитическое продолжение на нефизические листы определим следующим образом:

$$S^{(p)}(z) = (IA)^p S^{(0)}(z(-1)^p). \quad (1)$$

С помощью определения (1) условия унитарности $2V$ и перекрестной симметрии 2Γ легко продолжаются на нефизические листы:

$$IS^{(p)}(z) = S^{(1-p)}(z), \quad AS^{(p)}(z) = S^{(-p)}(-z), \quad (2)$$

и имеет место формула

$$(IA)^q S^{(p)}(z) = S^{(q+p)}(z(-1)^q). \quad (3)$$

Мотивировка определения (1) содержится в известном решении [5] задачи, определяемой условиями 1, для двухрядной матрицы

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это решение для S -матрицы $S(z)$ имеет вид

$$S(z) = \begin{pmatrix} W(W-2)/(W^2-1) \\ W(W+1)/(W^2-1) \end{pmatrix} D(z), \quad (4)$$

где $W = w + i\sqrt{z^2-1}\beta(z)$, $w = (1/\pi) \arcsin z$, $\beta(z) = -\beta(-z)$ – мероморфная функция и $D(z) = D(-z)$ – функция Бляшке переменной $\zeta = (1 + i\sqrt{z^2-1})/z$. Функция Бляшке имеет вид

$$D(\zeta[z]) = \zeta^\lambda \prod_n \frac{|\zeta_n|}{\zeta_n} \frac{\zeta_n - \zeta}{1 - \zeta_n^* \zeta},$$

где λ – порядок нуля, а множество нулей $\{\zeta_n\}$ симметрично относительно начала координат и осей $\text{Im } \zeta = 0$, $\text{Re } \zeta = 0$, причем $|\zeta_n| < 1$. Кроме решения (4) условия 1 допускают тривиальное решение – столбец одинаковых функций Бляшке

$$S(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} D(z).$$

Таким образом, условия 2 не определяют вид римановой поверхности $S(z)$ однозначно. В решении (4) риманова поверхность $S(z)$ бесконечнолистна за счет функции w , и справедливы равенства

$$S^{(0)}(z) = S(W)|_{|w| \leq 1/2}, \quad S^{(\pm n)}(z(-1)^{(\pm n)}) = S(W)|_{|w \pm n| \leq 1/2},$$

которые позволяют получить следующую форму уравнений (3):

$$(IA)^n S(W) = S(W+n), \quad (AI)^n S(W) = S(W-n). \quad (5)$$

Уравнения (5) – система нелинейных автономных разностных уравнений, которые естественно назвать динамической формой статических дисперсионных соотношений. Поэтому и равенствам (3) можно присвоить это же наименование. В отличие от уравнений (5), они образуют систему нелинейных разностных уравнений, в которых аргументом является номер листа римановой поверхности, а энергетическая переменная z фигурирует как параметр.

3. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

На примере двухрядного решения (4) видно, что решение задачи, определяемой условиями 1, вообще говоря, задается $N + 1$ целыми функциями, N из которых удовлетворяют условию перекрестной симметрии 1Г, а последняя симметрична по z и обеспечивает выполнение условия унитарности 1В. Условия 1А, Б, Г однородны и могут рассматриваться в проективных пространствах P_{N-1} и P_N . Определим операцию нелинейной инверсии так, чтобы она была корректной в этих пространствах [6], и обозначим ее через I_p , где

$$I_p = \prod_{j=1, i \neq j}^m S_j, \quad m = N - 1, N.$$

Переформулируем задачу, определяемую условиями 1, в этих пространствах. В пространстве P_{N-1} матрица перекрестной симметрии имеет заданный условиями 1 вид, а в пространстве P_N ее порядок увеличивается на единицу, т.е.

$$A_{N-1} = A, \quad A_N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A_N – блочная матрица. В результате вместо условий 1 получаем набор следующих требований на столбец из m функций.

Условия 3.

А. $S^{(0)}(z)$ – столбец m мероморфных функций в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$, т.е. единственными особенностями этих функций в данной области являются нули и полюсы.

Б. $S^{(0)*}(z) = S^{(0)}(z^*)$.

В. $S^{(1)}(z) = I_p S^{(0)}(z)$.

Г. $S^{(0)}(-z) = A_m S^{(0)}(z)$.

Проиллюстрируем схему решения двухрядного случая (4) на языке проективных пространств P_1, P_2 . Обозначим через $(x_0, x_1) = (S_1, S_2)$ координаты точки x в пространстве P_1 . Введем на проективной прямой P_1 аффинную координату $X = x_0/x_1$. Полагая в формуле (1) $z = 0$, получим закон продолжения координаты $X^{(0)}$ с физического листа на первый нефизический лист:

$$X^{(1)} = \frac{2X^{(0)} + 1}{-X^{(0)} + 4}. \quad (6)$$

Дробно-линейное преобразование (6) можно возвести в n -ю степень и из условия перекрестной симметрии 3Г найти

$$X^{(0)} = -2, \quad X^{(n)} = \frac{n-2}{n+1}. \quad (7)$$

Таким образом, одно из условий перекрестной симметрии 3Γ является лишним. Вывод справедлив и для матриц перекрестной симметрии размерности 3×3 .

Решение двухрядной задачи на прямой P_1 позволяет определить лишь отношение функций S_1 и S_2 . Сами функции можно найти из решения ее на проективной плоскости P_2 . Проективные координаты точки $x = (x_0, x_1, x_2)$ на P_2 запишем в базисе, явно учитывающем перекрестную симметрию:

$$x_0 = s - 2a, \quad x_1 = s + a, \quad x_2 = c, \quad (8)$$

где a – антисимметричная, а s, c – симметричные функции z .

Рассматривая оператор $(I_p A_2)^n$ в базисе s, a, c , легко убедиться в том, что между s, a, c существует соотношение

$$s^2 - a^2 - sc = 0, \quad (9)$$

инвариантное относительно операторов I_p и A_2 по отдельности.

Другими словами, уравнение (9) на P_2 определяет инвариантную кривую C , любая точка которой не покидает ее под действием преобразований I_p и A_2 . В базисе x_0, x_1, x_2 уравнение кривой C имеет вид

$$x_1^2 + 2x_0x_1 - 2x_1x_2 - x_0x_2 = 0. \quad (10)$$

С помощью уравнений (7) и (10) легко найти, что

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{n}{n-1}, \quad (11)$$

и тем самым определить полностью функции S_1, S_2 . В процессе решения не было использовано условие унитарности $1B$, учет которого позволяет полностью воспроизвести формулу (4).

Обсудим вопрос о соотношении описаний двухрядной задачи, определяемой условиями 1, в пространствах P_1 и P_2 . На проективной плоскости P_2 решение представлено инвариантной кривой (10). Она неприводима и, как всякая алгебраическая кривая второго порядка, рациональна. В аффинных координатах она имеет вид

$$x = \frac{x_0}{x_2}, \quad y = \frac{x_1}{x_2}, \quad x^2 + 2xy - 2x - y = 0.$$

Если построить пучок прямых $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1$ с базисной точкой (x_0, y_0) на кривой (10), то координаты второй точки пересечения прямых пучка с кривой (10) будут рациональными функциями $k = \lambda_1/\lambda_0$:

$$x = \frac{-(x_0 + 2y_0) + 2 + k}{1 + 2k}, \quad y = y_0 + k(x - x_0).$$

С помощью специально подобранной параметризации

$$k = \frac{(-x_0 - 2y_0 + 1)n + x_0 + 2y_0 - 2}{n + 1},$$

зависящей от базисной точки пучка, функции x и y приводятся к формулам (7), (11). При коллинеациях в пространстве P_2 (линейных преобразованиях с ненулевым детерминантом) пучок прямых ведет себя как проективное пространство P_1 . Таким образом, проективное пространство P_1 представлено любым пучком прямых с базисной точкой на инвариантной кривой (10) пространства P_2 .

Исследование и построение инвариантных многообразий для задачи, определяемой условиями 1, с размерностью $N \geq 3$ проводилось в работах [4] с помощью рядов в окрестности точек покоя динамических систем (5). Проективные пространства позволяют по-новому подойти к этой задаче.

Рассмотрим задачу, определяемую условиями 1, с трехрядной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 5/3 \\ -1/3 & 1/2 & 5/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

которая описывает рассеяние двух частиц с угловыми моментами, равными единице. В пространстве P_3 матрица A_3 имеет три собственных значения $+1$ и одно -1 . Координаты точки x в P_3 могут быть выражены через три симметричные (s_1, s_2, s_3) и одну антисимметричную (a) функции z с помощью обычной коллинеации (автоморфизма проективного пространства P_3):

$$x_i = b_{ij}s_j + b_{i4}a.$$

Построим в P_3 плоскость, инвариантную относительно линейного преобразования координат x , порождаемого матрицей A_3 . Она имеет вид

$$c_0x_0 + c_1x_1 + (2c_0 + c_1)x_2 + c_2x_3 = 0. \quad (13)$$

Легко видеть, что частным случаем плоскости (13) будет плоскость $x_1 + x_2 = 0$, которая инвариантна относительно преобразования I_p . Эта плоскость является пространством P_2 , на котором задача, определяемая условиями 1 с матрицей (12), сводится к решаемой двухрядной задаче [7]. Плоскость $x_1 + x_2 = 0$ не проходит через точку покоя $\bar{x} = (1, 1, 1, 1)$ динамической системы, определяемой условиями 3, — неподвижную точку преобразования (3). Если потребовать, чтобы точка $\bar{x}$ лежала на плоскости (13), то получим уравнение

$$c_0x_0 + c_1x_1 + (2c_0 + c_1)x_2 - (3c_0 - 2c_1)x_3 = 0. \quad (14)$$

Плоскость (14) под действием преобразования I_p перейдет в поверхность третьего порядка в P_3 , которая не инвариантна относительно преобразования A_3 :

$$c_0x_1x_2x_3 + c_1x_0x_2x_3 + (2c_0 - c_1)x_0x_1x_3 - (3c_0 + 2c_1)x_0x_1x_2 = 0. \quad (15)$$

Пересечение плоскости (14) и поверхности (15) определит плоскую пространственную кривую C , которая, вообще говоря, не инвариантна относительно преобразования A_3 . Действительно, исключая x_3 из уравнений (14), (15), получим однородное уравнение третьей степени $G(x_0, x_1, x_2) = 0$. Функция G в пространстве P_2 в базисе s_1, s_2, a при произвольных c_0, c_1 будет содержать нечетные степени антисимметричной функции a . Коэффициент при a – квадратичная форма по s_1, s_2, a . Инвариантность плоской пространственной кривой C относительно преобразования A_3 требует обращения этой квадратичной формы в нуль. Как всякое уравнение второй степени, оно определяет рациональные функции s_1, s_2, a некоторого параметра t . Подставляя их в четную по a часть функции $G(x_0, x_1, x_2)$, получим уравнение третьей степени относительно t , которое имеет, вообще говоря, три решения. Только тождественное обращение его в нуль, т.е. приводимость G , гарантирует наличие инвариантной кривой. Приведем уравнение, определяющее коэффициенты c_0, c_1 :

$$R_{x_0}(G, G'_{x_1}) \equiv 0, \quad (16)$$

где R_{x_0} – результат G и G'_{x_1} по x_0 . Из уравнения (16) находим $c_0 = -1$, $c_1 = 3$ и функцию

$$G(x_0, x_1, x_2) = (-3x_1^2 + x_0x_1 + 3x_0x_2 - x_1x_2)(-x_0 + x_2) = 0, \quad (17)$$

определяющую приводимую кривую C . Первый сомножитель в уравнении (17) инвариантен относительно преобразований I_p и A_2 и совместно с уравнением (14) определяет известное решение [8] с конечным числом полюсов по w . Оно представлено в P_3 как пересечение плоскости

$$-x_0 + 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \quad (18)$$

и поверхности

$$-3x_1^2 + x_0x_1 + 3x_0x_2 - x_1x_2 = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) с помощью равенства (18) можно записать в форме $x_1x_3 = x_0x_2$, с помощью которой легко проверяется инвариантность равенства (18) относительно преобразования I_p . Второй сомножитель в уравнении (17) под действием преобразования A_3 переходит в $(-x_1 + x_2)$, и в результате имеем вырожденную квадратичную форму $(-x_0 + x_2)(-x_1 + x_2) = 0$, инвариантную относительно преобразований I_p и A_3 . Она определяет два пучка прямых, инвариантных относительно преобразования I_p и переходящих друг в друга под действием преобразования A_3 :

$$\begin{aligned} x_0 &= x_2, & \frac{x_0}{x_1} &= \frac{n+1/6}{n-7/6}; \\ x_1 &= x_2, & \frac{x_0}{x_1} &= \frac{n-3/2}{n+1/2}. \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нелинейная краевая задача о построении N -мерной (условие 1А), упруго-унитарной (условие 1В) и кроссинг-симметричной (условие 1Г) S -матрицы сформулирована в проективных пространствах P_{N-1} и P_N . В пространстве P_{N-1} ее можно рассматривать как результат проецирования исходной задачи, определяемой условиями 1, из аффинного пространства A_N в проективное пространство P_{N-1} , при котором игнорируется условие унитарности 1В. Условие аналитического продолжения S -матрицы на нефизические листы представлено в виде нелинейной автономной системы разностных уравнений, т.е. в динамической форме. Оно также может рассматриваться как нелинейное преобразование в пространствах A_N , P_{N-1} , P_N . Неподвижные точки этого преобразования включают, в частности, точку, соответствующую S -матрице без взаимодействия. В окрестности этой точки S -матрица изучалась с помощью степенных рядов по $1/w$, которые иногда удается просуммировать [4]. Использование техники проективных пространств дает возможность глобального исследования решений – построения инвариантных подпространств, содержащих искомые решения. Инвариантные подпространства определяются однородными функциями в проективных пространствах P_{N-1} и P_N , но не в аффинном пространстве A_N . Это утверждение расходится с выводом работы [9], согласно которому и в аффинном пространстве A_N инвариантные подпространства определяются однородными функциями. Предложенная выше геометрическая интерпретация краевой задачи, определяемой условиями 1, в проективных пространствах P_{N-1} и P_N и примеры, рассмотренные в работах [5], [8], указывают на необходимость отказаться от требования однородности функций, определяющих инвариантные подпространства в A_N .

В приложениях 1 и 2 продемонстрированы конкретные применения рассмотренной процедуры решения нелинейной краевой задачи, определяемой условиями 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Двухрядная матрица перекрестной симметрии в группе $SU(2)$ имеет вид

$$A_2 = \frac{1}{2l+1} \begin{pmatrix} -1 & 2l+2 \\ 2l & 1 \end{pmatrix}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Рассмотренная в статье матрица есть ее частный случай при $l = 1$. Приведем схему вычисления общего случая. На проективной прямой P_1 аффинная координата $X = x_0/x_1$ продолжается на первый нефизический лист по правилу

$$X^{(1)} = \frac{2lX^{(0)} + 1}{-X^{(0)} + (2l+2)}$$

и вместе с условием перекрестной симметрии приводит к следующему значению $X^{(n)}$:

$$X^{(n)} = \frac{n - (l+1)}{n+l}, \quad X^{(0)} = -\left(1 + \frac{1}{l}\right). \quad (20)$$

Тем самым на любом нефизическом листе определено отношение x_0/x_1 при $z = 0$, и для построения функций S_1, S_2 необходимо найти лишь x_1/x_2 . Обозначим это отношение через $\varphi = x_1/x_2$. Оно определяется из системы функциональных уравнений

$$\varphi^{(n)} \varphi^{(1-n)} = 1, \quad (21)$$

$$\frac{\varphi^{(n)}}{\varphi^{(-n)}} = \frac{n+l}{n-l}, \quad (22)$$

которые следуют из условий унитарности и перекрестной симметрии (2) на нефизических листах. Здесь использованы те из равенств (2), которые не применялись при получении формул (20). Уравнение (21) имеет очевидное решение в кольце мероморфных функций

$$\varphi^{(n)} = \frac{G(n)}{G(1-n)}, \quad (23)$$

где $G(n)$ – любая целая функция. Решение (23) может быть представлено в другой форме: $\ln \varphi^{(n)} = g(n-1/2)$, где $g(n-1/2)$ – нечетная функция своего аргумента. Последний вид функции $\ln \varphi^{(n)}$ удобен для решения уравнения (22), которое легко приводится к виду

$$g(n+1) + g(n) = \ln \frac{n+1/2+l}{n+1/2-l}. \quad (24)$$

Частное решение неоднородного разностного уравнения (24) может быть найдено с помощью последовательного применения замен неизвестной функции согласно формуле

$$g_m(n) = g_{m+1}(n) + \ln \frac{n+(-1)^m \alpha_{m+1}}{n-(-1)^m \alpha_{m+1}},$$

где $\alpha_k = 1/2 + l - k$ и $g_0(n) = g(n)$. Функция $g_k(n)$ удовлетворяет уравнению

$$g_k(n+1) + g_k(n) = \ln \frac{n+1/2+(-1)^k(l-k)}{n+1/2-(-1)^k(l-k)},$$

и очевидно, что $g_l(n+1) + g_l(n) = 0$. Общее решение этого однородного уравнения определяет функцию $D(z)$ в формуле (4), которая не влияет на вид инвариантных связей между x_0, x_1, x_2 . Поэтому положим $g_l = 0$ и получим для $\varphi^{(n)}$ выражение

$$\varphi^{(n)} = \prod_{m=1}^l \frac{n-1/2-(-1)^m(1/2+l-m)}{n-1/2+(-1)^m(1/2+l-m)}. \quad (25)$$

Исключая из уравнений (20) и (25) параметр n , получим уравнение, определяемое однородным полиномом степени $(l+1)$ от x_0, x_1, x_2 . При $l = 1$ оно дает уравнение (10).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Применим разработанный метод к задаче рассеяния псевдоскалярного мезона с единичным угловым моментом на фиксированном нуклоне с таким же угловым моментом. В этом случае матрица кроссинг-симметрии дается выражением (12). Разложим столбец $S(z)$ по собственным векторам матрицы A :

$$S(z) = s_1(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}s_2(z) \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\psi(z) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Функциональное уравнение (3) при $q = 1$, $p = 0$ в пределе $z \rightarrow \infty$ определяет фиксированные точки (точки покоя) задачи. Возвращаясь от базиса $s_1(z)$, $s_2(z)$, $\psi(z)$ к столбцу $S(z)$, имеем

$$S = \pm i \begin{pmatrix} -(2 \pm \sqrt{5}) \\ -(1 \pm \sqrt{5})/2 \\ (1 \pm \sqrt{5})/2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Из (27) видно, что все точки покоя лежат в плоскости $S_2 + S_3 = 0$. Данная плоскость является инвариантом преобразований инверсии I и кроссинг-симметрии A . Трехрядная матрица кроссинг-симметрии (12) на плоскости $S_2 + S_3 = 0$ переходит в двухрядную матрицу

$$A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

и задача сводится к отысканию двух функций $S_1(z)$, $S_2(z)$. Полагая $z = 0$ и вводя $X^{(k)} = S_1^{(k)}/S_2^{(k)}$, где k – номер листа римановой поверхности, получаем, что переход от физического листа $k = 0$ к листу с номером n есть дробно-линейное преобразование:

$$X^{(n)} = \sqrt{5} \frac{\sqrt{5}(X^{(0)} - 2)(y_-^n - y_+^n) + (X^{(0)} + 4)(y_-^n + y_+^n)}{(X^{(0)} + 4)(y_-^n - y_+^n) + \sqrt{5}(X^{(0)} - 2)(y_-^n + y_+^n)}, \quad (29)$$

где $y_{\pm} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Требования унитарности и кроссинг-симметрии $X^{(n)}$ приводят к следующему условию для определения $X^{(0)}$:

$$(X^{(0)} - 2)(X^{(0)} + 4) = 0. \quad (30)$$

Следовательно, мы получаем два различных решения, совместимых с требованиями унитарности и кроссинг-симметрии: $X^{(0)} = 2$ и $X^{(0)} = -4$.

Таким образом, на любом нефизическом листе римановой поверхности задачи, определяемой условиями 2 с матрицей (28), отношение S_1/S_2 определено при $z = 0$, и для построения S_1 и S_2 достаточно найти любую из этих функций. Введем обозначение

$S_2(n) = \Phi(n) = -s_2(n) + \psi(n)$, где функции s_2 и ψ были введены в (26). Эта функция удовлетворяет системе функциональных уравнений

$$\Phi(1-n)\Phi(n) = 1, \quad (31)$$

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi(-n)} = \begin{cases} -\frac{\operatorname{ch} \ln y_+^{n+1/2}}{\operatorname{ch} \ln y_+^{n-1/2}}, & X^{(0)} = 2, \\ -\frac{\operatorname{sh} \ln y_+^{n+1/2}}{\operatorname{sh} \ln y_+^{n-1/2}}, & X^{(0)} = -4. \end{cases} \quad (32)$$

При получении уравнения (32) было использовано соотношение (29). Уравнение (31) имеет решение

$$\Phi(n) = e^{g(n-1/2)}, \quad (33)$$

где $g(n)$ — любая нечетная функция, $g(n) = -g(-n)$. Подставляя (33) в (32), после замены $n \rightarrow n + 1/2$ получаем разностное уравнение для определения неизвестной функции $g(n)$:

$$g(n+1) + g(n) = \begin{cases} \ln(-1) \frac{\operatorname{ch}((n+1) \ln y_+)}{\operatorname{ch}(n \ln y_+)}, & X^{(0)} = 2, \\ \ln(-1) \frac{\operatorname{sh}((n+1) \ln y_+)}{\operatorname{sh}(n \ln y_+)}, & X^{(0)} = -4. \end{cases} \quad (34)$$

Решая уравнение (34) методом последовательных функциональных замен, получаем

$$g(n) = g_{-1}(n) + g_{\infty}(n) + \sum_{m=0}^{\infty} G_m(n), \quad (35)$$

где $g_{\infty}(n) = n \ln y_+$ и

$$G_m(n) = \begin{cases} \ln \frac{\operatorname{ch}((n+1+2m) \ln y_+) \operatorname{ch}((n-2(m+1)) \ln y_+)}{\operatorname{ch}((n-1-2m) \ln y_+) \operatorname{ch}((n+2(m+1)) \ln y_+)}, & X^{(0)} = 2, \\ \ln \frac{\operatorname{sh}((n+1+2m) \ln y_+) \operatorname{sh}((n-2(m+1)) \ln y_+)}{\operatorname{sh}((n-1-2m) \ln y_+) \operatorname{sh}((n+2(m+1)) \ln y_+)}, & X^{(0)} = -4. \end{cases} \quad (36)$$

Слагаемое $g_{-1}(n)$ введено для учета множителя (-1) в уравнении (34). Введем обозначение $\xi(n) = e^{g_{-1}(n)}$. Тогда функция $\xi(n)$ есть решение системы функциональных уравнений

$$\xi(n+1)\xi(n) = -1, \quad \xi(n)\xi(-n) = 1. \quad (37)$$

Общее решение этой системы выражается через тэта-функции. Здесь мы ограничимся вырожденным случаем

$$\xi(n) = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (38)$$

Используем теперь условие унитарности 1В. В результате функция n , как функция комплексной переменной z , является решением краевой задачи и имеет следующий вид:

$$n(z) = \frac{1}{\pi} \arcsin z + i \sqrt{z^2 - 1} \beta(z), \quad (39)$$

где $\beta(z) = -\beta(-z)$ — произвольная мероморфная функция. Из уравнения (39) следует, что риманова поверхность рассматриваемой модели имеет алгебраические точки ветвления при $z = \pm 1$ и логарифмическую точку ветвления на бесконечности. Теперь формулы (29), (30), (33)–(36), (38), (39) дают общее решение задачи, определяемой условиями 1, для матрицы кроссинг-симметрии (28).

Список литературы

- [1] *A. L. Machovariani, A. G. Rysetsky.* Nucl. Phys. A. 1990. V. 515. P. 621.
- [2] *R. Oehme.* Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 4209; Phys. Lett. B. 1990. V. 252. P. 14; J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 1995.
- [3] *G. F. Chew, F. E. Low.* Phys. Rev. 1956. V. 101. P. 1570.
- [4] *В. А. Мещеряков.* Статистические модели в дискретном подходе. Препринт № Р-2369. Дубна: ОИЯИ, 1965; *В. И. Журавлев, В. А. Мещеряков.* ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. С. 173.
- [5] *G. Wanders.* Nuovo Cimento. 1962. V. 23. P. 816; *В. А. Мещеряков.* ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 648.
- [6] *V. A. Meshcheryakov.* Solutions of nonlinear problems of dispersion relations in projective spaces. In: Proc. of Symp. in Ahrenshoop. Preprint PHE81-7. Zeuthen: Institut für Hoohenenergiephysik Akademie der Wissenschaften der DDR, 1981. P. 44.
- [7] *В. И. Журавлев, В. А. Мещеряков, К. В. Перух.* ЯФ. 1969. Т. 10. С. 168.
- [8] *В. А. Мещеряков.* ДАН СССР. 1967. Т. 174. С. 1054.
- [9] *M. Froissart, R. Omnes.* Compt. Rend. Acad. Sci. 1957. V. 245. P. 2203.

Поступила в редакцию 10.VII.2001 г.,
после доработки 17.X.2001 г.