Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Талалаев, Эллиптическая система Годена со спином, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 3, 426–441

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf310>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:02:31

© 2002 г.

Д. В. Талалаев*

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ГОДЕНА СО СПИНОМ

Изучается алгебро-геометрическая структура полученной ранее эллиптической системы Годена с двумя отмеченными точками. Эта система отождествлена с системой полюсной динамики конечнозонных решений матричного уравнения Дэви–Стюартсона. Также получены явные решения системы в терминах тэта-функций и переменные действие–угол. Обсуждаются геометрические аспекты вырождений данной системы.

ВВЕДЕНИЕ

Структура интегрируемых систем типа Калоджеро–Мозера вызывает особый интерес в связи с такими проблемами, как иерархии уравнений в частных производных [1], теория Зайберга–Виттена [2], [3], квазихопфовы деформации квантовых групп и др. Существуют различные способы описания гамильтоновой структуры таких систем. Одной из целей настоящей работы является унификация описания системы в виде системы Хитчина и подхода, связанного с универсальной алгебро-геометрической симплектической формой. Метод специальной обратной спектральной задачи был успешно применен в случае матричного уравнения Кадомцева–Петвиашвили [4]. В основе этого метода лежит исследование вспомогательной линейной задачи, возникающей вследствие представления Лакса для рассматриваемого уравнения. Функция Бейкера–Ахизера (ФБА) является корректно определенной функцией на спектральной алгебраической кривой, и ее специфические аналитические свойства оказываются достаточно ограниченными и позволяют восстановить потенциал и полюсную динамику ФБА в терминах тэта-функций на якобиане спектральной кривой. Такой же метод был применен в работе [5] при исследовании системы Руджинарса–Шнайдера со спином. Однако для широкого класса интегрируемых систем типа Хитчина явные решения до сих пор остаются неизвестными.

В разделе 1 мы рассматриваем конструкцию системы Хитчина на вырожденных кривых, в особенности эллиптическую двухточечную N -частичную систему Годена со спином, которая была рассмотрена в работах [6], [7]. В разделе 2 исследуются конечнозонные потенциалы матричного уравнения Дэви–Стюартсона. Получена система, описывающая динамику полюсов таких потенциалов, и построено алгебро-геометрическое

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: talalaev@gate.itep.ru

соответствие между фазовым пространством этой системы и пространством спектральных данных. В разделе 3 строятся выражения для ФБА в терминах тэта-функций, явное выражение для потенциала и решение системы полюсной динамики. Выражение для универсальной симплектической формы получено в разделе 4. Также показано, что система полюсной динамики является гамильтоновой и совпадает с эллиптической системой Годена со спином. В разделе 5 обсуждаются рациональное и специальное модулярное вырождения системы.

1. СИСТЕМА ГОДЕНА

Система Хитчина была построена в работе [8] как интегрируемая система на кокасательном расслоении к пространству модулей стабильных голоморфных расслоений на алгебраической кривой Σ . Фазовое пространство было получено гамильтоновой редукцией из пространства пар d''_A, Φ , где d''_A – оператор, определяющий голоморфную структуру на расслоении V , и Φ – эндоморфизм данного расслоения, точнее $\Phi \in \Omega^{0,1}(\Sigma, \text{End } V)$. Была проделана редукция по действию группы петель $GL_N(z)$, т.е. группы GL_N -значных функций на кривой Σ . Инвариантная симплектическая структура на этом пространстве имеет вид

$$\omega = \int_{\Sigma} \text{Tr } \delta \Phi \wedge \delta d''_A. \quad (1.1)$$

Нулевой уровень отображения момента описывается условием $d''_A \Phi = 0$, что означает, что Φ голоморфно по отношению к индуцированной голоморфной структуре на присоединенном расслоении $\text{End } V$. Оказывается, что величины $\text{Tr } \Phi^k$, рассматриваемые как векторнозначные функции на фазовом пространстве, находятся в инволюции в смысле скобки Пуассона, и их количество равно половине размерности фазового пространства. Эта система была построена в общей форме, явная параметризация в специальных случаях была получена в работах [9], [10].

Обобщенная конструкция системы Хитчина на особых кривых [6] предполагает более явное описание. Рассматривается пространство модулей стабильных или полустабильных расслоений V на алгебраической кривой с особенностями. Поле Хиггса в этом случае – это мероморфное сечение расслоения $\text{End } V$. Под голоморфным расслоением на особой кривой понимается голоморфное расслоение на ее нормализации с набором дополнительных данных, характеризующих расслоение над особыми точками.

Рассмотрим эллиптическую кривую с двумя отмеченными точками z_1, z_2 . Поле Хиггса в данном случае – это мероморфное сечение с двумя полюсами первого порядка в отмеченных точках. Пространство модулей $\mathcal{M}$ полустабильных расслоений на эллиптической кривой такого типа разлагается на пространство модулей полустабильных расслоений на нормализованной кривой и на конечномерное пространство дополнительных данных в отмеченных точках: $g_i \in \text{End}(V|_{z_i})$. Кокасательное расслоение $T^*\mathcal{M}$ приобретает дополнительные параметры $p_i \in T^*\text{End}(V|_{z_i})$, $i = 1, 2$. Модифицированная симплектическая форма равна

$$\omega = \int \delta \Phi \wedge \delta d''_A + \text{Tr}(\delta(g_1^{-1}p_1) \wedge \delta g_1 + \delta(g_2^{-1}p_2) \wedge \delta g_2), \quad (1.2)$$

нулевой уровень отображения момента задается выражением

$$\bar{\partial}\Phi + [A, \Phi] + p_1\delta^2(z_1) + p_2\delta^2(z_2) = 0. \quad (1.3)$$

Ограничимся на пространство полустабильных голоморфных расслоений ранга N , которые распадаются в прямую сумму линейных расслоений. В базисе, ассоциированном с данным разложением, можно зафиксировать матрицу A в диагональной форме с элементами $x_1, \dots, x_n$ на диагонали. Уравнение (1.3) приобретает вид

$$\bar{\partial}\Phi_{ij} + (x_i - x_j)\Phi_{ij} + (p_1)_{ij}\delta^2(z_1) + (p_2)_{ij}\delta^2(z_2) = 0. \quad (1.4)$$

Оно может быть решено, как и в работе [1], в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = \frac{1}{2\pi i} e^{(x_i - x_j) \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}}} \times \\ \times \left((p_1)_{ij} \frac{\sigma(x_i - x_j + z - z_1)}{\sigma(x_i - x_j)\sigma(z - z_1)} + (p_2)_{ij} \frac{\sigma(x_i - x_j + z - z_2)}{\sigma(x_i - x_j)\sigma(z - z_2)} \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\Phi_{ii} = \omega_i + (p_1)_{ii}\zeta(z - z_1) + (p_2)_{ii}\zeta(z - z_2), \quad (1.6)$$

где τ – модулярный параметр эллиптической кривой, σ – σ -функция Вейерштрасса и ω_i – дополнительные свободные параметры.

Теперь $\text{res}|_{z=z_1} 4\pi^2 \text{Tr } \Phi^2$ равен

$$\begin{aligned} H_1 = \sum_i \omega_i (p_1)_{ii} + \sum_i (p_1)_{ii} (p_2)_{ii} \zeta(z_1 - z_2) + \\ + \sum_{i \neq j} (p_1)_{ij} (p_2)_{ji} \frac{\sigma(x_i - x_j + z_1 - z_2)}{\sigma(x_i - x_j)\sigma(z_1 - z_2)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

и вычет в точке $z = z_2$ дает похожее выражение для H_2 , отличающееся от гамильтониана H_1 заменой z_1 и z_2 . Эти функции называются гамильтонианами эллиптической системы Годена со спином.

Изучим подробнее вопрос об интегрируемости данной системы. На пространстве модулей голоморфных расслоений на регулярной кривой [8] количество координат в пространстве величин $\text{Tr } \Phi^k$, т.е. количество дифференциалов Бельтрами, равно половине размерности $T^*\mathcal{M}$. Наш случай отличается от классического, поэтому мы подсчитаем размерности непосредственно. Коэффициенты главной части разложения функций $\text{Tr } \Phi^k$ в окрестности отмеченных точек являются интегралами. Эти функции являются эллиптическими, поэтому сумма их вычетов в отмеченных точках равна нулю. Таким образом, количество интегралов равно $N(N + 1)$. Количество координат на фазовом пространстве $x_i, \omega_i, (p_1)_{ij}, (p_2)_{ij}, (g_1)_{ij}, (g_2)_{ij}$ равно $2N + 4N^2$. Симплектическая форма (1.2) инвариантна относительно дополнительного действия группы $GL_N \times GL_N$ такого, что элемент (g_1^0, g_2^0) действует следующим образом:

$$g_1 \mapsto g_1 g_1^0, \quad g_2 \mapsto g_2 g_2^0.$$

Отображение момента для такого действия равно $\mu = ((g_1)^{-1} p_1 g_1, (g_2)^{-1} p_2 g_2)$, и мы можем зафиксировать его так, чтобы оно имело диагональный вид, это фиксирует

$2N(N-1)$ степеней свободы. Стабилизатор этого уровня момента состоит из диагональной подгруппы $\text{Diag} \times \text{Diag} \in G \times G$. Это означает, что выбор представителя в орбите стабилизатора уровня отображения момента фиксирует еще $2N$ степеней свободы. Размерность редуцированного фазового пространства равна $2N + 4N^2 - 2N(N-1) - 2N = 2N(N+1)$, так что количество интегралов в точности равно половине количества координат.

2. УРАВНЕНИЕ ДЭВИ–СТЮАРТСОНА

Как было показано в работе [11], уравнение Дэви–Стюартсона

$$iu_t + u_{xx} - u_{yy} + u\phi = 0, \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} = 2(|u|_{xx}^2 - |u|_{yy}^2) \quad (2.1)$$

может быть представлено в лагранжевой форме $\dot{L} = [L, M]$, где

$$L = \begin{pmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad z = x + iy.$$

Рассмотрим l -мерное обобщение вспомогательной линейной задачи для этого оператора:

$$\left(\partial_t + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \right) \Psi = D_A \Psi = 0, \quad (2.2)$$

где $A_1, A_2 - (l \times l)$ -матрицы, $d_1 = E$, $d_2 = -E$, E – единичная $(l \times l)$ -матрица, $\Psi - 2l$ -мерная вектор-функция. Мы исследуем задачу на квазиклассические решения матричного уравнения Дэви–Стюартсона следующего вида:

$$A_1 = \sum_{j=1}^n a_1^j b_1^{j+} \frac{\sigma(x - x_j + \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x - x_j)}, \quad A_2 = - \sum_{j=1}^n a_2^j b_2^{j+} \frac{\sigma(x - x_j - \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x - x_j)}, \quad (2.3)$$

где a_k^j и b_k^j являются l -векторами, b_k^{j+} обозначают ковекторы. Рассматриваются квазипериодические решения линейной задачи. Удобным базисом в пространстве таких функций с простыми полюсами по переменной x являются функции

$$\Phi_i(z, x) = \frac{\sigma(z - z_i + x)}{\sigma(x)\sigma(z - z_i)} e^{-\zeta(z)x},$$

где $z_2 - z_1 = \eta$. Обозначим Ψ_1 и Ψ_2 соответственно первые l и последние l компонент функции Ψ . Блоки матричного потенциала таковы, что отношение монодромий Ψ_1 и Ψ_2 равно монодромии A_1 . Анзац на собственные функции имеет вид

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^n S_i^j \Phi_i(z, x - x_j) e^{ky_+ + \frac{1}{k}y_-}, \quad (2.4)$$

где $y_{\pm} = (t \pm x)/2$. Рассматриваются также решения двойственного уравнения

$$\Psi^+ D_A = 0 \quad (2.5)$$

в виде

$$\Psi_i^+ = \sum_{j=1}^n S_i^{j+} \Phi_i(z, x_j - x) e^{-ky_+ - \frac{1}{k}y_-}. \quad (2.6)$$

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (2.2) имеет решение вида (2.4), а уравнение (2.5) имеет решение вида (2.6) тогда и только тогда, когда динамика полюсов описывается системой

$$\dot{a}_1^j + \lambda_1^j a_1^j + \sum_{l \neq j} a_1^l (b_1^l + a_2^j) \frac{\sigma(x_j - x_l + \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x_j - x_l)} = 0, \quad (2.7)$$

$$\dot{a}_2^j + \lambda_2^j a_2^j - \sum_{l \neq j} a_2^l (b_2^l + a_1^j) \frac{\sigma(x_j - x_l - \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x_j - x_l)} = 0, \quad (2.8)$$

$$\dot{b}_1^j - \lambda_1^j b_1^j + \sum_{l \neq j} b_1^l (b_2^j + a_1^l) \frac{\sigma(x_j - x_l + \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x_j - x_l)} = 0, \quad (2.9)$$

$$\dot{b}_2^j - \lambda_1^j b_2^j - \sum_{l \neq j} b_2^l (b_1^j + a_2^l) \frac{\sigma(x_j - x_l - \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x_j - x_l)} = 0, \quad (2.10)$$

$$\ddot{x}_j = \sum_{l \neq j} \left((b_1^l + a_2^j)(b_2^j + a_1^l) \frac{\sigma(x_j - x_l + \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x_j - x_l)} - (b_1^j + a_2^l)(b_2^l + a_1^j) \frac{\sigma(x_j - x_l - \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x_j - x_l)} \right), \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1^j - \dot{\lambda}_2^j &= \sum_{l \neq j} (b_2^j + a_1^l)(b_1^l + a_2^j) \frac{\sigma(x_j - x_l + \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x_j - x_l)} (\zeta(x_j - x_l) - \zeta(x_j - x_l + \eta) + 2\zeta(\eta)) + \\ &+ \sum_{l \neq j} (b_1^j + a_2^l)(b_2^l + a_1^j) \frac{\sigma(x_j - x_l - \eta)}{\sigma(\eta)\sigma(x_j - x_l)} (\zeta(x_j - x_l) - \zeta(x_j - x_l - \eta) - 2\zeta(\eta)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [4], [5], [12], подставляя выражение (2.4) в уравнение (2.2) и сокращая существенные особенности, получим коэффициенты разложения по x в окрестности точек $x = x_j$. Коэффициент при младшем члене порядка -2 равен

$$\begin{aligned} S_1^j(\dot{x}_j - 1) + a_1^j b_1^{j+} S_2^j &= 0, \\ S_2^j(\dot{x}_j + 1) + a_2^j b_2^{j+} S_1^j &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичное условие для двойственного уравнения дает

$$\begin{aligned} S_1^{j+}(\dot{x}_j - 1) + S_2^{j+} a_2^j b_2^{j+} &= 0, \\ S_2^{j+}(\dot{x}_j + 1) + S_1^{j+} a_1^j b_1^{j+} &= 0. \end{aligned}$$

Калибровка переменных a_k^j, b_k^j может быть зафиксирована так, что

$$1 - \dot{x}_j = (b_1^{j+} a_2^j), \quad -1 - \dot{x}_j = (b_2^{j+} a_1^j),$$

а также

$$S_k^j = c^j a_k^j, \quad S_k^{j+} = c^{j+} b_k^j, \quad \bar{k} = 3 - k, \quad (2.13)$$

где c^j – скалярные функции. Член в разложении порядка -1 при $x = x_j$ с учетом (2.13) может быть представлен в виде (2.7), (2.8), где λ_k^j определяется из следующих уравнений на c^i :

$$(\partial_t + kI + L_1)C = 0, \quad (2.14)$$

$$\left(\partial_t + \frac{1}{k}I + L_2\right)C = 0, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} (L_1)_{ij} &= \delta_{ij} \left((b_1^i + a_2^i) (\zeta(z - z_2) - \zeta(z) - \zeta(\eta)) - \lambda_1^i \right) + (1 - \delta_{ij}) (b_1^i + a_2^j) \Phi_2(x_i - x_j, z), \\ (L_2)_{ij} &= \delta_{ij} \left((b_2^i + a_1^i) (\zeta(z - z_1) - \zeta(z) + \zeta(\eta)) - \lambda_2^i \right) + (1 - \delta_{ij}) (b_2^i + a_1^j) \Phi_1(x_i - x_j, z). \end{aligned}$$

Рассматривая двойственное уравнение, получим уравнение на переменные c^{i+} и уравнения (2.9), (2.10). Таким образом, имеем уравнение Лакса в виде

$$\partial_t(L_1 - L_2) = [L_1, L_2],$$

которое эквивалентно уравнениям (2.11), (2.12).

Стандартным приемом в методе алгебро-геометрической прямой и обратной задачи является рассмотрение спектральной кривой Γ , определенной по характеристическому уравнению $\det(k - 1/k + L_1 - L_2) = 0$. Она имеет специфические свойства, и функция Ψ определяет голоморфное линейное расслоение на спектральной кривой, так что вид ее существенной особенности, зависящей от времени, описывает деформацию фиксированного линейного расслоения. Анализ является достаточно традиционным, поэтому мы ограничимся лишь наброском основных этапов и утверждениями об аналитических свойствах собственных функций на спектральной кривой. В дальнейшем используются обозначения $L(z) = L_1(z) - L_2(z)$ и $\hat{k} = k - 1/k$. Прежде всего, замечая, что матрица $\text{res}|_{z=z_i} L(z)$ отличается от единичной матрицы на матрицу ранга l , найдем разложение в точках z_1, z_2 :

$$R(\hat{k}, z) = \prod_{i=1}^N (\hat{k} + \nu_i^{1,2} z^{-1} + h_i^{1,2}(z)), \quad (2.16)$$

где $h_i^{1,2}(z)$ регулярны и $\nu_i^{1,2} = 1$, если $i > l$. Используя тот факт, что Γ является N -листным накрытием базовой кривой z , и определение точек ветвления, подсчитаем их количество; оно равно $4Nl - 2l(l+1)$, и по теореме Римана–Гурвица род Γ равен $g = 2Nl - l(l+1) + 1$. В силу представления Лакса параметры спектральной кривой являются интегралами движения. Если при этом мы зафиксируем $c(t)|_{t=0} = \text{const}$, то полюсы вектора c не будут зависеть от времени. В ситуации общего положения количество таких полюсов равно половине количества точек ветвления, т.е. равно $2Nl - l(l+1) = g - 1$. Функция Ψ имеет существенные особенности в точках спектральной кривой над $z = z_1, z = z_2$, а также дополнительные $2l$ полюсов. Суммируя аналитические свойства собственных функций, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Функция Ψ мероморфна на кривой Γ рода g вне $2l$ точек P_i и имеет $g + 2l - 1$ полюсов $\gamma_1, \dots, \gamma_{g+2l-1}$, которые не зависят от t, x . В точках P_i , $i = 1, \dots, l$, над $z = z_1$ она имеет следующее разложение:

$$\Psi_\alpha(x, t, P) = \left(\chi_0^{\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{\alpha i}(x, t) z^s \right) e^{\lambda_i(x+t)} \Psi_1(0, 0, P),$$

а при $i = l + 1, \dots, 2l$ в точках над $z = z_2$ имеем

$$\Psi_\alpha(x, t, P) = \left(\chi_0^{\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{\alpha i}(x, t) z^s \right) e^{\lambda_i(x-t)} \Psi_1(0, 0, P),$$

где $\lambda_i(z) = (1 - \nu_i)z^{-1} - h_i(z)$, h_i — регулярные функции в окрестности $z = 0$; ν_i — собственные числа матрицы L в точках над $z = z_1$ при $i = 1, \dots, l$ и над $z = z_2$ при $i = l + 1, \dots, 2l$; $\chi_0^{\alpha i}$ — константы.

Верно и аналогичное утверждение об аналитических свойствах решения двойственного уравнения.

ТЕОРЕМА 3. Решение двойственного уравнения Ψ^+ является мероморфной функцией на той же кривой Γ рода g вне точек P_i , $i = 1, \dots, 2l$. Эта функция имеет $g + 2l - 1$ полюсов $\gamma_1^+, \dots, \gamma_{g+2l-1}^+$, которые не зависят от t, x . В точках P_i , $i = 1, \dots, l$, над $z = z_1$ она имеет следующее разложение:

$$\Psi_\alpha^+(x, t, P) = \left(\chi_0^{+, \alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{+, \alpha i}(x, t) z^s \right) e^{-\lambda_i(x+t)} \Psi_1^+(0, 0, P),$$

а в точках P_i над $z = z_2$, $i = l + 1, \dots, 2l$, имеем

$$\Psi_\alpha^+(x, t, P) = \left(\chi_0^{+, \alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{+, \alpha i}(x, t) z^s \right) e^{-\lambda_i(x-t)} \Psi_1^+(0, 0, P),$$

где $\chi_0^{+, \alpha i}$ — константы.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

В данном разделе мы покажем, что аналитические свойства, установленные в предыдущем разделе, являются достаточно ограничительными и позволяют восстановить собственные функции в терминах объектов на спектральной кривой, таких как абелевы дифференциалы, тэта-функции и преобразование Абеля. Стандартным следствием теоремы Римана–Роха является утверждение о единственности функции со следующими свойствами:

- 1) $\Psi_\alpha(x, t, P)$ имеет $g + 2l - 1$ полюсов $\gamma_1, \dots, \gamma_{g+2l-1}$ на кривой Γ рода g ;
- 2) она имеет существенные особенности в точках P_j , $j = 1, \dots, l$, вида

$$\Psi_\alpha(x, t, P) = e^{w_j^{-1}(x+t)} \left(\delta_{\alpha j} + \sum_s F_{\alpha j}^s(x, t) w_j^s \right)$$

и в точках P_j , $j = l + 1, \dots, 2l$, вида

$$\Psi_\alpha(x, t, P) = e^{w_j^{-1}(x-t)} \left(\delta_{\alpha j} + \sum_s F_{\alpha j}^s(x, t) w_j^s \right),$$

где $w_j(P)$ – локальные параметры в точках P_j .

Единственность такой функции вытекает из следующей конструкции: пусть $d\Omega^1$, $d\Omega^2$ – единственные мероморфные дифференциалы, голоморфные вне точек P_j , такие, что

$$d\Omega^1 = d(w_j^{-1} + O(w_j)) \quad \text{в точках } P_j,$$

$$d\Omega^2 = \begin{cases} d(w_j^{-1} + O(w_j)) & \text{в точках } P_j \text{ при } j = 1, \dots, l, \\ d(-w_j^{-1} + O(w_j)) & \text{в точках } P_j \text{ при } j = l + 1, \dots, 2l, \end{cases}$$

и нормализованные условием

$$\int_{a_j} d\Omega^k = 0.$$

Положим

$$U_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_j} d\Omega^k,$$

тогда с точностью до нормализовочной константы

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x, t, P) &= \\ &= \frac{\theta(A(P) + U^{(1)}x + U^{(2)}t + Z_\alpha) \theta(Z_0) \prod_{j \neq \alpha} \theta(A(P) + S_j)}{\theta(A(P) + Z_\alpha) \theta(U^{(1)}x + U^{(2)}t + Z_0) \prod_{i=1}^{2l} \theta(A(P) + R_i)} e^{x\Omega^{(1)}(P) + t\Omega^{(2)}(P)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $A(P)$ – отображение Абеля, K – вектор римановых констант,

$$\begin{aligned} R_i &= -K - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s) - A(\gamma_{g-1+i}), & S_i &= -K - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s) - A(P_i), \\ Z_0 &= -K - \sum_{i=1}^{g+2l-1} A(\gamma_i) + \sum_{j=1}^{2l} A(P_j), & Z_\alpha &= Z_0 - A(P_\alpha), \\ \Omega^{(k)} &= \int_{P_0}^P d\Omega^k. \end{aligned}$$

Двойственная собственная функция строится аналогично:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^+(x, t, P) &= \\ &= \frac{\theta(A(P) - U^{(1)}x - U^{(2)}t + Z_\alpha^+) \theta(Z_0^+) \prod_{j \neq \alpha} \theta(A(P) + S_j^+)}{\theta(A(P) + Z_\alpha^+) \theta(U^{(1)}x + U^{(2)}t - Z_0^+) \prod_{i=1}^{2l} \theta(A(P) + R_i^+)} e^{-x\Omega^{(1)}(P) - t\Omega^{(2)}(P)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_j^+ &= -K - A(P_j) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s^+), & R_i^+ &= -K - A(\gamma_{g-1+i}^+), \\ K_0 &= \sum_{i=1}^{g+2l-1} (A(\gamma_i) + A(\gamma_i^+)) - 2 \sum_{j=1}^{2l} A(P_j), \\ Z_0^+ &= Z_0 - 2K - K_0, & Z_\alpha^+ &= Z_0^+ - A(P_\alpha). \end{aligned}$$

Эти функции решают вспомогательные линейные задачи (2.2), (2.5). Конечноразмерный потенциал уравнения Дирака, т.е. решение матричного уравнения Дэви–Стюартсона, задается выражением $A = \Xi F^1 \Xi - F^1$, где Ξ – диагональная матрица с диагональными элементами $\underbrace{1, \dots, 1}_l, \underbrace{-1, \dots, -1}_l$ и F^1 – матрица коэффициентов разложения ФБА в отмеченных точках. Таким образом, решение системы полюсной динамики (2.7)–(2.12) задается следующими формулами:

1) полюсы собственной функции могут быть найдены из уравнения

$$\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t + Z_0) = 0;$$

2) спинные переменные задаются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,\alpha}(t) &= Q_i^{-1}(t) \frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t + Z_\alpha)}{\theta(Z_\alpha)\theta(S_\alpha)}, \\ \tilde{b}_i^\alpha(t) &= Q_i^{-1}(t) \frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha^+)}{\theta(Z_\alpha^+)\theta(S_\alpha^+)}; \end{aligned}$$

3) нормализующий множитель имеет вид

$$Q_i^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2l} \frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha)\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha^+)}{\theta(Z_\alpha)\theta(Z_\alpha^+)\theta(S_\alpha)\theta(S_\alpha^+)}.$$

В приведенных формулах мы использовали обозначения

$$a_{i,\alpha}^1 = 2\tilde{a}_{i,\alpha}, \quad a_{i,\alpha}^2 = 2\tilde{a}_{i,\alpha+l}, \quad b_i^{\alpha 1} = \tilde{b}_i^{\alpha+l}, \quad b_i^{\alpha 2} = \tilde{b}_i^\alpha.$$

4. УНИВЕРСАЛЬНАЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Динамические системы, получаемые как системы полюсной динамики в теории конечнозонного интегрирования, часто имеют физическую мотивацию. Но такое описание не затрагивает структурные вопросы, связанные с системой. Под структурой мы имеем в виду алгебраические симметрии в широком смысле. Важность гамильтоновой структуры не может быть переоценена в фундаментальной задаче квантования, так же как построение переменных типа действие–угол имеет большое значение в теории Зайберга–Виттена. Известно, что большинство рассматриваемых систем являются интегрируемыми по Лиувиллю. В работах [13], [14] было предложено универсальное гамильтоново описание таких систем в терминах потоков на пространстве квазипериодических

операторов, порождаемых уравнением Лакса. Прежде всего этот подход был применен к описанию гамильтоновой структуры нелинейных уравнений теории солитонов, однако в работе [15] эффективность этого метода была подтверждена и в конечномерном случае. Основным в конструкции является алгебро-геометрическое соответствие, которое отображает фазовое пространство системы полюсной динамики в пространство спектральных данных, а именно набор модулярных параметров, дивизор полюсов ФБА и тип ее особенности, задаваемый парой абелевых дифференциалов на кривой, в нашем случае дифференциалов dk, dz .

Координатами на фазовом пространстве системы (2.7)–(2.12) являются величины $x_i, \lambda_i, a_1^j, a_2^j, b_1^j, b_2^j$. При этом система инвариантна относительно следующих замен переменных:

$$a_1^i \mapsto W_1^{-1} a_1^i, \quad a_2^i \mapsto W_2^{-1} a_2^i, \quad b_1^{i+} \mapsto b_1^{i+} W_2, \quad b_2^{i+} \mapsto b_2^{i+} W_1,$$

где $W_k, k = 1, 2$, — постоянные матрицы. Кроме того, система симметрична относительно замен

$$a^i \mapsto \mu_i a^i, \quad b^i \mapsto \mu_i^{-1} b^i,$$

где μ_i — постоянные скаляры. Напомним также условие $(b_1^{j+} a_2^j) - (b_2^{j+} a_1^j) = 2$. Размерность редуцированного пространства составляет $4Nl + 2N - 2l(l-1) - N - N = 4Nl - 2l(l-1)$. Зафиксируем W_1, W_2 так, что матрицы

$$W_1^{-1} \sum_i a_1^i b_2^{i+} W_1, \quad W_2^{-1} \sum_i a_2^i b_1^{i+} W_2 \quad (4.1)$$

диагональны, и матрицы W_k сохраняют вектор $(1, \dots, 1)$. Далее используются обозначения A_i^k, B_j^m для переменных в новой калибровке. Условия нормализации матриц (4.1) приобретают вид

$$\sum_i A_{il}^1 B_{im}^2 = \delta_{lm} k_l^1, \quad \sum_i A_{il}^2 B_{im}^1 = \delta_{lm} k_l^2.$$

Для собственных векторов оператора L верно следующее представление:

$$c_i = \begin{cases} (z - z_1)(c_i^j + O(z - z_1))e^{-x_i \zeta(z)}, & \text{если } j \leq l, \\ (z - z_2)(c_i^j + O(z - z_2))e^{-x_i \zeta(z)}, & \text{если } l < j \leq 2l, \\ (c_i^j + O(z))e^{-x_i \zeta(z)}, & \text{если } j > 2l. \end{cases}$$

Векторы c^j пропорциональны векторам B^j . Выберем следующее нормирующее условие:

$$\sum_{i=1}^N A_{im} c_i^j = \begin{cases} \delta_{jm}, & j \leq 2l, \\ 0, & j > 2l. \end{cases} \quad (4.2)$$

Оно согласовано со стандартной нормировкой ФБА в точках P_j

$$\Psi_q = (\delta_{jq} + O(z))e^{k_j x}.$$

Теперь в качестве переменных типа действие выберем координаты полюсов вектора C , который является решением уравнения $(k + L)C = 0$ и удовлетворяет условию

$$\sum_{m=1}^l \sum_{i=1}^N A_{im} c_i \Phi_1(-x_i, z) + \sum_{m=l+1}^{2l} \sum_{i=1}^N A_{im} c_i \Phi_2(-x_i, z) = 1, \quad (4.3)$$

которое полностью согласовано с предыдущими нормировками вследствие теоремы Римана–Роха. Действительно, выражение в левой части равенства является мероморфной функцией на спектральной кривой, которая имеет $g + 2l - 1$ полюсов и принимает значение 1 в точках P_i , т.е. удовлетворяет $2l$ дополнительным условиям. Эта функция должна равняться единице тождественно.

Теперь приведем собственно конструкцию. Оператор Лакса и его собственный вектор, нормированный условием (4.3), являются естественными координатами на фазовом пространстве. Рассмотрим соответствующие ковекторы δL и δC . Введем новые переменные $k^{\text{new}}, L^{\text{new}}$ такие, что $k^{\text{new}} = \hat{k} - 2\zeta(z) + \zeta(z - z_1) + \zeta(z - z_2)$ (что является корректно определенной функцией на спектральной кривой), новые переменные $\lambda_i^{\text{new}} = \lambda_i - \zeta(\eta)((B_2^{i+} A_1^i) + (B_1^{i+} A_2^i))$ и соответствующее выражение для нового оператора Лакса:

$$L_{ij}^{\text{new}} = \delta_{ij}(\lambda_i^{\text{new}} + \zeta(z - z_2)((B_1^{i+} A_2^i) - 1) - \zeta(z - z_1)((B_2^{i+} A_1^i) + 1)) + \\ + (1 - \delta_{ij})((B_1^{i+} A_2^i)\Phi_2(x_i - x_j, z) - (B_2^{i+} A_1^i)\Phi_1(x_i - x_j, z)). \quad (4.4)$$

В дальнейшем мы будем опускать индекс “new”. Введем также дифференциалы на тотальном пространстве δk и δz . Для того чтобы связать их с каноническими дифференциалами на спектральной кривой, заметим, что тотальное пространство расслоено над специальным пространством модулей со слоем, являющимся внешней степенью спектральной кривой. Заметим также, что подмногообразие $z = \text{const}$ трансверсально слою. Таким образом, мы можем продолжить дифференциалы со слоя на все тотальное пространство, положив их равными нулю вдоль подмногообразия $z = \text{const}$. Это означает такой выбор связности, при котором выбранные подмногообразия являются горизонтальными. При таком выборе имеем $\delta z = dz$, где обозначение d используется для продолженных дифференциалов (более детальное изложение см. в [13], [14]).

Основным объектом нашего рассмотрения является 2-форма на фазовом пространстве

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \text{res}_{|P_i} (\langle C^* (\delta L + \delta k) \wedge \delta C \rangle) dz, \quad (4.5)$$

где C^* – собственный вектор L , удовлетворяющий условию $\langle C^* C \rangle = 1$.

ТЕОРЕМА 4. 2-Форма ω имеет вид

$$\omega = 2 \sum_s \delta z(\gamma_s) \wedge \delta k(\gamma_s). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проясним сначала значение этой формулы. Величина k является корректно определенной функцией на кривой, z — многозначная функция. После выбора листа функции z ее значение в точке γ_s — это функционал на пространстве спектральных данных, т.е. на фазовом пространстве рассматриваемой системы. Единственное, что нужно проверить, — это то, что ковектор $\delta z(\gamma_s)$ не зависит от выбора листа. Действительно, разница между значениями таких функционалов на разных листах зависит только от модулярного параметра τ базовой эллиптической кривой, которая изначально зафиксирована. Дифференциал $\Omega = \langle C^* \delta L \wedge \delta C \rangle dz$ мероморфен на спектральной кривой, существенные особенности сокращаются. Сумма вычетов в точках P_i равна сумме оставшихся вычетов с противоположным знаком. Дифференциал Ω имеет полюсы в точках γ_s . Используя условие $\langle C^* C \rangle = 1$, получим

$$\text{res}_{|\gamma_s} \Omega = -\langle C^* \delta L C \rangle \wedge \delta z(\gamma_s) = -\delta k(\gamma_s) \wedge \delta z(\gamma_s).$$

Другие точки, где у Ω возможны полюсы, — это точки ветвления кривой, так как в этих точках собственный вектор C^* имеет полюсы. Однако в этих точках дифференциал dz имеет простые нули.

Теорема 4 также показывает, что 2-форма (4.5) является симплектической, т.е. замкнутой и невырожденной. Она невырождена, так как количество координат Дарбу в этом представлении совпадает с размерностью фазового пространства.

ТЕОРЕМА 5. *Симплектическая форма ω может быть представлена в виде*

$$\omega = \sum_{i=1}^N (\delta \lambda_i \wedge \delta x_i + \delta B_i^{q1} \wedge \delta A_{iq}^2 - \delta B_i^{q2} \wedge \delta A_{iq}^1). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственным вычислением. Мы используем обозначения

$$A_i = (A_{i1}^2, \dots, A_{il}^2, -A_{i1}^1, \dots, -A_{il}^1), \quad B_i = (B_{i1}^1, \dots, B_{il}^1, B_{i1}^2, \dots, B_{il}^2).$$

Разложим L, C как $L = G \tilde{L} G^{-1}$, $C = G \tilde{C}$, где $G = \text{Diag}(e^{\zeta(z)x_i})$. Тогда

$$\omega = \frac{1}{2} \text{res}_{|z=0} \text{Tr}(\delta \tilde{L} \wedge \delta h + \hat{C}^{-1}(\delta \tilde{L} \delta \hat{C} + [\delta h, \tilde{L}] \wedge \delta \hat{C} - \delta h \hat{C} \wedge \delta \hat{k})).$$

Здесь $\hat{C}$ отвечает сечению прямого образа линейного расслоения со спектральной кривой на базовую эллиптическую кривую и $\delta h = G^{-1} \delta G = \text{diag}(-\delta x_i \zeta(z))$. Учитывая соотношение

$$\text{Tr}(C^{-1}[\delta h, L] \wedge \delta C) = -\text{Tr}(C^{-1} \delta h \wedge (\delta L \hat{C} - \hat{C} \delta \hat{k})),$$

получим

$$\omega = \frac{1}{2} \text{res}_{|z=0} \text{Tr}(2 \delta \tilde{L} \wedge \delta h + \hat{C}^{-1} \delta L \wedge \delta C).$$

Первое слагаемое дает $\sum_i \delta \lambda_i \wedge \delta x_i$. Второе слагаемое с учетом условия нормировки (4.2) дает

$$\sum_{j=1}^N (A_{j\alpha} \delta c_j^k + \delta A_{j\alpha} c_j^k) = 0, \quad \sum_{j=1}^N (c_{kj}^* \delta B_{j\alpha} + \delta c_{kj}^* B_{j\alpha}) = 0,$$

что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 6. Система динамики полюсов конечнозонного потенциала уравнения Дэви–Стюартсона (2.7)–(2.12) является гамильтоновой по отношению к симплектической форме ω с эллиптическим гамильтонианом Годена

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i (B_2^{i+} A_1^i + B_1^{i+} A_2^i) - \sum_i \zeta(\eta) (B_2^{i+} A_1^i + 1) (B_1^{i+} A_2^i - 1) + \\ + \sum_{i \neq j} (B_1^{i+} A_2^j) (B_2^{i+} A_1^i) \frac{\sigma(\eta) \sigma(x_j - x_i + \eta)}{\sigma(x_j - x_i)}, \quad (4.8)$$

равным $(H_1 - H_2)/2$, где H_1 и H_2 определены в разделе 1 для эллиптической системы Годена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим поток, определяющий динамику, т.е. уравнение Лакса, в симплектическую форму. Требуется показать, что $i_{\partial_t} \omega(X) = \omega(X, \partial_t) = dH(X)$. В выбранных координатах векторное поле определяется выражениями

$$\partial_t(L_1 - L_2) = [L_1, L_2], \quad \partial_t k = 0, \\ \partial_t C(t, P) = L_2 C(t, P) + \mu(t, P) C(t, P),$$

где $\mu(t, P)$ – скалярная функция. Подставляя данное векторное поле в симплектическую форму, получим

$$i_{\partial_t} \omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2l} \text{res}_{|P_i} (\langle C^* (\delta L - \delta k) (L_2 + \mu(t, P)) C \rangle - \langle C^* [L_2, L_1] \delta C \rangle) dz = \\ = - \sum_{i=1}^{2l} \text{res}_{|P_i} \delta k \mu(t, P) dz. \quad (4.9)$$

Функция μ имеет то же разложение в отмеченных точках, что и коэффициент при t в экспоненциальном члене разложения вектор-функции Ψ . Это значит, что в точках P_i , $i = 1, \dots, l$, главная часть разложения функции μ по параметру k равна $k/2$, а в точках P_i , $i = l+1, \dots, 2l$, главная часть μ равна $-k/2$. Тогда имеем

$$i_{\partial_t} \omega = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^l \text{res}_{|P_i} \delta k^2 dz + \frac{1}{4} \sum_{i=l+1}^{2l} \text{res}_{|P_i} \delta k^2 dz = \\ = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^l \text{res}_{|P_i} \delta \langle C^* L^2 C \rangle dz + \frac{1}{4} \sum_{i=l+1}^{2l} \text{res}_{|P_i} \delta \langle C^* L^2 C \rangle dz = \\ = \frac{1}{4} \text{res}_{|z=z_2} \text{Tr} \delta L^2 dz - \frac{1}{4} \text{res}_{|z=z_1} \text{Tr} \delta L^2 dz.$$

Подставляя выражения для матричных элементов оператора Лакса (4.4) в эту формулу, найдем

$$\text{res}_{|z=z_2} \text{Tr} L^2 dz - \text{res}_{|z=z_1} \text{Tr} L^2 dz = \\ = \frac{1}{2} \sum_i (\lambda_i ((B_2^{i+} A_1^i) + (B_1^{i+} A_2^i)) + \zeta(\eta) ((B_2^{i+} A_1^i)^2 + (B_1^{i+} A_2^i)^2)) + \\ + \sum_i \zeta(\eta) ((B_2^{i+} A_1^i) - (B_1^{i+} A_2^i) + 1) + \sum_{i \neq j} (B_1^{i+} A_2^j) (B_2^{i+} A_1^i) \frac{\sigma(x_j - x_i + \eta)}{\sigma(\eta) \sigma(x_j - x_i)}.$$

Мы нашли гамильтониан с точностью до константы. Чтобы получить гамильтониан $H_1 - H_2$ системы Годена, нужно вычесть $N\zeta(\eta)$ и использовать условие $(B_1^{i+} A_2^i) - (B_2^{i+} A_1^i) = 2$. Следует только отметить, что система (2.7)–(2.12) эквивалентна системе гамильтоновой динамики с данным гамильтонианом, эквивалентность задается формулами

$$a_k^i \mapsto \exp\left(-\int dt \frac{\lambda_1^i + \lambda_2^i}{2}\right) a_k^i, \quad b_k^i \mapsto \exp\left(\int dt \frac{\lambda_1^i + \lambda_2^i}{2}\right) b_k^i.$$

Переменные действие–угол могут быть построены традиционным способом, как это было сделано в работе [15]. Для этого вводятся дифференциалы третьего порядка $d\Omega_j$, $j = 1, \dots, 2l-1$, с вычетами 1 и -1 в точках P_j и P_{2l} , соответственно. В фундаментальной области кривой можно определить функции $A_k(Q)$, $k = g + 2l - 1$, такие, что

$$A_k(Q) = \int^Q d\omega_i, \quad i = 1, \dots, g, \quad A_{g+i}(Q) = \int^Q d\Omega_i, \quad i = 1, \dots, 2l-1.$$

Теперь введем выражения

$$\phi_i = \sum_{s=1}^{g+2l-1} A_i(\gamma_s), \quad I_k = \oint_{a_i} k dz, \quad I_{g+i} = \text{res}_{P_i} k dz.$$

Симплектическая форма имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{g+2l-1} \delta\phi_i \wedge \delta I_i.$$

Заметим, что величины I_i являются интегралами движения. Таким образом, полученные координаты являются координатами типа действие–угол для нашей системы. Для случая $sl(2)$ разделенные переменные были найдены в работе [16].

5. ВЫРОЖДЕНИЯ

Конструкция системы Хитчина на кривых с особенностями предусматривает анализ некоторых вырождений динамических систем. Например, рациональные и тригонометрические вырождения могут быть получены при рассмотрении эллиптической кривой с каспидальной или нодальной особенностями, соответственно. Нормализация кривой в обоих случаях будет рациональной кривой, и модули голоморфных расслоений будут параметризоваться элементами переклейки слоев над особыми точками. Для эллиптической системы Годена такие вырождения существуют. Рациональное вырождение задается гамильтонианом

$$H_{\text{rat}} = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i (B_2^{i+} A_1^i + B_1^{i+} A_2^i) + \sum_{i \neq j} (B_1^{i+} A_2^j) (B_2^{i+} A_1^i) \left(\frac{1}{x_i - x_j} - \frac{1}{\eta} \right) \quad (5.1)$$

с канонической симплектической формой ω в представлении (4.7). Эта система отвечает рациональной кривой с двумя простыми отмеченными точками и с одной двойной

каскадной особенностью. Она тоже может быть решена алгебро-геометрическим методом прямой и обратной задачи, как это было сделано в работах [12], [17]. Выражение для функции Ψ может быть найдено в [17] (см. формулу (2.53) в указанной работе). Переменные типа действие–угол были построены в работе [18], где автор использовал другой гамильтониан, но разделенные переменные для этих систем совпадают. Существует другое вырождение исходной системы, а именно предел $z_1 \rightarrow z_2$, $\eta \rightarrow 0$. Этот случай был также разобран в рамках метода прямой и обратной задачи. Выражения для ФБА могут быть найдены в работе [17] (см. формулу (2.60) в указанной работе). Решение уравнения Дэви–Стюартсона в данном случае является двоякопериодическим, а система полюсной динамики задается гамильтонианом

$$H_{\text{ell}} = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i (B_2^{i+} A_1^i + B_1^{i+} A_2^i) + \sum_{i \neq j} (B_1^{i+} A_2^j) (B_2^{j+} A_1^i) \zeta(x_i - x_j) \quad (5.2)$$

и стандартной симплектической формой (4.7). Априори эта система не является интегрируемой. Действуя аналогичным образом при построении переменных типа действие–угол, получим, что их количество $2l(2N - 2l + 1)$ меньше размерности фазового пространства. Это вырождение проявляется также при подсчете гамильтонианов Хитчина. Гамильтонианы исходной системы могут быть представлены как $H_s^{k,l} = \text{res}_{|z=z_s} ((z - z_s)^{k-1} \text{Tr } \Phi^l)$, $s = 1, 2$. При совпадении двух отмеченных точек вычеты выражений $\text{Tr } \Phi^k$ тождественно обращаются в нуль и из гамильтонианов Хитчина для невырожденной системы остаются только выражения вида $H_1^{k,l} + H_2^{k,l}$. Этот случай нуждается в более тонком исследовании структур джетов голоморфного расслоения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом работы являются построение явных решений эллиптической системы Годена со спином и обнаружение связи между этой системой и квазипериодическими решениями уравнения Дэви–Стюартсона. С методологической точки зрения значительным представляется отмеченное соответствие между описанием системы как системы Хитчина и описанием в терминах метода конечнозонного интегрирования. Нашей дальнейшей целью является более общая демонстрация эквивалентности таких подходов. Важной технической задачей в данной программе является изучение геометрии пространства модулей полустабильных расслоений при варьировании модулей базовой алгебраической кривой. Она может прояснить описание Хитчина для эллиптической вырожденной модели Годена. Такие попытки предпринимались, и случай эллиптической кривой был проанализирован в работе [19]. В конструкции было существенно использовано наличие структуры группы на эллиптической кривой, и она не может быть непосредственно обобщена на произвольный род. Для построения геометрически оправданной процедуры взятия предела необходима своего рода каноническая связность в расслоении на пространстве модулей алгебраических кривых, слоем которого является пространство модулей голоморфных расслоений. Естественным претендентом на эту роль является связность Пенлеве.

Благодарности. Автор выражает благодарность И. М. Кричеверу за научное руководство во время обучения в МГУ и аспирантуре и за постановку задачи исследования уравнения Дэви–Стюартсона. Автор также признателен М. А. Ольшанецкому и А. М. Левину за плодотворные обсуждения природы системы Хитчина. Часть работы была выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00546.

Список литературы

- [1] *И. М. Кричевер.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 23. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1983. С. 79–136.
- [2] *A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Integrability and Seiberg–Witten exact solution. hep-th/9505035.
- [3] *R. Donagi, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 460. P. 299–334.
- [4] *I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon.* Am. Math. Soc. Transl. 1995. V. 170. № 2. P. 83–119.
- [5] *И. М. Кричевер, А. В. Забродин.* УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 3–56.
- [6] *N. Nekrasov.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 180. P. 587–604; hep-th/9503157.
- [7] *B. Enriquez, V. Rubtsov.* Hitchin systems, higher Gaudin operators and r -matrices. alg-geom/9503010.
- [8] *N. Hitchin.* Duke Math. J. 1987. V. 54. № 1. P. 91–114.
- [9] *B. van Geemen, E. Previato.* Duke Math. J. 1996. V. 85. P. 659–684.
- [10] *K. Gawedzki, P. Tran-Ngoc-Bich.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 4695–4712.
- [11] *Т. М. Маланюк.* УМН. 1991. Т. 46. № 5. С. 171–172.
- [12] *D. Talalaev.* J. Math. Phys. 1999. V. 6. № 4. P. 471–492.
- [13] *I. M. Krichever, D. H. Phong.* J. Diff. Geom. 1997. V. 45. P. 349–389.
- [14] *I. M. Krichever, D. H. Phong.* Symplectic forms in the theory of solitons. hep-th/97-08170.
- [15] *I. Krichever.* Elliptic solutions to difference non-linear equations and nested Bethe Ansatz equation. solv-int/9804016.
- [16] *B. Enriquez, B. Feigin, V. Rubtsov.* Separation of variables for Gaudin–Calogero systems. q-alg/9605030.
- [17] *Д. В. Талалаев.* R -матричный подход в задачах конечнозонного интегрирования. Дисс. канд. ф.-м. н. М.: МГУ, 2000; <http://wwwth.itep.ru/mathphys/people/talalaev/phd.htm>.
- [18] *T. Brzeziński.* Dynamical r -matrices and separation of variables: the generalized Calogero–Moser model. hep-th/9401049.
- [19] *M. Olshanetsky.* Lett. Math. Phys. 1997. V. 42. P. 59–71.

Поступила в редакцию 29.VIII.2001 г.