Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Губанов, Обобщенная модель Гейзенберга, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 3, 451–459

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:12:49

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассмотрена XXZ -модель цепочки частиц произвольного спина при параметре анизотропии, равном корню из минус единицы, и обобщенных периодических граничных условиях. Найдены условия обрыва функциональных соотношений слияния трансфер-матриц. После обрыва образуется замкнутая система уравнений, решение которой позволяет найти спектр энергии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Анизотропная XXZ -модель Гейзенберга описывает цепочку из N двухуровневых атомов и имеет гамильтониан

$$H_{XXZ} = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+ + \frac{q + q^{-1}}{4} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right), \quad (1)$$

где σ_i^μ — матрицы Паули, q — параметр анизотропии. Гамильтониан (1) действует в гильбертовом пространстве состояний $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ размерности 2^N . В 1931 г. Бете предложил общий метод (*анзац Бете*), позволяющий свести задачу о нахождении собственных значений и собственных векторов гамильтониана к задаче классического анализа, а именно, к задаче отыскания решений определенной системы трансцендентных уравнений (*уравнений Бете*) [1]. Установленная позднее связь между квантовыми одномерными моделями и классическими двумерными моделями статистической физики показала, что центральную роль в методе Бете играет соотношение, называемое *уравнением Янга–Бакстера*. Предложенный Фаддеевым, Тахтаджяном и Скляниным квантовый метод обратной задачи позволил систематизировать и развить эти идеи в более алгебраическом виде [2]. С квантовой одномерной XXZ -моделью Гейзенберга связана двумерная статистическая *шестивершинная модель* (модель льда). Связь между трансфер-матрицей модели льда $T(u)$ и гамильтонианом XXZ -модели Гейзенберга

$$H_{XXZ} = -\frac{N}{2} \cos \eta + (\sin \eta) \frac{d}{du} \ln T(u)|_{u=0}, \quad (2)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: gubanov@itp.ac.ru

где $e^{i\eta} = q$, приводит в соответствие друг с другом собственные значения (с.з.) энергии и с.з. трансфер-матрицы. Операторы $T(u)$ и H_{XXZ} коммутируют между собой, следовательно, имеют одну и ту же систему собственных векторов.

При изучении модели Гейзенберга для значения параметра анизотропии, равного корню из минус единицы ($q^{p+1} = -1$) в работах [3], [4] было обнаружено, что если *редуцировать* XXZ -модель на определенным образом выбранное пространство состояний, то полученная в результате этого действия новая модель в термодинамическом пределе ($N \rightarrow \infty$) будет эквивалентна определенной *минимальной модели конформной теории поля*. Например, в случае открытых граничных условий специального вида центральный заряд $c = 1 - 6/p(p+1)$.

Существует бесконечное семейство трансфер-матриц. Они коммутируют между собой и также удовлетворяют бесконечной системе рекуррентных функциональных соотношений слияния. В работе [5] было показано, что при выполнении некоторых условий соотношения слияния трансфер-матриц шестивершинной модели обрываются и превращаются в замкнутую систему уравнений именно на тех собственных векторах, редукция на которые в термодинамическом пределе приводит к минимальным моделям конформной теории поля. Другими словами, изучение *квантовой групповой редукции* модели Гейзенберга и изучение условий обрыва соотношений слияния трансфер-матриц шестивершинной модели являются одной и той же задачей. В работах [6], [7] было дано алгебраическое объяснение явления обрыва соотношений слияния. Самостоятельный интерес представляет то обстоятельство, что в результате обрыва получается замкнутая система уравнений, из которой можно найти спектр, не решая традиционных трансцендентных уравнений Бете. Иногда ответ удается получить в явном виде [7].

До сих пор речь шла о цепочках частиц спина $1/2$. В данной работе изучается XXZ -модель Гейзенберга цепочки частиц произвольного спина при обобщенных периодических (*твистованных*) граничных условиях. Сначала определяются функциональные соотношения слияния трансфер-матриц при произвольном значении спина. Затем исследуются необходимые условия обрыва полученных соотношений. Для этого используется метод второго линейно независимого решения уравнения Бакстера, предложенный в работе [5], который обобщается здесь на случай произвольного спина. Обсуждаются достаточные условия обрыва, получаемые из алгебраического анализа структуры трансфер-матрицы. В качестве примера рассматривается случай XXZ -цепочки частиц спина 1 .

2. СООТНОШЕНИЯ СЛИЯНИЯ ТРАНСФЕР-МАТРИЦ ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

Пусть числа l и j задают спины соответственно в квантовом и вспомогательном пространствах. Трансфер-матрица $T_{l,j}(u)$ действует в конфигурационном (*квантовом*) пространстве $(\mathbb{C}^{2l+1})^{\otimes N}$, коммутирует при разных значениях спектрального параметра u и спина вспомогательного пространства j :

$$[T_{l,j_1}(u_1), T_{l,j_2}(u_2)] = 0, \quad (3)$$

следовательно, является производящей функцией интегралов движения. По определению в шестивершинной модели имеем

$$T_{l,j}(u) = \text{tr}_{\pi_j}(q^{-2\beta\gamma^z} R_{l\otimes j}(u) \dots R_{l\otimes j}(u)), \quad (4)$$

где β – параметр твиста, т.е. число, характеризующее граничные условия ($\beta = 0$ соответствует обычным периодическим условиям). Матричные элементы оператора γ^z в представлении со спином j имеют вид

$$\pi_j(\gamma^z)_{nk} = (j+1-n)\delta_{nk}, \quad n, k = 1, 2, \dots, 2j+1. \quad (5)$$

Оператор $R_{l\otimes j}(u)$ действует в пространстве $\mathbb{C}^{2l+1} \otimes \mathbb{C}^{2j+1}$ и является решением уравнения Янга–Бакстера

$$R_{l\otimes j}(u-v)R_{l\otimes j'}(u)R_{j\otimes j'}(v) = R_{j\otimes j'}(v)R_{l\otimes j'}(u)R_{l\otimes j}(u-v). \quad (6)$$

Так, в случае квантового спина $l = 1/2$, R -матрица шестивершинной модели имеет вид

$$R_{\frac{1}{2}\otimes j}(u) = \begin{pmatrix} \sin(u + (\frac{1}{2} + \hat{H})\eta) & (\sin \eta)\hat{F} \\ (\sin \eta)\hat{E} & \sin(u + (\frac{1}{2} - \hat{H})\eta) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где операторы $\hat{E}$, $\hat{F}$ и $\hat{H}$ – генераторы квантовой алгебры $U_q(sl(2))$ со следующими матричными элементами в представлении π_j :

$$\begin{aligned} \pi_j(\hat{H})_{mn} &= (j+1-n)\delta_{m,n}, & \pi_j(\hat{E})_{mn} &= \omega_m \delta_{m,n-1}, \\ \pi_j(\hat{F})_{mn} &= \omega_n \delta_{m-1,n}, & m, n &= 1, 2, \dots, 2j+1. \end{aligned} \quad (8)$$

Выше введены обозначения $\omega_n = \sqrt{[n]_q[2j+1-n]_q}$, $[x]_q = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$. R -матрицы с высшими спинами $l > 1/2$ относительно легко получаются рекурсионным решением уравнения Янга–Бакстера (6). Например, для $R_{1\otimes 1}(u)$ находим

$$\begin{aligned} R_{11,11}, R_{33,33} &= \sin(u+\eta) \sin(u+2\eta), \\ R_{11,33}, R_{33,11} &= \sin(u) \sin(u-\eta), \\ R_{13,31}, R_{31,13} &= 2(\sin \eta) \sin^2 \eta, \\ R_{11,22}, R_{33,22}, R_{22,11}, R_{22,33} &= \sin(u) \sin(u+\eta), \\ R_{12,21}, R_{21,12}, R_{23,32}, R_{32,23} &= \sin(2\eta) \sin(u+\eta), \\ R_{12,32}, R_{21,23}, R_{23,21}, R_{32,12} &= \sin(2\eta) \sin(u), \\ R_{22,22} &= \cos \eta - \frac{1}{2} \cos(3\eta) - \frac{1}{2} \cos(2u+\eta). \end{aligned} \quad (9)$$

Договоримся нормировать R -матрицы таким образом, чтобы матричный элемент $R_{11,11}(u)$ представлял собой произведение вида $\sin(u+\eta) \sin(u+2\eta) \dots \sin(u+2l\eta)$ (в

данной нормировке R -матрица не имеет полюсов в комплексной плоскости спектрального параметра u). Если при выбранной нормировке вместо $T_{l,j}(u)$ ввести новые величины $t_{l,j}(u)$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} j = 0: t_{l,0}(u) &= \prod_{k=-(l-\frac{1}{2})}^{l-\frac{1}{2}} \phi(u+k\eta), \\ j \leq l - \frac{1}{2}: t_{l,j}(u) &= T_{l,j}(u) \prod_{k=-(l-j-\frac{1}{2})}^{l-j-\frac{1}{2}} \phi(u+k\eta), \\ j > l - \frac{1}{2}: t_{l,j}(u) &= T_{l,j}(u), \end{aligned} \quad (10)$$

причем

$$\phi(u) \equiv \sin^N \left(u + \frac{\eta}{2} \right), \quad (11)$$

то функциональные соотношения слияния трансфер-матриц примут вид

$$\begin{aligned} t_{l,\frac{1}{2}} \left(u - \left(j + \frac{1}{2} \right) \eta \right) t_{l,j}(u) &= t_{l,0}(u - (j+1)\eta) t_{l,j-\frac{1}{2}} \left(u + \frac{\eta}{2} \right) + \\ &+ t_{l,0}(u - j\eta) t_{l,j+\frac{1}{2}} \left(u - \frac{\eta}{2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Процедура получения соотношений слияния известна [5], [8]–[10] (важно только следить за правилами нормировки (10), (11)). Поэтому мы не останавливаемся на подробном выводе соотношения (12).

Гамильтонианом анизотропной модели Гейзенберга цепочки частиц со спином $l > 1/2$ по аналогии с (2) в выбранной нормировке (10), (11) будем называть следующий оператор:

$$H_{XXZ} = \frac{\sin(\eta) \sin(2\eta) \dots \sin(2l\eta)}{\sin^{2l-1} \eta} \frac{d}{du} \ln T_{l,l}(u)|_{u=0}. \quad (13)$$

Он описывает цепочку частиц спина l со взаимодействием только между ближайшими соседями [4]. Заметим, что в формуле (2) под $T(u)$ подразумевается $T_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(u)$, индексы для простоты не обозначены. Вообще говоря, при описании цепочки частиц со спином $l > 1/2$ следует учитывать не только взаимодействие между ближайшими соседями (дипольное взаимодействие), но и квадрупольное взаимодействие, однако это выходит за рамки данной работы.

3. СВЯЗЬ ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ С ПЕРВЫМ И ВТОРЫМ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫМИ РЕШЕНИЯМИ TQ -УРАВНЕНИЯ БАКСТЕРА

Трансфер-матрица $T_{l,j}(u)$ равна следу от матрицы монодромии по вспомогательному пространству [2]. Матрица монодромии $L_{l \otimes j}(u)$ действует в конфигурационном пространстве $(\mathbb{C}^{2l+1})^{\otimes N} \otimes \mathbb{C}^{2j+1}$. В случае $j = 1/2$ имеем

$$L_{l \otimes \frac{1}{2}}(u) = q^{-\beta \sigma^z} R_{l \otimes \frac{1}{2}}(u) \dots R_{l \otimes \frac{1}{2}}(u) = \begin{pmatrix} q^{-\beta} A_l(u) & q^{-\beta} B_l(u) \\ q^{+\beta} C_l(u) & q^{+\beta} D_l(u) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

С помощью квантового метода обратной задачи определяем вакуумный вектор $|0\rangle$ (все спины ориентированы вверх), для которого с учетом явного выражения R -матрицы (7) получаем

$$\begin{aligned} C_l(u)|0\rangle &= 0, \\ A_l(u)|0\rangle &= \phi(u + l\eta)|0\rangle, \\ D_l(u)|0\rangle &= \phi(u - l\eta)|0\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $v_1, v_2, \dots, v_n$ – корни уравнений Бете (см. ниже (18)), то бетевский собственный вектор

$$\psi(\vec{v}) = B_l(v_1) \dots B_l(v_n)|0\rangle. \quad (16)$$

Используя перестановочные соотношения между $A_l(u)$, $B_l(u)$ и $D_l(u)$ [2], которые вытекают из уравнения Янга–Бакстера (6), получаем для с.з. трансфер-матрицы $T_{l, \frac{1}{2}}(u) = q^{-\beta} A_l(u) + q^{\beta} D_l(u)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} T_{l, \frac{1}{2}}(u) &= q^{-\beta} \phi(u + l\eta) \prod_{i=1}^n \frac{\sin(u - v_i - \eta)}{\sin(u - v_i)} + \\ &+ q^{+\beta} \phi(u - l\eta) \prod_{i=1}^n \frac{\sin(u - v_i + \eta)}{\sin(u - v_i)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Сами уравнения Бете выводятся с учетом того, что $T_{l, \frac{1}{2}}(u)$ не имеет полюсов в комплексной плоскости спектрального параметра u . Они имеют вид

$$\frac{\phi(v_k + l\eta)}{\phi(v_k - l\eta)} = q^{2\beta} \prod_{i=1}^n \frac{\sin(v_k - v_i + \eta)}{\sin(v_k - v_i - \eta)}. \quad (18)$$

Q -оператор Бакстера действует в пространстве $(\mathbb{C}^{2l+1})^{\otimes N}$ и по определению имеет собственные значения

$$Q_l(u) = \prod_{i=1}^n \sin(u - v_i). \quad (19)$$

Принимая во внимание (17), мы получаем TQ -уравнение Бакстера, обобщенное на случай произвольного спина l :

$$T_{l, \frac{1}{2}}(u)Q_l(u) = q^{-\beta} \phi(u + l\eta)Q_l(u - \eta) + q^{+\beta} \phi(u - l\eta)Q_l(u + \eta). \quad (20)$$

Согласно работе [5] подобное уравнение можно рассматривать как дискретный аналог дифференциального уравнения второго порядка, следовательно, должно существовать второе линейно независимое решение $P_l(u)$, отвечающее тому же самому с.з. трансфер-матрицы:

$$T_{l, \frac{1}{2}}(u)P_l(u) = q^{-\beta} \phi(u + l\eta)P_l(u - \eta) + q^{+\beta} \phi(u - l\eta)P_l(u + \eta). \quad (21)$$

Можно определить связь между трансфер-матрицей и операторами P, Q . Не вдаваясь в детали вычислений, приведем результат:

$$t_{l,j}(u) = q^\beta q^{\frac{2\beta}{\eta}u} \left[P_l \left(u + \left(j + \frac{1}{2} \right) \eta \right) Q_l \left(u - \left(j + \frac{1}{2} \right) \eta \right) - \right. \\ \left. - Q_l \left(u + \left(j + \frac{1}{2} \right) \eta \right) P_l \left(u - \left(j + \frac{1}{2} \right) \eta \right) \right], \quad (22)$$

где $t_{l,j}(u)$ связано с $T_{l,j}(u)$ соотношениями (10). Формула (22) одновременно определяет нормировку функции $P_l(u)$, которая не фиксируется уравнением (21). Строго говоря, соотношение (22) является гипотезой, справедливость которой подтверждается тем, что функциональные соотношения слияния трансфер-матриц, получаемые с учетом связи (22), совпадают с (12), а при небольших значениях спина справедливость (22) легко проверяется прямым вычислением. Таким образом, формулу (22) можно доказать по индукции. Аналитические свойства функции $Q_l(u)$ определяются формулой (19), например, $Q_l(u + \pi) = (-1)^n Q_l(u)$. В следующем разделе мы исследуем свойства функции $P_l(u)$ в случае параметра анизотропии, равного корню из минус единицы.

4. ОБРЫВ СООТНОШЕНИЙ СЛИЯНИЯ ПРИ ПАРАМЕТРЕ АНИЗОТРОПИИ $q^{p+1} = -1$

Из соотношения (22) видно, что при $q^{p+1} = -1$ (т.е. $\eta = \pi/(p+1)$) и при выполнении условия

$$\frac{Q(u + \pi)}{Q(u)} = \frac{P(u + \pi)}{P(u)} \quad (23)$$

происходит обрыв соотношений слияния (12), т.е.

$$t_{l, \frac{p}{2}}(u) = 0, \\ t_{l, \frac{p}{2} - j - \frac{1}{2}}(u) = -(-1)^{n-\beta} t_{l,j} \left(u + \frac{\pi}{2} \right). \quad (24)$$

Выясним, когда выполняется условие (23). Положим в (22) $j = 0$. Используя (10), найдем

$$q^{-\beta} \frac{\prod_{k=1}^{2l} \phi(u + (k-l-\frac{1}{2})\eta)}{Q(u - \frac{\eta}{2})Q(u + \frac{\eta}{2})} = q^{\frac{2\beta}{\eta}u} \left(\frac{P(u + \frac{\eta}{2})}{Q(u + \frac{\eta}{2})} - \frac{P(u - \frac{\eta}{2})}{Q(u - \frac{\eta}{2})} \right). \quad (25)$$

Левая часть в (25) представляет собой отношение тригонометрических полиномов, которое можно разложить в сумму единственным образом:

$$q^{-\beta} \frac{\prod_{k=1}^{2l} \phi(u + (k-l-\frac{1}{2})\eta)}{Q(u - \frac{\eta}{2})Q(u + \frac{\eta}{2})} = K(u) + q^{-\beta} \frac{G(u + \frac{\eta}{2})}{Q(u + \frac{\eta}{2})} - q^\beta \frac{G(u - \frac{\eta}{2})}{Q(u - \frac{\eta}{2})}, \quad (26)$$

где $K(u)$ и $G(u)$ — однозначно определяемые тригонометрические полиномы степеней соответственно $\deg(K(u)) = 2lN - 2n$ и $\deg(G(u)) < n$. Выполним еще одно разложение:

$$K(u) = q^{-\beta} F \left(u + \frac{\eta}{2} \right) - q^\beta F \left(u - \frac{\eta}{2} \right), \quad (27)$$

тогда

$$P(u) = q^{\frac{-2\beta}{\eta}u} (Q(u)F(u) + G(u)). \quad (28)$$

Потребуем, чтобы функция $F(u)$ при сдвиге аргумента на π вела себя так же, как и функция $K(u)$: $K(u + \pi) = (-1)^{2lN} K(u)$. Тогда получим условие

$$(-1)^{2\beta} = (-1)^{2lN}. \quad (29)$$

Решая уравнение (27) разложением функций $K(u)$ и $F(u)$ в ряды Фурье, получим еще одно условие

$$lN - n < \min(\beta, p + 1 - \beta) \pmod{p + 1}. \quad (30)$$

Следовательно, для обрыва (24) функциональных соотношений слияния (12) необходимо выполнение условий (29), (30).

5. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Известно, что в случае XXZ -цепочки частиц спина $1/2$ обрыв функциональных соотношений (12) объясняется представимостью трансфер-матрицы $T_{l, \frac{p}{2}}(u)$ в виде

$$T_{l, \frac{p}{2}}(u) = X^p(\dots) + (\dots)X \quad (31)$$

в случае открытых граничных условий специального типа [6] либо

$$T_{l, \frac{p}{2}}(u) = X^{p+1-\delta}(\dots) + (\dots)X^\delta \quad (32)$$

в случае обобщенных периодических граничных условий [7], где целое положительное число $\delta = \beta - s$, целое либо полуцелое число s – собственное значение оператора S^z , операторы X и S^z – генераторы квантовой алгебры $U_q(sl(2))$, имеющие вид

$$X = \sum_{i=1}^N q^{\frac{1}{2}(\sigma_1^z + \dots + \sigma_{i-1}^z)} \sigma_i^+ q^{-\frac{1}{2}(\sigma_{i+1}^z + \dots + \sigma_N^z)}, \quad S^z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z. \quad (33)$$

Многоточиями $(\dots)$ в формулах (31), (32) обозначены определенные операторы, полученные в работах [6], [7], явный вид которых для нас не важен. В случае (31) обрыв соотношений слияния происходит на когомологиях

$$V_p = \text{Ker } X / \text{Im } X^p, \quad (34)$$

в случае (32) – на когомологиях

$$V_{p, \delta} = \text{Ker } X^\delta / \text{Im } X^{p+1-\delta}. \quad (35)$$

Фактически при получении формул (31), (32) не используется величина спина частиц. Поэтому формула (32) справедлива и в нашем случае, но лишь с одной поправкой – теперь генераторы X и S^z квантовой алгебры $U_q(sl(2))$ выражаются формулами

$$X = \sum_{i=1}^N q^{\hat{H}_1 + \dots + \hat{H}_{i-1}} \hat{E}_i q^{-\hat{H}_{i+1} - \dots - \hat{H}_N}, \quad S^z = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i, \quad (36)$$

где матричные элементы операторов $\hat{E}$ и $\hat{H}$ задаются выражением (8), в котором надо заменить j на l .

6. ЦЕПОЧКА ЧАСТИЦ СПИНА $l = 1$ ПРИ ПАРАМЕТРЕ АНИЗОТРОПИИ, РАВНОМ КОРНЮ ИЗ МИНУС ЕДИНИЦЫ

Рассмотрим случай, когда $q^5 = -1$. Для удобства обозначим $G(u) \equiv T_{1,1}(u + 2\pi/5)$, тогда из соотношений (10), (24) получаем функциональные уравнения

$$\begin{aligned} G\left(u + \frac{\pi}{2}\right) &= G\left(u - \frac{\pi}{2}\right), \\ G\left(u + \frac{\pi}{10}\right)G\left(u - \frac{\pi}{10}\right) &= \sin^N\left(u + \frac{\pi}{10}\right)\sin^N\left(u - \frac{\pi}{10}\right) \times \\ &\times \left[G\left(u + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^N\left(u + \frac{3\pi}{10}\right)\sin^N\left(u - \frac{3\pi}{10}\right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Видно, что $G(-u) = G(u)$. Так как собственные значения трансфер-матрицы не имеют полюсов по u , решение уравнений (37) следует искать в виде

$$G(u) = \sum_{k=0}^N g_k \cos(2ku). \quad (38)$$

Рассмотрим цепочку из 4-х частиц. В этом случае решение системы (37) имеет вид

$$\begin{aligned} G_{1,2}(u) &= \frac{1}{32} \sin^4 u [6 \pm 5(\sqrt{5} - 3) + 5(\sqrt{5} - 1) \cos(2u) + \\ &\quad + 2(\sqrt{5} + 1) \cos(4u)], \\ G_3(u) &= \frac{1}{32} \sin^4 u [3\sqrt{5} - 9 + 4(\sqrt{5} - 2) \cos(2u) - \\ &\quad - 2(\sqrt{5} - 1) \cos(4u)], \\ G_{4,5}(u) &= \sin^4 u \left[\frac{1}{64} (37 - 15\sqrt{5} \pm \sqrt{430 - 70\sqrt{5}}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} (\sqrt{5} - 4 \pm \sqrt{205 - 80\sqrt{5}}) \cos(2u) - \frac{1}{16} (\sqrt{5} - 1) \cos(4u) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

По формуле (13) находим соответствующие уровни энергии:

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= (1 - \sqrt{5}) \pm (1 + \sqrt{5}), \\ E_3 &= -\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{5}), \\ E_{4,5} &= \frac{1}{4}(7 - 3\sqrt{5} \pm \sqrt{94 + 22\sqrt{5}}). \end{aligned} \quad (40)$$

Чтобы проверить полученный результат, мы вычислили с.з. энергии и сравнили с (40). Уровни (40) являются уникальными, в то время как остальные уровни из тех же секторов вырождены.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказан обрыв соотношений слияния трансфер-матриц с произвольным спином l . Этот обрыв происходит при выполнении условий (29), (30) на пространстве когомологий (35). После обрыва получается замкнутая система уравнений, решение которой дает спектр энергии состояний редуцированной XXZ -модели Гейзенберга цепочки частиц спина l с обобщенными периодическими граничными условиями.

Благодарности. Автор благодарит А. А. Белавина и М. Ю. Лашкевича за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] *М. Годен.* Волновая функция Бете. Новокузнецкий ФМИ, 2000; *M. Gaudin.* La fonction d'onde de Bethe. Masson, Paris, 1983.
- [2] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 13.
- [3] *F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter, G. R. Quispel.* J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 6397.
- [4] *V. Pasquier, H. Saleur.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 330. P. 523.
- [5] *A. Belavin, Yu. Stroganov.* Phys. Lett. B. 1999. V. 446. P. 281; hep-th/9908050.
- [6] *A. A. Belavin, S. Yu. Gubarov, B. L. Feigin.* Moscow Mathematical Journal. 2001. V. 1. № 2. P. 1; hep-th/0008011.
- [7] *А. А. Белавин, С. Ю. Губанов.* Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. № 9. С. 565.
- [8] *Yu-kui Zhou.* Fusion hierarchy and finite-size corrections of $U_q(sl(2))$ invariant vertex models with open boundaries. hep-th/9502053.
- [9] *A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin.* J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 1565.
- [10] *C. M. Yung, M. T. Batchelor.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 446. P. 461.

Поступила в редакцию 19.VII.2001 г.,
после доработки 2.IX.2001 г.