Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, Точное решение модели Изинга на дереве Кэли с конкурирующими тернарным и бинарным взаимодействиями, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 3, 493–499

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:55:40

© 2002 г.

Н. Н. Ганиходжаев*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ С КОНКУРИРУЮЩИМИ ТЕРНАРНЫМ И БИНАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

Точно решена проблема фазовых переходов для модели Изинга с конкурирующими тернарным и бинарным взаимодействиями. Для пары параметров $\theta = \theta(J)$ и $\theta_1 = \theta_1(J_1)$ на плоскости (θ_1, θ) определены две критические кривые такие, что для всех пар (θ_1, θ) , расположенных между этими кривыми, имеет место фазовый переход.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим полубесконечное дерево Кэли J^2 порядка 2, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого, кроме вершины x^0 , исходят три ребра, а из вершины x^0 , называемой корнем дерева, исходят два ребра (см. рис. 1).

Рис. 1

Вершины x и y называются ближайшими соседями и обозначаются $\langle x, y \rangle$, если существует ребро, соединяющее их. Вершины x, y и z называются тройкой соседей и обозначаются $\langle x, y, z \rangle$, если $\langle x, y \rangle$ и $\langle y, z \rangle$ – ближайшие соседи и $x \neq z$.

Пусть V – множество вершин дерева J^2 . Положим

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\},$$

$$V_n = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\} = \bigcup_{i=0}^n W_i,$$

* Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан.
E-mail: nasyr@uwed.freenet.uz

где расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, определяется по формуле

$$d(x, y) = \min \{d \mid x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1} = y \in V \text{ такие, что пары } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle \text{ — ближайшие соседи}\}.$$

Множество W_n называется n -м этажом дерева J^2 . Пусть $W_1 = \{x^1, x^2\}$ и $W_2 = \{x^3, x^4, x^5, x^6\}$ (см. рис. 1) — вершины 1-го и 2-го этажей.

Модель Изинга на дереве Кэли J^2 с конкурирующими тернарным и бинарным взаимодействиями определяется гамильтонианом

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y, z \rangle} \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z) - J_1 \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x)\sigma(y) - h \sum_{x \in V} \sigma(x) \quad (1)$$

с $J \neq 0$, где первая сумма берется по всем тройкам соседей, вторая — по всем ближайшим соседям и спиновые переменные $\sigma(x)$ принимают значения ± 1 (о моделях с конкурирующими взаимодействиями см. [1]–[4]).

Проблема фазовых переходов для этой модели в общей постановке не может быть точно решена. В этой статье мы рассмотрим небольшую модификацию гамильтониана (1), что позволит точно решить новую модель.

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТАТИЧЕСКИХ СУММ ДВУХЭТАЖНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА С ТЕРНАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрим множество всех конфигураций на $V_1 = \{x^0, x^1, x^2\}$ (см. рис. 1) и занумеруем их как показано на рис. 2. Разобьем статистическую сумму $Z^{(n)}$ на восемь слагаемых:

$$Z^{(n)} = \sum_{i=1}^8 Z_i^{(n)},$$

где

$$Z_i^{(n)} = \sum_{\sigma_n \in \Omega(V_n): \sigma_n|_{V_1} = \sigma^i} e^{-\beta H_n(\sigma_n)}.$$

Здесь $\Omega(V_n)$ — множество всех конфигураций на V_n и $H_n(\sigma_n)$ — полная энергия конфигурации σ_n относительно либо “+”-граничного условия, либо “—”-граничного условия, либо свободной границы.

Рис. 2

Рис. 3

Рассмотрим возможные конфигурации на втором этаже W_2 при фиксированной конфигурации σ^i на V_1 , $i = 1, 2, \dots, 8$. Для примера на рис. 3 приведены шесть существенно различных конфигураций для фиксированной конфигурации σ^1 на V_1 .

Пусть

$$\theta = e^{\beta J}, \quad \theta_1 = e^{2\beta J_1}, \quad \theta_2 = e^{\beta h}.$$

Несложно вывести следующую систему рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned} Z_1^{(n)} &= \theta \theta_1 \theta_2 (\theta^2 Z_1^{(n-1)} + 2Z_2^{(n-1)} + \theta^{-2} Z_4^{(n-1)})^2, \\ Z_2^{(n)} &= Z_3^{(n)} = \theta^{-1} \theta_2 (\theta^2 Z_1^{(n-1)} + 2Z_2^{(n-1)} + \theta^{-2} Z_4^{(n-1)}) \times \\ &\quad \times (\theta^{-2} Z_5^{(n-1)} + 2Z_6^{(n-1)} + \theta^2 Z_8^{(n-1)}), \\ Z_4^{(n)} &= \theta \theta_1^{-1} \theta_2 (\theta^{-2} Z_5^{(n-1)} + 2Z_6^{(n-1)} + \theta^2 Z_8^{(n-1)})^2, \\ Z_5^{(n)} &= \theta^{-1} \theta_1^{-1} \theta_2^{-1} (\theta^{-2} Z_1^{(n-1)} + 2Z_2^{(n-1)} + \theta^2 Z_4^{(n-1)})^2, \\ Z_6^{(n)} &= Z_7^{(n)} = \theta \theta_2^{-1} (\theta^{-2} Z_1^{(n-1)} + 2Z_2^{(n-1)} + \theta^2 Z_4^{(n-1)}) \times \\ &\quad \times (\theta^2 Z_5^{(n-1)} + 2Z_6^{(n-1)} + \theta^{-2} Z_8^{(n-1)}), \\ Z_8^{(n)} &= \theta^{-1} \theta_1 \theta_2^{-1} (\theta^2 Z_5^{(n-1)} + 2Z_6^{(n-1)} + \theta^{-2} Z_8^{(n-1)})^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Эта система уравнений не поддается полному анализу. Ниже мы немного видоизменим гамильтониан (1), что позволит существенно упростить систему уравнений (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тройку соседей $\langle x, y, z \rangle$ назовем двухэтажной и обозначим $\langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \rangle$, если вершины x и z принадлежат W_n для некоторого n , т.е. они располагаются на одном и том же этаже.

Рассмотрим следующий гамильтониан:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \rangle} \sigma(x) \sigma(y) \sigma(z) - J_1 \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x) \sigma(y) - h \sum_{x \in V} \sigma(x) \quad (3)$$

с $J \neq 0$, где первая сумма, в отличие от (1), берется только по двухэтажным соседним тройкам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Модель Изинга с конкурирующими тернарным и бинарным взаимодействиями, определяющуюся гамильтонианом (3), назовем двухэтажной моделью¹⁾.

¹⁾О физической мотивации изучения таких моделей см. работы [3], [4] и библиографию в них.

Положим (см. рис. 2)

$$\begin{aligned} Z_+^{(n)}(x^0) &= Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)} + Z_3^{(n)} + Z_4^{(n)}, \\ Z_-^{(n)}(x^0) &= Z_5^{(n)} + Z_6^{(n)} + Z_7^{(n)} + Z_8^{(n)}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (2) для двухэтажной модели Изинга редуцируется к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} Z_1^{(n)} &= \theta \theta_1 \theta_2 (Z_+^{(n-1)}(x^0))^2, \\ Z_2^{(n)} &= Z_3^{(n)} = \theta^{-1} \theta_2 Z_+^{(n-1)}(x^0) Z_-^{(n-1)}(x^0), \\ Z_4^{(n)} &= \theta \theta_1^{-1} \theta_2 (Z_-^{(n-1)}(x^0))^2, \\ Z_5^{(n)} &= \theta^{-1} \theta_1^{-1} \theta_2^{-1} (Z_+^{(n-1)}(x^0))^2, \\ Z_6^{(n)} &= Z_7^{(n)} = \theta \theta_2^{-1} Z_+^{(n-1)}(x^0) Z_-^{(n-1)}(x^0), \\ Z_8^{(n)} &= \theta^{-1} \theta_1 \theta_2^{-1} (Z_-^{(n-1)}(x^0))^2, \end{aligned} \quad (4)$$

так как теперь не учитываются взаимодействия соседних троек, не являющихся двух-этажными.

Положим

$$u_n(x^0) = \frac{Z_+^{(n)}(x^0)}{Z_-^{(n)}(x^0)}. \quad (5)$$

Тогда из системы уравнений (4) после несложных вычислений получим

$$u_n(x^0) = \theta_2^2 \frac{\theta^2 \theta_1^2 u_{n-1}^2(x^0) + 2\theta_1 u_{n-1}(x^0) + \theta^2}{u_{n-1}^2(x^0) + 2\theta^2 \theta_1 u_{n-1}(x^0) + \theta_1^2}, \quad (6)$$

где $n = 2, 3, \dots$. Если $\theta = 1$, т.е. $J = 0$, то уравнение (6) сводится к известному для обычной модели Изинга уравнению [5]

$$u_n(x^0) = \theta_2^2 \left(\frac{\theta_1 u_{n-1}(x^0) + 1}{u_{n-1}(x^0) + \theta_1} \right)^2.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Рассмотрим случай $h = 0$. Опишем неподвижные точки следующего рекуррентного уравнения:

$$u_n(x^0) = \frac{\theta^2 \theta_1^2 u_{n-1}^2(x^0) + 2\theta_1 u_{n-1}(x^0) + \theta^2}{u_{n-1}^2(x^0) + 2\theta^2 \theta_1 u_{n-1}(x^0) + \theta_1^2}, \quad (7)$$

где $n = 2, 3, \dots$. Для этого достаточно решить уравнение

$$u = \frac{\theta^2 \theta_1^2 u^2 + 2\theta_1 u + \theta^2}{u^2 + 2\theta^2 \theta_1 u + \theta_1^2}, \quad (8)$$

которое эквивалентно кубическому уравнению

$$u^3 + \theta^2 \theta_1 (2 - \theta_1) u^2 - \theta_1 (2 - \theta_1) u - \theta^2 = 0. \quad (9)$$

Положим $\gamma = \theta^2$, $\delta = \theta_1 (2 - \theta_1)$. После замены $u = v - \gamma\delta/3$ получим кубическое уравнение [6]

$$v^3 + pv + q = 0, \quad (10)$$

где

$$p = -\frac{\gamma^2 \delta^2 + 3\delta}{3}, \quad q = \frac{2\gamma^3 \delta^3}{27} + \frac{\gamma \delta^2}{3} - \gamma. \quad (11)$$

Несложно показать [6], что

$$Q = -\frac{4\delta^3 \gamma^4 + (\delta^4 + 18\delta^2 - 27)\gamma^2 + 4\delta^3}{108}.$$

Уравнение (10) имеет три действительных корня, если $Q < 0$.

Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $\theta_1 > 3$ для всех пар (θ_1, θ) таких, что $Q < 0$, уравнение (9) имеет три положительных корня.

Рис. 4

На рис. 4 указано геометрическое место точек (θ_1, θ) , для которых уравнение (9) имеет три положительных корня. Изображенные на рис. 4 кривые

$$\theta^* = \sqrt[4]{\frac{27 - 18\delta^2 - \delta^4 + (\delta^2 - 9)\sqrt{\delta^4 - 10\delta^2 + 9}}{8\delta^3}}$$

и

$$\theta^{**} = \sqrt[4]{\frac{27 - 18\delta^2 - \delta^4 - (\delta^2 - 9)\sqrt{\delta^4 - 10\delta^2 + 9}}{8\delta^3}},$$

где $\delta = \theta_1 (2 - \theta_1)$ и $\theta_1 \geq 3$, являются соответственно нижней и верхней критическими кривыми.

Для произвольной пары (θ_1, θ) , расположенной между этими кривыми, уравнение (9) имеет три положительных корня $u_1^* < u_2^* < u_3^*$ и, если пара (θ_1, θ) расположена на или ниже (выше) критической кривой θ^* (θ^{**}), тогда уравнение (9) имеет единственный положительный корень.

Обозначим область, ограниченную критическими кривыми, как ПК-область (положительные корни). Заметим, что если $\theta = 1$, тогда $\theta_1^* = 3$. Это критическое значение θ_1 известно для обычной модели Изинга [5].

Теперь исследуем при $u > 0$ функцию

$$\psi(u) = \frac{\theta^2 \theta_1^2 u^2 + 2\theta_1 u_\theta^2}{u^2 + 2\theta^2 \theta_1 u + \theta_1^2}.$$

Элементарными методами доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В ПК-области функция $\psi(u)$ возрастает на всей полуоси $(0, \infty)$.

Рис. 5

Пусть $u_1^* < u_2^* < u_3^*$ — неподвижные точки уравнения (7). Из несложных вычислений следует, что в ПК-области существует единственная положительная точка перегиба функции ψ в интервале (u_1^*, u_3^*) и $\psi''(0) > 0$. Легко показать графически (см. рис. 5), что если $0 < u_1 < u_1^*$, то последовательность $\{u_n\}$ (7) монотонно возрастает к u_1^* — наименьшей неподвижной точке.

Последовательность $\{u_n\}$ для значений $u_1^* < u_1 < u_2^*$ монотонно убывает к u_1^* , для значений $u_2^* < u_1 < u_3^*$ монотонно возрастает к u_3^* и, наконец, при $u_3^* < u_1$ монотонно убывает к u_3^* .

Наименьшая неподвижная точка определяет предельное отношение вероятностей при “+”-граничном условии, наибольшая неподвижная точка определяет предельное отношение вероятностей при “−”-граничном условии и лишь при $\theta = 1$ среднее значение u_2^* соответствует свободной границе, так как в этом случае $u_2^* = 1$.

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА. Для двухэтажной модели Изинга с конкурирующими тернарным и бинарным потенциалами имеет место фазовый переход, а именно при $\theta_1 > 3$ существуют две критические кривые θ^* и θ^{**} такие, что для произвольных (θ, θ_1) ,

для которых $\theta^* < \theta < \theta^{**}$, имеет место фазовый переход, т.е. ПК-область является областью фазовых переходов.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Модель Изинга, первоначально рассмотренная как модель ферромагнетика, в последние годы находит ряд приложений во многих других физических, биологических, химических системах и даже в социологии [7]. Модель (1), рассмотренная выше, является естественным обобщением модели Изинга, а модель вида (3) изучалась в ряде работ (см., например, работы [3], [4], где приведены физические мотивации актуальности исследования таких моделей). В этих и других работах модель (3) рассматривалась на структурах типа дерева Хусими [3], [4] или решетки КагOME [4], причем во всех этих работах не получены точные решения проблемы фазового перехода, а приведены решения при некоторых конкретных значениях параметров.

Из доказанной выше теоремы следует, что фазовый переход имеет место при “средних” значениях температуры, что существенно отличается от известных результатов для обычной модели Изинга, где фазовый переход имеет место при низких температурах. Заметим также, что при $J_1 = 0$, т.е. когда отсутствуют бинарные взаимодействия, при любых значениях параметра J тернарного взаимодействия фазового перехода не существует.

Описание гиббсовских состояний, соответствующих u_1^* , u_2^* , u_3^* , будет предметом отдельной статьи, но здесь отметим, что эти состояния являются трансляционно-инвариантными относительно сдвигов на полубесконечном дереве Кэли.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту, замечания которого способствовали улучшению текста статьи.

Список литературы

- [1] *M. Mariz, C. Tsallis, E. L. Albuquerque.* J. Stat. Phys. 1985. V. 40. P. 577–592.
- [2] *C. R. da Silca, S. Coutinho.* Phys. Rev. B. 1986. V. 34. P. 7975–7985.
- [3] *J. L. Monree.* J. Stat. Phys. 1992. V. 67. P. 1185–1200.
- [4] *J. L. Monree.* Phys. Lett. A. 1994. V. 188. P. 80–84.
- [5] *R. Kindermann, J. L. Snell.* Markov Random Fields and their Applications. Contemporary Mathematics. V. 1. Providence, R.I.: AMS, 1980.
- [6] *Г. Корн, Т. Корн.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
- [7] *W. Weidlich.* Br. J. Math. Statist. Psychol. 1971. V. 24. № 2. P. 251–266.

Поступила в редакцию 23.II.2001 г.,
после доработки 8.X.2001 г.