Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, Существование фазового перехода для p -адической модели Поттса на множестве $\mathbb{Z}$, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 3, 500–507

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:41:48

© 2002 г. Н. Н. Ганиходжаев*, Ф. М. Мухамедов*, У. А. Розиков*

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ДЛЯ p -АДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА МНОЖЕСТВЕ $\mathbb{Z}$

Рассматривается модель Поттса на множестве $\mathbb{Z}$ в поле p -адических чисел Q_p , для которой спиновые переменные $\sigma(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, принимают значения из $\Phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q\} \subset Q_p^{q-1} = \underbrace{Q_p \times Q_p \times \dots \times Q_p}_{q-1}$. Показано, что существуют такие значения $q = q(p)$, для которых имеют место фазовые переходы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 80-х годов активно изучаются различные модели, описываемые языком p -адического анализа, точнее рассматриваются модели над полем p -адических чисел, что связано с предположением, что p -адические числа более точно, более адекватно описывают явления микромира. Известные работы в этом направлении посвящены в основном изучению квантово-механических моделей с помощью уравнений математической физики (см., например, [1]–[4]).

В данной работе развиваются теоретико-вероятностные подходы изучения некоторых моделей статистической механики на $\mathbb{Z}$ в поле p -адических чисел.

Всякое рациональное число $x \neq 0$ представимо в виде $x = p^r n/m$, где $r, m, n \in \mathbb{Z}$, $(p, n) = (p, m) = 1$, p – фиксированное простое число.

p -Адическая норма рационального числа x определяется равенством

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта норма обладает обычными свойствами:

- 1) $|x|_p \geq 0$, $|x|_p = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 2) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$;
- 3) справедливо сильное неравенство треугольника

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пополнение поля рациональных чисел относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y|_p$ называется полем p -адических чисел и обозначается через Q_p .

Известная теорема Островского утверждает, что нормы $|x|_\infty = |x|$, $|x|_p$, $p = 2, 3, 5, \dots$, исчерпывают все неэквивалентные нормы в поле рациональных чисел Q (см. [5]). Замыкание Q по норме $|x|_\infty$ дает все вещественные числа $\mathbb{R}$, а по норме $|x|_p$ — p -адические числа Q_p . Поэтому с точки зрения математики вполне оправдано рассмотрение альтернативного анализа и математической физики над полем p -адических чисел Q_p .

В данной работе рассматривается модель Поттса на $\mathbb{Z}$ в поле p -адических чисел, для которой спинные переменные $\sigma(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, принимают значения из $\Phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q\} \subset Q_p^{q-1} = \underbrace{Q_p \times Q_p \times \dots \times Q_p}_{q-1}$.

Обозначим $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}$ и $F_n = \Phi^{\Lambda_n}$ — пространство конфигураций на Λ_n , т.е. множество всех функций $\sigma: \Lambda_n \rightarrow \Phi$.

Гамильтониан $H_n: F_n \rightarrow Q_p$ модели Поттса имеет вид

$$H_n(\sigma) = -J \sum_{i=-n}^{n-1} \delta_{\sigma(i)\sigma(i+1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где $\sigma = \{\sigma(-n), \sigma(-n+1), \dots, \sigma(n)\}$, $|J|_p < a(p) = p^{-1/(p-1)}$ и $J \neq 0$, p — фиксированное простое число, δ — символ Кронекера.

В случае, когда вместо Q_p рассматривается $\mathbb{R}$, для модели Поттса и даже для произвольных моделей на $\mathbb{Z}$ независимо от радиуса взаимодействия частиц не существует фазовых переходов (см. [6], [7]). В нашем случае эта картина нарушается, а именно существуют такие значения $q = q(p)$, для которых имеют место фазовые переходы. Основной целью настоящей работы является доказательство этого утверждения.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть множество значений спинных переменных $\sigma(n) \in Q_p^{q-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, состоит из векторов $\sigma_i \in Q_p^{q-1}$, $i = 1, 2, \dots, q$, таких, что $|\sigma_i|_p = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, q$ и

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad \sigma_q = \sum_{i=1}^{q-1} \sigma_i.$$

Рассмотрим $h \in Q_p^{q-1}$, тогда $h = \sum_{i=1}^{q-1} h_i \sigma_i$ и ясно, что

$$h \sigma_i = \begin{cases} h_i, & \text{если } i = 1, 2, \dots, q-1, \\ \sum_{i=1}^{q-1} h_i, & \text{если } i = q. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть h_m , $m \in \mathbb{Z}$, – векторнозначная (из Q_p^{q-1}) функция такая, что

$$|h_m|_p = \max_{1 \leq i \leq q-1} |h_m^{(i)}|_p < a(p) \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

где $h_m = (h_m^{(1)}, h_m^{(2)}, \dots, h_m^{(q-1)}) \in Q_p^{q-1}$.

Пусть Ω_p – алгебраическое пополнение Q_p . Обозначим через $\log_p$, $\exp_p$ p -адические логарифм и экспоненту, соответственно (см. [5]). Множество $D_a(r) = \{x \in \Omega_p: |x - a|_p < r\}$ называется открытым диском радиуса $r \in \mathbb{R}$ с центром в точке $a \in \Omega_p$.

ЛЕММА 1 [5]. *Функции $\log_p$, $\exp_p$ задают взаимно обратные изоморфизмы между мультипликативной группой точек открытого диска радиуса $a(p)$ с центром в точке 1 и аддитивной группой точек открытого диска радиуса $a(p)$ с центром в точке 0.*

Таким образом, функция $\log_p$ определена на диске $D_0(1)$, а $\exp_p$ – на диске $D_0(a(p))$.

ЛЕММА 2. *Если $J \in D_0(a(p))$ и $|h_m|_p < a(p)$, $m \in \mathbb{Z}$, то для любого $n > 0$ справедливо*

$$H_n(\sigma) + h_n \sigma(n) + h_{-n} \sigma(-n) \in D_0(a(p)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из сильного неравенства треугольника для нормы $|x|_p$.

Для каждого $n > 0$ определим меру μ_n на F_n , полагая

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp_p \{H_n(\sigma) + h_n \sigma(n) + h_{-n} \sigma(-n)\}, \quad (3)$$

где $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in \Lambda_n\} \in F_n$ и Z_n – нормирующий множитель.

Условия согласования для $\mu_n(\sigma_n)$ при $n > 0$ определяются равенством

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (4)$$

где $\sigma^{(n)} = \{\sigma(-n), \sigma(n)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что определенные в нашем случае распределения являются неархимедовыми распределениями. Для распределения (3) можно доказать аналог теоремы Колмогорова о продолжении распределений. Поэтому необходимо доказать следующую теорему 1, в силу которой задача описания предельных гиббсовских распределений на $\mathbb{Z}$ сводится к описанию решений приведенного ниже функционального уравнения (5).

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы меры (3) удовлетворяли условию (4), необходимо и достаточно, чтобы для h_n , $n > 0$, выполнялось равенство

$$h_{n-1} = F(h_n; \theta; q), \quad (5)$$

где $\theta = \exp_p J$, а функция $F(h; \theta; q)$ определяется формулой

$$F'_i = \ln \left[\frac{(\theta - 1) \exp_p h'_i + \sum_{j=1}^{q-1} \exp_p h'_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} \exp_p h'_j + \theta} \right],$$

и

$$\begin{aligned} h &= (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_{q-1}), & F &= (F_1, F_2, \dots, F_{q-1}), \\ h'_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^{q-1} \tilde{h}_j, & F'_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^{q-1} F_j. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Необходимость. В силу условия согласования (4)

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \sum_{\sigma(n)} \exp_p \{ J(\delta_{\sigma(-n)\sigma(-n+1)} + \delta_{\sigma(n)\sigma(n-1)}) + h_n \sigma(n) + h_{-n} \sigma(-n) \} = \\ = \exp_p \{ h_{-n+1} \sigma(-n+1) + h_{n-1} \sigma(n-1) \}, \quad \sigma(n) \in \Phi. \end{aligned} \quad (6)$$

Из этого равенства при $\sigma(n-1) = \sigma_i$ и $\sigma(n-1) = \sigma_q$ получим

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \sum_{\sigma(n)} \exp_p \{ J(\delta_{\sigma_i \sigma(-n+1)} + \delta_{\sigma(n) \sigma_i}) + h_n \sigma(n) + h_{-n} \sigma(-n) \} = \\ = \exp_p \{ h_{-n+1} \sigma(-n+1) + h_{n-1} \sigma_i \}, \quad \sigma(n) \in \Phi, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \sum_{\sigma(n)} \exp_p \{ J(\delta_{\sigma_q \sigma(-n+1)} + \delta_{\sigma(n) \sigma_q}) + h_n \sigma(n) + h_{-n} \sigma(-n) \} = \\ = \exp_p \{ h_{-n+1} \sigma(-n+1) + h_{n-1} \sigma_q \}, \quad \sigma(n) \in \Phi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\sum_{\sigma(n)} \exp_p \{ J \delta_{\sigma_i \sigma(n)} + h_n \sigma(n) \}}{\sum_{\sigma(n)} \exp_p \{ J \delta_{\sigma_q \sigma(n)} + h_n \sigma(n) \}} = \exp_p (h_{n-1} (\sigma_i - \sigma_q)), \quad (7)$$

откуда имеем

$$\frac{\sum_{j=1}^{q-1} \exp_p (h_n (\sigma_j - \sigma_q)) + (\theta - 1) \exp_p (h_n (\sigma_i - \sigma_q)) + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} \exp_p (h_n (\sigma_j - \sigma_q)) + \theta} = \exp_p (h_{n-1} (\sigma_i - \sigma_q)). \quad (8)$$

В силу (2) получим

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{j=1}^{q-1} \exp_p \left(\sum_{m=1, m \neq j}^{q-1} h_n^{(m)} \right) + (\theta - 1) \exp_p \left(\sum_{m=1, m \neq i}^{q-1} h_n^{(m)} \right) + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} \exp_p \left(\sum_{m=1, m \neq j}^{q-1} h_n^{(m)} \right) + \theta} = \\ & = \exp_p \left(\sum_{m=1, m \neq i}^{q-1} h_{n-1}^{(m)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) легко получим (5).

2. Достаточность. Из (9) получим (8), (7) и (6), т.е. (4). Теорема доказана.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

В силу теоремы 1 для любой совокупности величин $h = \{h_n, n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющих условию (5), существует и притом единственное распределение Гиббса μ , которое удовлетворяет равенству

$$\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства существования фазовых переходов достаточно показать, что существуют две различные совокупности векторов, удовлетворяющих условию (5).

Пусть

$$\exp_p \left(\sum_{m=1, m \neq i}^{q-1} h_n^{(m)} \right) = z_{i,n} = z_i \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Тогда из (5) получим

$$(z_i - 1) \left(\sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1 \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q-1. \quad (11)$$

Ясно, что $z_i = 1, i = 1, 2, \dots, q-1$, есть решение уравнения (11).

Теперь рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1 = 0. \quad (12)$$

Положим, что $z_i = z_j, i, j = 1, 2, \dots, q-1$. Тогда уравнение (12) примет вид

$$z_1 = \exp_p h_0 = -\frac{1}{q-1}.$$

Имеет место выражение

$$\log_p \left(-\frac{1}{q-1} \right) = \log_p \left(1 - \frac{q}{q-1} \right).$$

Для того чтобы существовала функция $\exp_p h$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|q/(q-1)|_p < a(p)$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $q = 2$. Тогда модель Поттса совпадает с моделью Изинга и условие (5) можно переписать в виде

$$\exp_p(2h_n) = \frac{\alpha \exp_p(2h_{n+1}) + 1}{\alpha + \exp_p(2h_{n+1})}.$$

Полагая $h_n = h$ для любого $n \in \mathbb{N}$, из этого уравнения получим

$$\begin{aligned} \exp_p(4h) &= 1, \quad \text{если } \alpha \neq 1, \\ \exp_p(2h) &= 1, \quad \text{если } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого α

$$\exp_p(h) = 1, \tag{13a}$$

$$\exp_p(h) = -1 \tag{13б}$$

и для любого $\alpha \neq 1$

$$\exp_p(h) = \sqrt{-1}, \tag{14a}$$

$$\exp_p(h) = -\sqrt{-1}. \tag{14б}$$

Из уравнения (13a) получим $h = \log_p 1 = 0$ для любого α .

Из (13б) получим $h = \log_p(-1) = \log_p(1-2)$. Заметим, что

$$|-2|_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \neq 2, \\ 1/2, & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $-2 \notin D_0(1)$, если $p > 2$, и $-2 \in D_0(1)$, если $p = 2$. Таким образом, система (13) имеет единственное решение $h = 0$, если $p > 2$, и два решения $h = 0$, $h = \log_2(-1)$, если $p = 2$.

Из (14a) получим $h = \log_p \sqrt{-1} = \log_p(1 + \sqrt{-1} - 1)$, но $|\sqrt{-1} - 1|_p = 1$ при $p > 2$. Действительно, $|\sqrt{-1} - 1|_p^2 = |(\sqrt{-1} - 1)^2|_p = |-2\sqrt{-1}|_p = 1$. Следовательно, $\sqrt{-1} - 1 \notin D_0(1)$. Заметим, что при $p = 2$ выражение $\sqrt{-1}$ не определено (см. [5]).

Таким образом, уравнение (14a) не имеет решения. Аналогично можно доказать, что уравнение (14б) не имеет решения.

2. Пусть $q \in p\mathbb{N} = \{p, 2p, 3p, \dots\}$, т.е. $q = p^m r$ (r не кратно p), $m \in \mathbb{N}$, тогда

$$\left| \frac{q}{q-1} \right|_p = p^{-m} < a(p).$$

Следовательно, для $h_0 = \log_p(-1/(q-1))$ существует $\exp_p h_0$, т.е. $h_i = h_0$ является решением уравнения (12).

3. Пусть $q \in p\mathbb{N} + s$, $s = 1, 2, \dots, p-1$, т.е. $q = p^m r + s$. Уравнение (12) перепишем следующим образом:

$$\exp_p h_1 = -1 - \sum_{j=2}^{q-1} \exp_p h_j.$$

Рассмотрим выражение

$$\log_p \left(-1 - \sum_{j=2}^{q-1} \exp_p h_j \right) = \log_p \left(-1 - \left(q + \sum_{j=2}^{q-1} (\exp_p h_j - 1) \right) \right).$$

Так как $|\exp_p h_j - 1|_p < 1$ для любого $j = 1, 2, \dots, q-1$ и $|q|_p = 1$, то согласно неравенству равнобедренного треугольника (см. [5]) получим

$$\left| q + \sum_{j=2}^{q-1} (\exp_p h_j - 1) \right|_p = 1,$$

поскольку

$$\left| \sum_{j=2}^{q-1} (\exp_p h_j - 1) \right|_p < 1.$$

В силу вышесказанного p -адическая экспонента от $h = \log_p(-1 - \sum_{j=2}^{q-1} \exp_p h_j)$ не существует.

Таким образом, уравнение (11) имеет не менее двух решений $z_i = 1$ и $z_i = z_0$, $i = 1, 2, \dots, q-1$, если $q \in p\mathbb{N}$ ($q \geq 3$).

Подставляя $z_i = 1$ в (10), получим систему

$$\exp_p \left(\sum_{m=1, m \neq j}^{q-1} h_n^{(m)} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q-1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Заметим, что система (15) имеет единственное решение

$$h_n^{(m)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, q-1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подставляя $z_i = z_0 \neq 1$ в (10), при $q \in p\mathbb{N}$ получим систему

$$\exp_p \left(\sum_{m=1, m \neq j}^{q-1} h_n^{(m)} \right) = \log_p z_0, \quad j = 1, 2, \dots, q-1. \quad (16)$$

Система (16) также имеет единственное решение

$$h_n^{(m)} = h^* \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots, q-1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу теоремы 1 решениям 0, h^* соответствуют предельные меры μ_0 и μ_* , соответственно.

Таким образом, доказана основная теорема этой работы.

ТЕОРЕМА 2. Если $q \in p\mathbb{N}$, то существует фазовый переход.

Из теоремы 2 в качестве следствия можно получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Если $q = 2$, то при $p = 2$ существует фазовый переход.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теорем 2 и 3 видно, что фазовые переходы для одномерных моделей (т.е. на $\mathbb{Z}$) существуют и (что особенно интересно) существование фазового перехода не зависит от значения температуры. Точнее, уравнения, которые решены в нашем случае, независимо от значения температуры имеют два различных решения, если выполняются условия теорем 2 и 3. Эти результаты наглядно показывают отличие моделей, определенных на $\mathbb{Z}$ в поле вещественных чисел, от моделей, определенных в поле p -адических чисел (для сравнения см. [6]–[14]). Более существенные различия предполагается получить при переходе к многомерным решеткам Z^d и деревьям Кэли Γ^k .

Список литературы

- [1] А. Ю. Хренников. ТМФ. 1993. Т. 97. № 3. С. 348–364.
- [2] В. С. Владимиров. УМН. 1988. Т. 43. № 5(263). С. 17–53.
- [3] В. С. Владимиров, И. В. Волович. Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 88–99.
- [4] И. В. Волович. ТМФ. 1987. Т. 71. № 3. С. 337–340.
- [5] Н. Коблиц. p -Адические числа, p -адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.
- [6] Д. Рюэль. Статистическая механика. М.: Мир, 1971.
- [7] В. А. Малышев, Р. А. Минлос. Гиббсовские случайные поля. М.: Наука, 1985.
- [8] Я. Г. Синай. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
- [9] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков. ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 109–117.
- [10] У. А. Розиков. ТМФ. 1997. Т. 112. № 1. С. 170–176.
- [11] У. А. Розиков. Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 2. С. 427–435.
- [12] У. А. Розиков. ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 95–104.
- [13] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков. Матем. сб. 1999. Т. 190. № 2. С. 31–42.
- [14] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov. Osaka J. Math. 2000. V. 37. № 2. P. 373–383.

Поступила в редакцию 24.I.2001 г.,
после доработки 20.VI.2001 г.