Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Соколов, А. В. Цыганов, Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 1, 118–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:58:39

© 2002 г.

В. В. Соколов*, А. В. Цыганов†

ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ВОЛЧКОВ КОВАЛЕВСКОЙ И ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

Рассматривается квадратичная деформация волчка Ковалевской, включающая в себя как редукцию новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа, найденный недавно одним из авторов. Для этой деформации найдена пара Лакса с матричными коэффициентами размера 5×5 . Кроме того, указаны аналогичные деформации для двухполюсового гиростата и волчка Ковалевской на $so(p, q)$. Все полученные пары Лакса являются деформациями представлений Лакса, найденных Рейманом и Семеновым–Тян–Шанским. Аналогичная деформация и представление Лакса в матрицах размера 3×3 найдена также для волчка Горячева–Чаплыгина.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было показано, что волчок, соответствующий гамильтониану

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2(c_2x_1 - a_1)J_3 - 2a_1c_2x_1 - c_2^2x_3^2 - 2c_1x_2, \quad (1)$$

где c_1 , c_2 и a_1 — произвольные постоянные, точно интегрируем. Если $c_2 = a_1 = 0$, этот гамильтониан редуцируется к знаменитому гамильтониану Ковалевской. Случай $c_2 = 0$ соответствует гамильтониану Ковалевской с дополнительным гиростатным членом. При $a_1 = c_1$ мы получаем гамильтониан для интегрируемого случая уравнений Кирхгофа, найденного в работе [2].

Оказывается, что существует многочлен четвертой степени, который коммутирует с гамильтонианом (1) относительно скобки Ли–Пуассона

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где ε_{ijk} — стандартный полностью кососимметрический тензор. Эта скобка обладает двумя функциями Казимира $I_1 = (x, x)$, $I_2 = (J, x)$, где $J = (J_1, J_2, J_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$,

*ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия. E-mail: sokolov@landau.ac.ru

†Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

а (x, y) обозначает скалярное произведение на $\mathbb{R}^3$. Так как симплектические листы общего положения, специфицированные значениями этих функций Казимира, имеют размерность 4, нам достаточно одного дополнительного интеграла для интегрируемости по Лиувиллю соответствующих уравнений движения

$$J_t = \{J, H\}, \quad x_t = \{x, H\}. \quad (3)$$

В настоящей работе указана пара Лакса с матричными коэффициентами размера 5×5 для задачи (3), (1), обобщающая соответствующую пару Лакса из статьи [3]. Следуя работе [4], мы находим деформацию знаменитой кривой Ковалевской относительно дополнительного параметра c_2 . Мы также обобщаем двухполевой гиростат и $so(p, q)$ -модель из работы [3] и указываем соответствующие пары Лакса.

Кроме того, мы находим похожую пару Лакса с матричными коэффициентами размера 3×3 для обобщенного волчка Горячева–Чаплыгина с гамильтонианом

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 - 2a_1J_3 - 4c_1x_2 - 4a_1c_2x_1 + 8c_2J_3x_1 - 4c_2^2x_3^2. \quad (4)$$

При $c_2 = 0$ этот гамильтониан совпадает с обычным гиростатом Горячева–Чаплыгина и наша пара Лакса сводится к представлению Лакса из работы [5]. Как и гиростат Горячева–Чаплыгина, наше обобщение является точно интегрируемой системой только на уровне $I_2 = 0$. В случае $a_1 = c_1 = 0$ мы получаем новый частично интегрируемый (т.е. интегрируемый на специальном уровне одного из интегралов движения) случай для уравнений Кирхгофа.

2. ОБОБЩЕННЫЙ ВОЛЧОК КОВАЛЕВСКОЙ

Гиростат Ковалевской задается гамильтонианом (1) с $c_2 = 0$. В работе [3] было найдено представление Лакса

$$\frac{d}{dt} L_{\text{Kow}} = [M_{\text{Kow}}, L_{\text{Kow}}] \quad (5)$$

для этой системы. Соответствующие матрицы Лакса L_{Kow} и M_{Kow} задаются формулами

$$L_{\text{Kow}}(\lambda) = \lambda A + B + c_1 \lambda^{-1} C, \quad M_{\text{Kow}}(\lambda) = -2\lambda A + D, \quad (6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & J_3 & -J_2 & 0 & 0 \\ -J_3 & 0 & J_1 & 0 & 0 \\ J_2 & -J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_3 - a_1 \\ 0 & 0 & 0 & J_3 + a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -4J_3 - 2a_1 & 2J_2 & 0 & 0 \\ 4J_3 + 2a_1 & 0 & -2J_1 & 0 & 0 \\ -2J_2 & 2J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическая кривая $\text{Det}(L_{\text{Kow}}(\lambda) - \mu \cdot \text{Id}) = 0$, где $\text{Id} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1)$ – единичная матрица, генерирует полный набор первых интегралов для гиростата Ковалевской [3].

В настоящей статье мы рассматриваем матрицу вида

$$L(\lambda, \mu) = L_1(\lambda) + \mu \cdot L_2(\lambda), \quad (7)$$

где

$$L_1(\lambda) = L_{\text{Kow}}(\lambda) + c_2 X, \quad L_2(\lambda) = -\text{Id} + c_2 \lambda^{-1} Y,$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что если $c_2 = 0$, то матрица $L(\lambda, \mu)$ совпадает с $L_{\text{Kow}}(\lambda) - \mu \cdot \text{Id}$.

Легко проверить, что $L(\lambda, \mu)$ обладает следующими симметричными свойствами:

$$L(\lambda, \mu) = -L^T(-\lambda, -\mu), \quad L(\lambda, \mu) = V^{-1} L(-\lambda, \mu) V, \quad (8)$$

где $V = \text{diag}(1, 1, 1, -1, -1)$, а индекс Т означает матричное сопряжение.

Простое вычисление показывает, что алгебраическая кривая $\mathcal{C}: \text{Det } L(\lambda, \mu) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: d_2(\lambda^2)\mu^4 + d_1(\lambda^2)\mu^2 + d_0(\lambda^2) &= 0, \\ d_2 &= \lambda^2 + c_2^2 I_1, \quad d_0 = \lambda^6 - H\lambda^4 + I_4\lambda^2 - c_1^2 I_2^2, \\ d_1 &= -2\lambda^4 + (H + a_1^2 - c_2^2 I_1)\lambda^2 + (c_2^2 I_2^2 - c_1^2 I_1), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} H &= J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2c_1 x_2 + 2a_1 J_3 + 2c_2(J_3 x_1 - x_3 J_1), \\ I_4 &= x_1(x_1(J_2^2 + J_3^2 - J_1^2) - 2(x_3 J_3 + x_2 J_2)J_1)c_2^2 + (x_2^2 + x_3^2)c_1^2 + \\ &\quad + 2(c_1 x_1(x_3 J_2 - x_2 J_3) + (J_3 + a_1)(x_1(J_2^2 + J_3^2) - \\ &\quad - (x_2 J_2 + x_3 J_3)J_1))c_2 - 2(x_2(J_2^2 + J_3^2 + a_1 J_3) + \\ &\quad + (x_1 J_1 - a_1 x_3)J_2)c_1 + (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)(J_3 + a_1)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

$$(11)$$

Следующее утверждение доказывается прямым вычислением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Функции H и I_4 коммутируют относительно скобки (2): $\{H, I_4\} = 0$.*

Из предложения следует, что функции $I_3 = H$ и I_4 являются интегралами в инволюции и соответствующая гамильтонова система вполне интегрируема. Отметим, что гамильтониан (10) с точностью до канонического преобразования

$$J_1 \rightarrow J_1 + c_2 x_3, \quad J_2 \rightarrow J_2, \quad J_3 \rightarrow J_3 - c_2 x_1$$

совпадает с (1).

Следующая теорема описывает лагранжевы структуры, связанные с оператором (7).

ТЕОРЕМА 1. Поток с гамильтонианом (10) эквивалентен следующим матричным соотношениям:

$$\frac{d}{dt} L_i = L_i M(\lambda) + M^T(-\lambda) L_i, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

где

$$M = M_{\text{Kow}} + W, \quad W = 2c_2 \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Из соотношений (12) следует, что операторы

$$L_+ = L_1(\lambda) L_2^{-1}(\lambda), \quad L_- = L_2^{-1}(\lambda) L_1(\lambda) \quad (14)$$

удовлетворяют обычным уравнениям Лакса

$$\frac{d}{dt} L_+ = [L_+, -M^T(-\lambda)], \quad \frac{d}{dt} L_- = [L_-, M(\lambda)]. \quad (15)$$

Явная формула для L_2^{-1} выглядит следующим образом:

$$L_2^{-1} = - \left(\text{Id} + \frac{1}{\lambda} Y + \frac{1}{\lambda^2} Y^2 + \frac{1}{\lambda^3 \Delta} Y^3 + \frac{1}{\lambda^4 \Delta} Y^4 \right),$$

где

$$\Delta = -\text{Det } L_2 = 1 + \frac{c_2^2 I_1}{\lambda^2}$$

— функция Казимира.

Ясно, что детерминантные кривые $\text{Det } L(\lambda, \mu) = 0$, $\text{Det}(L_+(\lambda) - \mu \cdot \text{Id}) = 0$ и $\text{Det}(L_-(\lambda) - \mu \cdot \text{Id}) = 0$ совпадают друг с другом с точностью до несущественного множителя. Поэтому в принципе можно использовать один из операторов $L_{\pm}$, для того чтобы обобщить результаты работы [3] на случай гамильтониана (1). Однако, на наш взгляд, оператор L выглядит более элегантно, чем операторы $L_{\pm}$, и нам представляется более естественным работать с оператором L .

ЗАМЕЧАНИЕ. Лаксовы триады (12) и матрицы Лакса вида $L_1(\lambda) L_2^{-1}(\lambda)$ рассматривались в связи с релятивистской цепочкой Тоды (см. [6] и ссылки там). Однако в этом случае оператор L_1 был одним и тем же для исходной и деформированной моделей, в то время как в нашем случае L_1 должен быть тоже деформирован.

Следуя работе [3], рассмотрим проекцию C_1 кривой $\mathcal{C}$ (9), заданную заменой переменных $z = \lambda^2$:

$$C_1: d_2(z) \mu^4 + d_1(z) \mu^2 + d_0(z) = 0.$$

Род кривой C_1 уменьшается с 3 до 2 в двух следующих случаях: $a_1 = I_2 = 0$ или $a_1 = c_1 = 0$. Последняя возможность соответствует новому интегрируемому случаю для уравнений Кирхгофа, найденному в работе [2].

Рассмотрим первый случай. Следуя наблюдению из работы [4], мы можем легко найти деформацию кривой Ковалевской по параметру c_2 . А именно, преобразование

$$\mu = \frac{y}{x^2 + (H + I_1 c_2^2)x + I_4 - I_1 c_1^2}, \quad z = \frac{I_1 x(c_1^2 - c_2^2 x)}{x^2 + (H + I_1 c_2^2)x + I_4 - I_1 c_1^2} \quad (16)$$

приводит C_1 к нормальной форме

$$C_2: y^2 = x(x^2 + Hx + I_4)(x^2 + (H + c_2^2 I_1)x + I_4 - c_1^2 I_1). \quad (17)$$

Эта кривая отличается от соответствующей кривой из работы [3] только третьим множителем. Следуя [4], применим преобразование Рихело к кривой C_2 , для того чтобы получить другую гиперэллиптическую кривую

$$\tilde{C}_2: \eta^2 = (c_2^2 \zeta^2 - 2c_1^2 \zeta - Hc_1^2 - I_4 c_2^2)(\zeta^2 - I_4 + I_1 c_1^2)(\zeta^2 - I_4), \quad (18)$$

которая и является деформацией обычной кривой Ковалевской. Если $c_2 = 0$ и $c_1 = 1$, то $\tilde{C}_2$ совпадает с кривой Ковалевской. Мы видим, что при деформации род кривой не меняется и различие имеется только в первом множителе.

Во втором случае нормальная форма C_1 имеет вид

$$C_3: y^2 = x(x^2 + Hx + I_4)(x^2 + (H + c_2^2 I_1)x + I_4 + c_2^2 I_2^2), \quad (19)$$

и преобразование Рихело приводит к кривой

$$\tilde{C}_3: \eta^2 = (I_1 \zeta^2 + 2I_2^2 \zeta + HI_2^2 - I_4 I_1)(\zeta^2 - I_4 - I_2^2 c_2^2)(\zeta^2 - I_4). \quad (20)$$

Интересно отметить дуальность между I_2 и c_1 в двух рассматриваемых случаях. По аналогии со случаем Ковалевской можно ожидать, что кривые (18) и (20) – кривые разделения для соответствующих случаев.

3. ОБОБЩЕННЫЙ ДВУХПОЛЕВОЙ ГИРОСТАТ

В двухполевом случае мы имеем три неизвестных вектора $J = (J_1, J_2, J_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$. Скобка Ли–Пуассона задается формулами

$$\begin{aligned} \{J_i, J_j\} &= \varepsilon_{ijk} J_k, & \{J_i, x_j\} &= \varepsilon_{ijk} x_k, & \{x_i, x_j\} &= 0, \\ \{J_i, y_j\} &= \varepsilon_{ijk} y_k, & \{y_i, y_j\} &= 0, & \{x_i, y_j\} &= 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (21)$$

Функциями Казимира являются (x, x) , (x, y) и (y, y) .

Мы утверждаем, что гамильтониан

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2c_1 x_2 - 2b_1 y_1 + 2a_1 J_3 + 2c_2 (J_3 x_1 - x_3 J_1) - 2b_2 (J_3 y_2 - J_2 y_3) \quad (22)$$

приводит к вполне интегрируемой модели, если справедливо равенство

$$c_1 b_2 - b_1 c_2 = 0.$$

Хотя параметры могут быть нормализованы растяжениями, мы предпочитаем не менять их, поскольку все редукции и предельные переходы более очевидны при такой записи. В случае $b_1 = b_2 = 0$ гамильтониан (22) совпадает с (10). При $a_1 = c_1 = b_1 = 0$ мы получаем новый однородный квадратичный интегрируемый гамильтониан.

Два необходимых дополнительных интеграла движения являются коэффициентами при λ^4 и λ^2 в алгебраической кривой $\text{Det } L(\lambda, \mu) = 0$, где $L = L_1 + \mu L_2$,

$$L_1 = \lambda A + B + \hat{X} + \lambda^{-1} \hat{C}, \quad L_2 = -\text{Id} + \lambda^{-1} \hat{Y},$$

матрицы A и B были определены в разделе 2,

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 x_1 + b_2 y_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 x_1 - b_2 y_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1 y_1 & c_1 x_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 y_2 & c_1 x_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 y_3 & c_1 x_3 \\ b_1 y_1 & b_1 y_2 & b_1 y_3 & 0 & 0 \\ c_1 x_1 & c_1 x_2 & c_1 x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_2 y_1 & c_2 x_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 y_2 & c_2 x_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 y_3 & c_2 x_3 \\ -b_2 y_1 & -b_2 y_2 & -b_2 y_3 & 0 & 0 \\ -c_2 x_1 & -c_2 x_2 & -c_2 x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы L_1 и L_2 удовлетворяют уравнениям (8) и (12) с

$$M = M_{\text{Kow}} + \widehat{W}, \quad \widehat{W} = 2 \begin{pmatrix} b_2 y_1 & c_2 x_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 y_2 & c_2 x_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 y_3 & c_2 x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_2 y_1 & -c_2 x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -b_2 y_2 & -c_2 x_2 \end{pmatrix}.$$

4. ОБОБЩЕННЫЙ q -ПОЛЕВОЙ ВОЛЧОК

В этом разделе мы приводим интегрируемую деформацию $so(p, q)$ -системы Ковалевской. При $p = 3$ и $q = 2$ соответствующий гамильтониан совпадает с (10), где $a_1 = 0$, $c_1 = c_2 = 1$.

Напомним, что для любых p и q таких, что $q \leq p$, гамильтониан

$$H_{\text{old}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^p l_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^q l_{ij}^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^q F_{ii}$$

определяет так называемый $so(p, q)$ -аналог волчка Ковалевской. Здесь динамическими переменными являются элементы l_{ij} и F_{ij} косимметрической матрицы l размера $p \times p$ и матрицы F размера $p \times q$.

Найденная в работе [3] пара Лакса с матричными коэффициентами размера $(p+q) \times (p+q)$ задается формулами

$$L_{\text{old}}(\lambda) = \lambda A + B + \lambda^{-1}C, \quad M_{\text{old}}(\lambda) = -2\lambda A + D,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E^T & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -l & 0 \\ 0 & E^T l E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь E – это матрица размера $p \times q$, ненулевые элементы которой имеют вид $E_{ii} = 1$, $i \leq q$. Элементы матрицы ω определяются следующим образом: $\omega_{ij} = 4l_{ij}$, если $i, j \leq q$, и $\omega_{ij} = 2l_{ij}$ в остальных случаях.

Рассмотрим деформацию этого гамильтониана вида

$$H = H_{\text{old}} - 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q F_{ij} l_{ij}.$$

Оказывается, что соответствующий гамильтонов поток эквивалентен соотношениям (12) с матрицами (7) и $M(\lambda) = M_{\text{old}}(\lambda) + W$, где

$$L_1(\lambda) = L_{\text{old}} + X, \quad L_2(\lambda) = -\text{Id} + \lambda^{-1}Y,$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & F \\ -F^T & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{2}((C - Y)A - A(C + Y)), \quad W = (C + Y)A - A(C + Y).$$

5. ОБОБЩЕННЫЙ ВОЛЧОК ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

В этом разделе мы опишем аналогичные структуры для более простого случая волчка Горячева–Чаплыгина. Рассмотрим матрицу $L(\lambda, \mu)$ размера 3×3 вида (7), где

$$L_1 = \lambda S + J + c_2 B + i c_1 \lambda^{-1} X, \quad L_2 = \text{Id} - c_2 \lambda^{-1} Y,$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -J_1 - i J_2 \\ 0 & -2J_3 + a_1 & 0 \\ -J_1 + i J_2 & 0 & 2J_3 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 + i x_2 \\ 0 & x_1 - i x_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_1 - i x_2 \\ 0 & x_1 - i x_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2}((X - Y)S - S(X + Y)) = 4x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы предполагаем, что $I_2 = 0$. При $c_2 = 0$ этот оператор L совпадает с найденным в работе [5].

Соответствующая спектральная кривая имеет вид

$$(\lambda^2 + c_2^2 I_1) \mu^3 - a_1 \lambda^2 \mu^2 + (4\lambda^4 - H\lambda^2 + c_1^2 I_1) \mu - I_4 \lambda^2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} H &= J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 - 2a_1 J_3 - 4c_1 x_2 + 4c_2 (J_1 x_3 - 2J_3 x_1), \\ I_4 &= (J_1^2 + J_2^2)(2J_3 - 4c_2 x_1 - a_1) + 4c_1 J_2 x_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Легко проверить, что оператор L удовлетворяет следующим симметричным свойствам:

$$L^*(-\lambda, \mu) = L(\lambda, \mu), \quad L(-\lambda, \mu) = V L(\lambda, \mu) V^{-1}, \quad (24)$$

где $V = \text{diag}(1, -1, 1)$, а индекс $*$ означает эрмитово сопряжение.

ТЕОРЕМА 2. Поток с гамильтонианом (23) эквивалентен соотношениям

$$\frac{d}{dt} L_i = L_i M(\lambda) + M^*(-\lambda) L_i, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

где $M = 2i(\lambda S + W)$,

$$W = \begin{pmatrix} -J_3 & 0 & -J_1 - iJ_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -J_1 + iJ_2 & 0 & 4J_3 - a_1 \end{pmatrix} - 2c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & ix_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_1 - ix_2 \end{pmatrix}.$$

После канонического преобразования

$$J_1 \rightarrow J_1 - 2c_2 x_3, \quad J_2 \rightarrow J_2, \quad J_3 \rightarrow J_3 + 2c_2 x_1$$

гамильтониан (23) принимает вид (4).

Благодарности. Авторы благодарны Институту Исаака Ньютона (Кембридж) за гостеприимство. Исследования были поддержаны грантами РФФИ № 02-01-00431, INTAS № 99-1782 и 99-01459, а также грантом EPSRC № GR K99015.

Список литературы

- [1] V. V. Sokolov. A generalized Kowalevski Hamiltonian and new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$. In: Kowalevski property. Ed. V. B. Kuznetsov. To appear in CRM Proceedings and Lecture Notes, AMS, 2002; nlin.SI/0110022.
- [2] B. B. Соколов. ТМФ. 2001. Т. 129. № 1. С. 31.
- [3] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky. Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 321.
- [4] D. Markushevich. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 2125.
- [5] A. I. Bobenko, V. B. Kuznetsov. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 1999.
- [6] Yu. B. Suris. Phys. Lett. A. 1993. V. 180. P. 419.

Поступила в редакцию 19.XI.2001 г.