Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Борисов, С. А. Зыков, М. В. Павлов, Уравнение Цицейки и размножение нелинейных интегрируемых уравнений, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 1, 126–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:36:51

© 2002 г. А. Б. Борисов*, С. А. Зыков*, М. В. Павлов†

УРАВНЕНИЕ ЦИЦЕЙКИ И РАЗМНОЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Обсуждается метод одевания для уравнения Цицейки. Процедурой размножения получено модифицированное уравнение Цицейки.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1940 г. Шредингером при исследовании класса точно решаемых потенциалов в квантовой механике был предложен метод факторизации [1], [2]. Согласно этому методу собственные значения оператора $L = -\partial_x^2 + u$ могут быть определены представлением его в виде $L_0 = a_0^+ a_0 + \lambda_0$ с некоторым числом λ_0 . При известном виде операторов a_0 определим оператор $L_1 = a_0 a_0^+ + \lambda_0$ и представим его снова в виде $L_1 = a_1^+ a_1 + \lambda_1 = -\partial_x^2 + u_1$, где $u_1 = u - 2f_x$, и т.д. В теории солитонов спектральная задача, связанная с оператором Шредингера, ассоциирована с уравнением Кортевега–де Фриза, и последнее соотношение известно как преобразование Дарбу, а функция f удовлетворяет модифицированному уравнению Кортевега–де Фриза. Обобщением метода факторизации является метод одевающих цепочек, позволяющий не только получать потенциалы с бесконечным числом связанных состояний [3], которые не укладываются в рамки традиционных схем обратной задачи рассеяния, но и исследовать классы солитонных решений с нетривиальным асимптотическим поведением на бесконечности. В работе [4] была предложена процедура размножения интегрируемых уравнений, которая с помощью преобразований Дарбу и метода одевающих цепочек позволяет по известному интегрируемому уравнению и его L – A -паре получить не только новое интегрируемое уравнение, но и ассоциируемую с ним L – A -пару.

В этой работе мы применяем процедуру размножения [4] к уравнению Цицейки

$$\theta_{xt} = \tau e^{2\theta} - e^{-\theta} \quad (1)$$

с произвольным параметром τ для вещественного поля $\theta(x, t)$. Многочисленные приложения этого уравнения в различных областях математики и физики были суммированы

* Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: borisov@imp.uran.ru; Serg@imp.uran.ru

† Московский государственный авиационный технологический университет, Москва, Россия

в работе [5], и здесь мы упомянем некоторые из них. Уравнение (1) первоначально было получено в геометрии в 1907 г. Цицейкой при исследовании поверхностей, общая кривизна которых пропорциональна четвертой степени расстояния от фиксированной точки в касательной плоскости [6]. Оно появляется также в одномерной газовой динамике, когда уравнение Эйлера редуцируется к уравнению (1) при определенном уравнении состояния. Кроме того, уравнение Цицейки является редукцией двумерной решетки Тоды, уравнений Хироты–Сатцумы и нелинейной $SL(3, R)$ -модели.

Уравнение (1) было переоткрыто в теории солитонов в конце семидесятых годов. Додд и Буллаф [7] исследовали уравнения типа $u_{xt} = f(u)$, которые допускают бесконечный набор интегралов движения. Они показали, что с точностью до точечных преобразований функция $f(u)$ может быть равной u (уравнение Даламбера), $\exp u$ (Лиувилля), $\sin u$ (синус-Гордон) и $\exp(2u) + \exp(-u)$ (Цицейки). Аналогичные и более полные результаты были независимо получены Жибером и Шабатом [8], которые в явном виде записали высшие симметрии этих уравнений. L - A -пара Лакса для уравнения Цицейки была найдена Михайловым [9].

В разделе 2 настоящей статьи, который частично носит методический характер, мы применяем метод одевания для уравнения Цицейки и находим преобразование Дарбу, связывающее два решения $(v$ и $\bar{v})$ уравнения Цицейки. Оно зависит от двух полей α и γ , удовлетворяющих уравнениям типа Риккати с коэффициентами, зависящими от поля v и его производных. Показано, что уравнения одевания наиболее просты в терминах полей, определяющих проекционную матрицу [10]. Кроме того, мы показываем, что преобразование Мутара для спектральной задачи второго порядка, связанной с уравнениями Цицейки, следует из композиции преобразований Дарбу в методе одевания. В конце раздела получены преобразования Беклунда для уравнения Цицейки в удобной форме. Процедура получения модифицированного уравнения Цицейки описана в разделе 3. Исключая поле v и вспомогательное поле γ из уравнения одевания, мы получаем модифицированное уравнение Цицейки для полей u и находим преобразование Миуры, связывающее поля u и v . В конце раздела обсуждаются преобразования Беклунда для модифицированного уравнения.

2. ОДЕВАНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЦИЦЕЙКИ

В этом разделе мы применим метод последовательного одевания для уравнений Цицейки, который позволит по известному частному решению этого уравнения получить новый класс точных решений. Для удобства запишем уравнение Цицейки в переменных $v = \exp(-\theta)$:

$$v_{x,t} = v^2 + \frac{v_t v_x}{v} - \frac{\tau}{v}. \quad (2)$$

С уравнением (2) ассоциированы две (3×3) -матричные спектральные задачи [11] для трехмерного вектора Ψ

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi, \\ \Psi_t = A\Psi, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$L = \begin{pmatrix} -v_x v^{-1} & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \\ \zeta & 0 & v_x v^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau v^{-2} \zeta^{-1} \\ v \zeta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & v \zeta^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(ζ – спектральный параметр), условие совместности которых $\Psi_{xt} = \Psi_{tx}$ эквивалентно уравнению (2). При известном частном решении v определим новое решение $\bar{v}$ уравнения Цицейки и вспомогательное поле $\bar{\Psi}$, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_x = \bar{L} \bar{\Psi}, \\ \bar{\Psi}_t = \bar{A} \bar{\Psi}, \end{cases} \quad (6)$$

где матрицы $\bar{L}$ и $\bar{A}$ зависят от полей $\bar{\Psi}$. В случае, когда поля Ψ и $\bar{\Psi}$ связаны линейным преобразованием $\bar{\Psi} = T \Psi$, матрица T удовлетворяет линейным дифференциальным уравнениям

$$T_x = \bar{L} T - T L, \quad (7)$$

$$T_t = \bar{A} T - T A. \quad (8)$$

Для оператора Шредингера, ассоциированного с уравнением Кортевега–де Фриза, такое преобразование называется преобразованием Дарбу. Аналогичные преобразования, включающие преобразования полей нелинейных интегрируемых уравнений и вспомогательных полей ассоциированных с этими уравнениями вспомогательных спектральных задач, найдены рядом исследователей для многих интегрируемых уравнений (см., например, [12]). Однако в общем случае нахождение таких преобразований для интегрируемых уравнений затруднено. В этой работе для нахождения матрицы T мы используем метод одевания [10], который позволяет по заданному в явном виде частному решению интегрируемых уравнений получить новое решение (“поместить” солитон на частное решение). Здесь мы не конкретизируем явный вид полей и с помощью матричной задачи Римана с нулями находим матрицу T . Согласно этому методу мы ищем решение для T в виде мероморфной матричной функции и для простоты рассматриваем ее полиномиальное представление. Прямые вычисления для одевания простейшего решения $v = 1$ уравнения (2) (при $\tau = 1$) до солитонного решения

$$\bar{v} = 1 - \frac{3}{1 + \text{ch}\left(3\left(\frac{x}{\beta} + t\beta\right)\right)}$$

показывают, что матрица T является полиномом второго порядка по спектральному параметру. В то же время легко непосредственно убедиться, что такой вид матрицы не

удовлетворяет уравнению (8) для произвольных полей v и $\bar{v}$. Поэтому мы рассмотрели разложение более высокого порядка в виде

$$T = \zeta^3 T_3 + \zeta^2 T_2 + \zeta T_1 + T_0. \quad (9)$$

Определение зависящих от координат и времени матриц T_i ($i = 0, 1, 2, 3$) значительно упрощается редукцией L - A -пары (3)–(5):

$$\Omega L(x, t, \zeta) \Omega^{-1} = L(x, t, \eta \zeta), \quad (10)$$

$$\Omega A(x, t, \zeta) \Omega^{-1} = A(x, t, \eta \zeta), \quad (11)$$

где постоянная η является кубическим корнем из единицы и отличные от нуля элементы матрицы Ω имеют вид $\Omega_{11} = \eta^2$, $\Omega_{22} = \eta$, $\Omega_{33} = 1$. Подставляя затем разложение (9) в уравнение (8), находим матрицу T :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha - \zeta^3 & \frac{\alpha\beta\zeta}{\zeta_1^3} & \frac{\alpha\beta^2\zeta^2}{2\zeta_1^6} \\ \frac{-2\zeta^2\zeta_1^3(\alpha+\zeta_1^3)}{\alpha\beta} & -\zeta^3 + \zeta_1^3 & \beta\zeta \\ \frac{-2\zeta\zeta_1^6(\alpha+\zeta_1^3)^2}{\alpha^2\beta^2} & \frac{-2\zeta^2\zeta_1^3(\alpha+\zeta_1^3)}{\alpha\beta} & -\zeta^3 + \frac{\zeta_1^6}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где поля α и $\beta = \gamma/v$ с параметром ζ_1 определяются системой уравнений

$$\alpha_x + \frac{\alpha^2\gamma^2}{2v^2\zeta_1^6} + \frac{2v\zeta_1^3(\alpha + \zeta_1^3)}{\gamma} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\gamma_x}{v} + \zeta_1^3 - \frac{\zeta_1^6}{\alpha} = 0, \quad (14)$$

$$\alpha_t + \frac{\alpha\gamma}{\zeta_1^3} + \frac{2\tau(\alpha + \zeta_1^3)^2}{\gamma^2} = 0, \quad (15)$$

$$-\frac{\gamma v_t}{v^2} + \frac{\gamma_t}{v} - \frac{\gamma^2}{2v\zeta_1^3} - \frac{2\tau\zeta_1^3(\alpha + \zeta_1^3)}{v\alpha\gamma} = 0. \quad (16)$$

При этом преобразование полей v имеет простой вид:

$$\bar{v} = \zeta_1^3 \frac{v}{\alpha}. \quad (17)$$

Уравнения (13)–(17) “одевают” любое решение уравнения Цицейки. При заданном поле v решения уравнений (13)–(16) определяют явный вид полей α и γ . Тогда новое решение $\bar{v}$ уравнения Цицейки сразу получается из соотношения (17). Уравнения (13)–(16) имеют элегантный вид в терминах элементов проекционных матриц. Из явного вида определителя матрицы T

$$\det T(\zeta) = (\zeta_1^3 - \zeta^3)(\zeta_1^3 + \zeta^3)^2 \quad (18)$$

следует, что ранг матрицы $T(\zeta = -\zeta_1)$ равен единице и она является проекционной матрицей. Поэтому согласно методу одевания [10] ее элементы представимы в виде

$$T_{ik}(\zeta = -\zeta_1) = m_i n_k. \quad (19)$$

Отсюда следует важная теорема.

ТЕОРЕМА. Решение уравнения (8) при $\zeta = -\zeta_1$ представимо в виде (19), где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ являются соответственно решениями уравнений

$$\begin{cases} \vec{m}_x = \bar{L}(\zeta = -\zeta_1)\vec{m}, \\ \vec{m}_t = \bar{A}(\zeta = -\zeta_1)\vec{m}, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{n}_x = -L^T(\zeta = -\zeta_1)\vec{n}, \\ \vec{n}_t = -A^T(\zeta = -\zeta_1)\vec{n}, \end{cases} \quad (20)$$

где индекс T обозначает транспонирование матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к проективным компонентам $\mu_i = m_i/m_s$ ($i = 1, 2, 3$) с фиксированным индексом s , тогда из уравнения (7) получаем

$$\left(\frac{m_i}{m_s}\right)_x = \sum_{k=1}^3 \left(\bar{L}_{ik}(\zeta = -\zeta_1) \frac{m_k}{m_s} - \frac{m_i}{m_s} \bar{L}_{sk}(\zeta = -\zeta_1) \frac{m_k}{m_s} \right). \quad (21)$$

Отсюда сразу следует первое из уравнений системы (20), где матрица $\bar{L}(\zeta = -\zeta_1)$ определяется с точностью до единичной матрицы. Остальные уравнения выводятся аналогичным образом. Отметим, что при $\zeta = \zeta_1$ матрица T имеет ранг 2, и уравнения типа (20) можно получить для полей, определяющих разложение матрицы, составленной из миноров матрицы $T(\zeta = \zeta_1)$.

Преобразование Дарбу в виде уравнений (13)–(16) можно переписать в иной форме. Дифференцируя последовательно уравнения из системы (20), включающие $n_{2,x}$ и $n_{2,t}$, по переменным x, t и исключая поля n_1, n_3 , мы получаем замкнутую систему уравнений для $n_2(x, t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} n_{2,xx} &= n_{2,x} \frac{v_x}{v} + \zeta_1^3 \frac{n_{2,t}}{v}, \\ n_{2,xt} &= v n_2, \\ n_{2,tt} &= n_{2,t} \frac{v_t}{v} + \zeta_1^3 \frac{n_{2,x}}{v}, \end{aligned} \quad (22)$$

где постоянная ζ_1 играет роль спектрального параметра. Из вида матрицы T (12), определения (19) компонент вектора $\vec{n}$ (с точностью до постоянного множителя) и уравнения (17) сразу следуют выражения для α, β

$$\alpha = -\zeta_1^3 \frac{n_2^2}{n_2^2 - 2n_1 n_3}, \quad \beta = -2\zeta_1^2 \frac{n_3}{n_2} \quad (23)$$

и одевание потенциалов

$$\bar{v} = -v + 2 \frac{n_{2,t} n_{2,x}}{n_2^2} \quad (24)$$

в терминах полей $\vec{n}$. Три условия совместности трех скалярных уравнений (22), первые полученных еще Пицейкой [6], эквивалентны уравнению (2). Отметим также, что пара Лакса в виде (22) и преобразование потенциалов (24) были найдены недавно [5] при анализе сингулярных многообразий этого уравнения.

Для второго уравнения системы (22) известны преобразования Мутара, применяемые в последнее время для различных спектральных задач второго порядка. Покажем, что такие преобразования, позволяющие по двум различным (с фиксированным v) решениям уравнения (22) получить решение с новым потенциалом, сразу следуют из композиции преобразований Дарбу в методе одевания. Рассмотрим последовательные преобразования $v \rightarrow \bar{v}$ с помощью одевающей матрицы $T(\zeta)$ с параметрами ζ_1 и $\bar{v} \rightarrow \bar{\bar{v}}$ с помощью одевающей матрицы $\bar{T}(\zeta)$ с параметрами ζ_2 . Такие преобразования эквивалентны преобразованию $v \rightarrow \bar{\bar{v}}$ с помощью матрицы $\bar{\bar{T}}(\zeta) = \bar{T}(\zeta)T(\zeta)$. Элементы $\bar{T}(\zeta)$, $\bar{\bar{T}}(\zeta)$ выражаются соответственно через поля $\bar{n}$, $\bar{\bar{n}}$, определенные соотношениями $\bar{T}_{ik}(\zeta = -\zeta_2) = \bar{m}_i \bar{n}_k$, $\bar{\bar{T}}_{ik}(\zeta = -\zeta_2) = \bar{\bar{m}}_i \bar{\bar{n}}_k$ и подчиняющиеся, следовательно, уравнениям

$$\bar{n}_x = -\bar{L}^T(\zeta = -\zeta_2)\bar{n}, \quad \bar{\bar{n}}_x = -L^T(\zeta = -\zeta_2)\bar{\bar{n}} \quad (25)$$

и аналогичным уравнениям по переменной t . Поэтому поле $\bar{\bar{n}}_2$ удовлетворяет системе (22) с заменой $\zeta_1 \rightarrow \zeta_2$, а $\bar{n}_2$ – той же системе с заменой $v \rightarrow \bar{v}$, $\zeta_1 \rightarrow \zeta_2$. Тогда поля $\bar{\bar{n}}$ определяются (с точностью до несущественного множителя) отношением компонент матрицы $\bar{\bar{T}}(\zeta)T(\zeta)$, что и позволяет найти явное выражение полей $\bar{\bar{n}}$ через поля n , $\bar{n}$. Здесь мы приведем явный вид преобразования для полей n_2 (преобразование потенциалов определяется уравнением (17)):

$$\bar{\bar{n}}_2 = \frac{a}{n_2}, \quad a = \frac{vn_2(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\bar{n}_2 + 2n_{2,x}\zeta_2^3\bar{n}_{2,t} - 2n_{2,t}\zeta_1^3\bar{n}_{2,x}}{v(\zeta_1^3 + \zeta_2^3)}, \quad (26)$$

где функция a подчиняется простым уравнениям

$$a_x = n_{2,x}\bar{\bar{n}}_2 - n_2\bar{\bar{n}}_{2,x}, \quad (27)$$

$$a_t = n_2\bar{\bar{n}}_{2,t} - n_{2,t}\bar{\bar{n}}_2. \quad (28)$$

Обсудим преобразования Беклунда для уравнения (2). Согласно определению они представляются парой уравнений в частных производных для полей v и $\bar{v}$ таких, что исключение $\bar{v}$ (или v) из этой пары дает уравнение Цицейки для полей v (или $\bar{v}$). Попытки получения такой пары предпринимались рядом исследователей (см., например, [13]). Обзор литературы по этому вопросу и обсуждение полученных ранее результатов приведены в работе [5], авторы которой, по их мнению, нашли эффективные преобразования Беклунда. Такие преобразования могут быть сразу получены исключением полей α и γ из соотношений (13)–(16). Мы получаем

$$\bar{v}_x = \frac{\bar{v}v_x}{v} + \frac{\gamma^2}{2v\zeta_1^3} + \frac{2\bar{v}(v + \bar{v})\zeta_1^3}{\gamma}, \quad (29)$$

$$\bar{v}_t = \frac{\bar{v}v_t}{v} + 2\tau\zeta_1^3 \frac{(v + \bar{v})^2}{v\gamma^2} + \frac{\bar{v}\gamma}{\zeta_1^3}, \quad (30)$$

где поле $\gamma = \zeta_1^3 \int (\bar{v} - v) dx$. Прямым дифференцированием можно проверить, что условие совместности $\bar{v}_{xt} = \bar{v}_{tx}$ этой системы определяет функцию γ_t , дифференцирование по координатам которой с учетом определения γ и уравнений (29), (30) дает уравнение (2).

3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ЦИЦЕЙКИ

Применим алгоритм размножения нелинейных уравнений, предложенный в [4], для получения нового интегрируемого уравнения, которое будет названо модифицированным уравнением Цицейки. Первым шагом этой схемы является исключение полей v из уравнений одеваания (13)–(16). В случае, когда рассматриваются нелинейные скалярные уравнения серии Кортвега–де Фриза и синус-Гордон, уравнение Буссинеска и $(2 + 1)$ -мерные интегрируемые уравнения, исследованные в [14], преобразование Дарбу определяется одним вспомогательным полем, и процедура исключения потенциала из L – A -пары, восходящая к знаменитой работе Миуры [15], не представляет затруднений. Для уравнений типа Каупа–Буссинеска, эквивалентных системе двух нелинейных скалярных уравнений с (2×2) -матричной L – A -парой, преобразование Дарбу зависит от двух вспомогательных полей, определенных как отношения компонент одевающей матрицы $T(\lambda)$ при двух различных значениях спектрального параметра λ [16]. В этом случае зависимость вспомогательных полей от x и t определяют четыре нелинейных уравнения первого порядка, два из которых позволяют найти выражения для полей уравнения Каупа–Буссинеска через вспомогательные поля (преобразование Миуры). Подстановка этих выражений в оставшиеся два уравнения приводит к интегрируемой системе двух нелинейных уравнений второго порядка с частными производными (модифицированному уравнению Каупа–Буссинеска) [16].

В рассматриваемом нами случае одевание решений уравнения Цицейки осуществляется двумя полями α и γ , и применение процедуры исключения поля v из уравнений (13)–(16) для получения замкнутого уравнения только для одного поля осуществляется следующим образом. Вначале подставим выражение для поля v

$$v = \frac{\alpha \gamma_x}{\zeta_1^3 (\zeta_1^3 - \alpha)}, \quad (31)$$

полученное из уравнения (14), в (13), (15), (16). Полученная система трех уравнений оказывается полной, поскольку после такой подстановки условие совместности системы (13), (15) эквивалентно уравнению (16). Поэтому для вывода нового интегрируемого уравнения мы используем только (13)–(15). Уравнение (15) является полиномом третьего порядка относительно поля γ и определяет функцию $\gamma = \gamma(\alpha, \alpha_t)$ в явном виде. Подстановка ее и выражения (31) в (13) приводит к уравнению второго порядка для поля α , которое и является модифицированным уравнением Цицейки. Эквивалентной записью этого уравнения является продифференцированное по x уравнение (15), где поля γ и γ_x после подстановки (31) в уравнения (15) и (13) можно выразить алгебраическим образом.

Упрощение записи модифицированного уравнения Цицейки достигается последовательными заменами

$$\gamma_x = b\gamma(\alpha - \zeta_1^3), \quad \alpha = f(u) \quad (32)$$

и

$$b = \frac{f_u(B + 2u_x)}{6f(f + \zeta_1^3)}, \quad B = B(u_x), \quad (33)$$

$$\gamma = -\frac{f_u(A + 2u_t)\zeta_1^3}{3f}, \quad A = A(u_t), \quad (34)$$

где функция $f(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f_u^3 = -54f^2(f + \zeta_1^3)^2$. Решение последнего

$$f = -\frac{1}{2} \left(\frac{\wp_u}{2} + \zeta_1^3 \right)$$

выражается через функцию Вейерштрасса $\wp(u)$:

$$\wp_u^2 = 4(\wp^3 + \zeta_1^6). \quad (35)$$

В результате мы получаем модифицированное уравнение Цицейки для полей u в следующем виде:

$$u_{xt} = \frac{A(u_t)B(u_x)(6\zeta_1^3 + \wp'(u))}{4\wp(u)}, \quad (36)$$

где функции $A(u_t)$ и $B(u_x)$ определяются алгебраическими уравнениями

$$1 + (B(u_x) - u_x)(B(u_x) + 2u_x)^2 = 0, \quad (37)$$

$$\tau + \zeta_1^6(A(u_t) - u_t)(A(u_t) + 2u_t)^2 = 0. \quad (38)$$

Кроме того, из уравнения (31) мы находим преобразование Миуры

$$v = \frac{1}{2} \wp(u)(A + 2u_t)(B + 2u_x) \quad (39)$$

от уравнения (2) к уравнению (36), которое можно проверить прямыми вычислениями.

Преимуществом схемы размножения интегрируемых уравнений является возможность получения одевающих цепочек, которые представляют собой преобразования Беклунда для модифицированного уравнения Цицейки с параметрами ζ и $\bar{\zeta}_1$. Для нахождения явного вида этих преобразований подставим преобразование Миуры (39) в преобразование Дарбу (17) и преобразование Беклунда (29) для уравнения Цицейки, считая α выраженным согласно (32). В результате мы получаем преобразование Беклунда для модифицированного уравнения в следующем виде:

$$\bar{u}_t = \frac{-\bar{g}^3 \bar{\zeta}_1^9 + 2\bar{\zeta}_1^6 \tau + \bar{\wp}^3 \tau}{3\bar{g}^2 \bar{\zeta}_1^6 \bar{\wp}^2} - \frac{(\bar{g}^3 \bar{\zeta}_1^3 + 2\tau)\bar{\wp}\bar{u}}{6\bar{\zeta}_1^3 \bar{\wp}^2 \bar{g}^2}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_x = & -\frac{1}{12\bar{g}\bar{\wp}^2\tau\bar{\wp}^2}(A - u_t)(u_x - B)(2\zeta_1^3 + \wp_u)^2 \times \\ & \times \left(\frac{\bar{g}^3(2\bar{\zeta}_1^3 + \bar{\wp}\bar{u})^2}{16} - \frac{8\bar{\zeta}_1^9\bar{\wp}^3(2\bar{\zeta}_1^3 - \bar{\wp}\bar{u})(A + 2u_t)^3(B + 2u_x)^3}{(2\zeta_1^3 + \wp_u)^3} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

где использовано обозначение

$$\bar{g} = 2\zeta_1^3 \int \frac{\wp(A + 2u_t)(B + 2u_x)6(\bar{\zeta}_1^3 + \bar{\wp}\bar{u})}{(2\zeta_1^3 + \wp_u)(2\bar{\zeta}_1^3 + \bar{\wp}\bar{u})} dx. \quad (42)$$

Таким образом, мы показали эффективность метода одевания для построения преобразований Дарбу и применения процедуры размножения к спектральной задаче третьего порядка для одного скалярного уравнения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Осенью 2000 г., когда основные результаты работы были получены, В.В. Соколов любезно сообщил нам, что им также найдено модифицированное уравнение Цицейки и преобразование Миуры прямым методом, который не позволяет найти преобразование Беклунда. В присланном им варианте уравнение содержало функции, удовлетворяющие определенному нелинейному уравнению.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 00-01-00366, и гранта INTAS 99-1782.

Список литературы

- [1] Э. Шредингер. Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976.
- [2] Х. Грин. Матричная квантовая механика. М.: Мир, 1968.
- [3] А. П. Веселов, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1.
- [4] А. Б. Борисов, С. А. Зыков. ТМФ. 1998. Т. 115. № 2. С. 199.
- [5] R. Conte, M. Musette. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 2092.
- [6] G. Tzitzéica. C. R. Acad. Sci. Paris. 1907. V. 144. P. 1257.
- [7] R. K. Dodd, R. K. Bullough. Proc. Roy. Soc. London. A. 1976. V. 351. P. 499.
- [8] А. В. Жубер, А. Б. Шабат. ДАН СССР. 1979. Т. 247. С. 1103.
- [9] А. В. Михайлов. Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 443.
- [10] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. С. 13; В. Е. Захаров, С. В. Мананков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [11] A. P. Fordy, J. Gibbons. J. Math. Phys. 1981. V. 21. P. 2508.
- [12] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux Transformation and Solitons. Berlin: Springer, 1991.
- [13] С. С. Сафин, Р. А. Шарипов. ТМФ. 1993. Т. 95. С. 146.
- [14] А. В. Юров. ТМФ. 1999. Т. 119. № 3. С. 419.
- [15] R. M. Miura. J. Math. Phys. 1968. V. 9. № 8. P. 1202.
- [16] A. B. Borisov, M. V. Pavlov, S. A. Zykov. Physica D. 2001. V. 151–152. P. 104.

Поступила в редакцию 28.XII.2000 г.