Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Разумов, Ю. Г. Строганов, Комбинаторная природа вектора основного состояния $O(1)$ петлевой модели, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 3, 395–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf32>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:52:01

© 2004 г.

А. В. Разумов*, Ю. Г. Строганов*

КОМБИНАТОРНАЯ ПРИРОДА ВЕКТОРА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ $O(1)$ ПЕТЛЕВОЙ МОДЕЛИ

При исследовании возможной связи между векторами основного состояния некоторых специальных спиновых систем и так называемыми матрицами чередующихся знаков обнаружены численные указания на то, что компоненты вектора основного состояния $O(1)$ петлевой модели совпадают с числом состояний так называемой модели полной упаковки петель, соответствующих фиксированным типам спариваний. Состояния последней системы находятся во взаимно однозначном соответствии с матрицами чередующихся знаков. Это позволяет выдвинуть гипотезу о совпадении компонент вектора основного состояния $O(1)$ петлевой модели с мощностями соответствующих наборов матриц чередующихся знаков. Эта гипотеза в определенном смысле обобщает гипотезу Босли и Фидковского, усовершенствованную Коном и Проппом и доказанную Виландом.

Ключевые слова: петлевая модель, основное состояние, модель плотной упаковки петель, матрицы чередующихся знаков.

*I would say that imagination
is a form of memory
V. Nabokov¹⁾*

В статье [1] мы выдвинули несколько гипотез комбинаторного характера относительно свойств компонент вектора основного состояния замкнутой антиферромагнитной XXZ -спиновой цепочки для значения параметра асимметрии $\Delta = -1/2$ и нечетного числа узлов. В частности, одна из наших гипотез гласит, что если минимальная компонента вектора основного состояния нормирована на единицу, то его максимальная компонента совпадает с числом матриц чередующихся знаков соответствующего порядка. Бэтчелор, де Гиер и Ниенхуиз [2] с этой же точки зрения исследовали XXZ -цепочку со скрученными и открытыми граничными условиями, а также несколько версий $O(n)$ петлевой модели при $n = 1$. В результате класс моделей, предположительно связанных с задачами комбинаторики, был значительно расширен (см. также [3]).

¹⁾ «Я бы сказал, что воображение является одной из форм памяти» (В. Набоков – пер. Ю. Г. Строганова).

* Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: razumov@mx.ihep.su; stroganov@mx.ihep.su

За последнее время мы обнаружили значительное число новых эмпирических соотношений между упомянутыми выше моделями и различными классами матриц чередующихся знаков. В этой статье мы ограничимся одной гипотезой, связывающей вектор основного состояния $O(1)$ петлевой модели с периодическими граничными условиями и четным числом узлов (см. работу [4] и цитированную в ней литературу) с некоторыми классами состояний модели полной упаковки петель. Как известно, состояния последней системы находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями двумерной модели льда с граничными условиями типа доменной стенки [5], которые, в свою очередь, однозначно связаны с матрицами чередующихся знаков. Следовательно, если наша гипотеза верна, то модель полной упаковки петель, так же как и матрицы чередующихся знаков, можно исследовать, используя методы, разработанные в теории двумерных интегрируемых моделей статистической физики (см., например, монографию [6]).

Исходную информацию о матрицах чередующихся знаков и их различных комбинаторных формах можно найти в недавнем обзоре Проппа [7] и в цитируемой в нем литературе. Следуя этому обзору, для описания состояний модели полной упаковки петель мы определяем исходный граф как граф, образованный n горизонтальными и n вертикальными отрезками, пересекающимися в n^2 узлах. Кроме того, граф имеет $4n$ граничных узлов на концах отрезков. Перенумеруем половину граничных узлов следующим образом: начнем с левого верхнего узла и будем нумеровать узлы через один, двигаясь в направлении часовой стрелки.

Рассмотрим теперь подграфы исходного графа, получаемые отбором некоторых ребер, соединяющих его узлы. При этом мы требуем, чтобы каждый из n^2 внутренних узлов принадлежал ровно двум отобранным ребрам подграфа, каждый занумерованный узел принадлежал отобранному ребру и, наоборот, нумерованный граничный узел не принадлежал никакому ребру подграфа (см. рис. 1). Именно эти подграфы и являются состояниями модели полной упаковки петель, которые, как уже отмечалось выше, находятся во взаимно однозначном соответствии с матрицами чередующихся знаков порядка n . В частности, общее число состояний равно числу матриц чередующихся знаков, обычно обозначаемому A_n .

Рис. 1. Одно из состояний модели полной упаковки петель для $n = 5$.

Каждому состоянию модели полной упаковки петель соответствует тип спариваний пронумерованных узлов. Будем изображать тип спариваний как круг с $2n$ точками на нем, попарно соединенными внутри круга без пересечений (см. рис. 2). Имея в виду

Рис. 2. Тип спариваний, соответствующий состоянию, изображенному на рис. 1.

связь модели полной упаковки петель с матрицами чередующихся знаков, будем обозначать число состояний модели, соответствующих определенному типу спариваний π , через $A_n(\pi)$.

Рассмотрим в качестве примера случай $n = 4$. В этом случае модель полной упаковки петель имеет 42 состояния и 14 разных типов спариваний, которые приведены в таблице. Совпадения некоторых чисел $A_n(\pi)$, соответствующих различным типам спариваний, объясняются гипотезой Босли и Фидковского, усовершенствованной Коном и Проппом и доказанной Виландом [8]. В соответствии с теоремой Виланда для двух типов спариваний π и π' , связанных вращением или отражением, справедливо равенство $A_n(\pi) = A_n(\pi')$.

π	$A_n(\pi)$
	7
	3
	1

Сформулируем теперь нашу гипотезу относительно чисел $A_n(\pi)$. Определим для этого $2n$ операций h_i , $i = 1, \dots, 2n$, действующих на типы спариваний следующим образом. Фиксируем номер операции i и рассмотрим произвольный тип спариваний. Пусть для данного типа i -й узел спарен с j -м узлом, а $(i + 1)$ -й спарен с k -м узлом. Возможны два случая. В первом из них, когда $j = i + 1$ и $k = i$, операция h_i не меняет тип спариваний. Во втором случае, когда $j \neq i + 1$ и $k \neq i$, операция h_i заменяет два рассматриваемых спаривания двумя другими, при которых i -й узел спарен с $(i + 1)$ -м, а j -й — с k -м.

Чтобы нас поняли в как можно более широкой аудитории, сформулируем нашу гипотезу тремя разными способами, используя понятия из различных областей математики и физики.

Обратимся сначала к терминологии теории игр. Сформулируем правила игры для двух игроков А и В, поставленных, на первый взгляд, в совершенно разные условия. Оба игрока случайным образом выбирают одно из состояний модели полной упаковки петель. Результатом игрока А является тип спариваний выбранного им состояния. Игрок В обязан еще случайно выбрать одну из операций h_i и подействовать ею на тип спариваний выбранного им перед этим состояния. Его результат заключается в полученном таким образом, возможно новом, типе спариваний. Цель игры – получить некоторый фиксированный заранее тип спариваний.

ГИПОТЕЗА 1. *Оба игрока имеют одинаковые шансы на выигрыш.*

Рассмотрим, например, случай $n = 4$ при условии, что выигрышным является первый тип спариваний из таблицы. Шансы игрока А равны $P_A = 7/42 = 1/6$. Оценим шансы игрока В:

$$\begin{aligned} P_B = & P \left[\text{diagram 1} \right] P[\{h_1, h_3, h_5, h_7\}] + P \left[\text{diagram 2} \right] P[\{h_5, h_7\}] + \\ & + P \left[\text{diagram 3} \right] P[\{h_1, h_7\}] + P \left[\text{diagram 4} \right] P[\{h_1, h_3\}] + \\ & + P \left[\text{diagram 5} \right] P[\{h_3, h_5\}] + P \left[\text{diagram 6} \right] P[\{h_3, h_7\}] + P \left[\text{diagram 7} \right] P[\{h_1, h_5\}]. \end{aligned}$$

Используя данные из таблицы, получаем

$$\frac{7}{42} \times \frac{4}{8} + \frac{3}{42} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{42} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{42} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{42} \times \frac{2}{8} + \frac{1}{42} \times \frac{2}{8} + \frac{1}{42} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{6}.$$

Мы видим, что в этом случае наша гипотеза работает.

Вторая формулировка использует язык комбинаторики.

ГИПОТЕЗА 2. *Для любого $n = 1, 2, \dots$ справедливо соотношение*

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{\pi' \in \Pi_i(\pi)} A_n(\pi') = 2n A_n(\pi),$$

где $\Pi_i(\pi)$ – множество типов спариваний π' таких, что $h_i(\pi') = \pi$.

Для последней формулировки используем квантовую $O(1)$ петлевую модель с периодическими граничными условиями. Пространство состояний в этом случае сводится ко множеству всех формальных линейных комбинаций типов спариваний. Операции h_i ,

продолженные по линейности на это множество, становятся линейными операторами. Гамильтониан модели является суммой этих операторов:

$$H = \sum_{i=1}^{2n} h_i. \quad (1)$$

Рассмотрим действие гамильтониана на вектор

$$\Psi = \sum_{\pi} \pi A_n(\pi). \quad (2)$$

Имеем

$$H\Psi = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\pi} h_i(\pi) A_n(\pi) = \sum_{\pi} \pi \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\pi' \in \Pi_i(\pi)} A_n(\pi') = 2n \sum_{\pi} \pi A_n(\pi),$$

где последнее равенство следует из гипотезы 2. Следовательно, мы можем написать

$$H\Psi = 2n\Psi.$$

Итак, если наша гипотеза верна, то вектор Ψ является собственным вектором гамильтониана периодической $O(1)$ петлевой модели с четным числом узлов.

Вновь обратимся к случаю $n = 4$. Матрица гамильтониана H и компоненты вектора Ψ имеют вид

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Мы располагаем базисные векторы в том порядке, в каком они приведены в таблице. Отметим, что сумма элементов каждого столбца равна 8, что совпадает с $2n$. Это является общим свойством оператора H , выполненным для любого n . Следовательно, спектральный радиус H равен $2n$ (см., например, [9], раздел 9.3). Мы видим, что вектор Ψ соответствует наибольшему собственному значению оператора H . Это старшее собственное значение невырожденно, что можно доказать, используя положительность соответствующей трансфер-матрицы. Принимая все это во внимание, мы можем дать последнюю формулировку нашей гипотезы.

ГИПОТЕЗА 3. Вектор (2) является единственным собственным вектором гамильтониана (1), соответствующим его старшему собственному значению $2n$.

Бэтчелор, де Гиер и Ниенхуиз [2] выдвинули гипотезу, гласящую, что если нормировку вектора Ψ фиксировать так, чтобы минимальная компонента этого вектора равнялась единице, то его наибольшая компонента будет равна A_{n-1} , а сумма компонент — A_n . Наша гипотеза обнаруживает комбинаторную природу всех компонент старшего собственного вектора.

Отметим, что гамильтониан H обладает вращательной и отражательной симметриями. Ясно, что невырожденный собственный вектор должен быть инвариантен относительно действия этих симметрий, что согласуется с теоремой Виланда [8].

Заметим в заключение, что мы проверили нашу гипотезу вплоть до $n = 7$.

Благодарности. Авторы благодарны Б. Ниенхуизу за ясные объяснения процедуры построения гамильтониана $O(1)$ петлевой модели. Мы отметим также прекрасный обзор Дж. Проппа, который побудил нас к исследованию модели полной упаковки петель. Мы благодарны ему также за интерес к работе и полезные обсуждения. Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 01-01-00201) и INTAS (грант № 00-00561).

Список литературы

- [1] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov. J. Phys. A. 2001. V. 34. № 14. P. 3185–3190; cond-mat/0012141.
- [2] M. T. Batchelor, J. de Gier, B. Nienhuis. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. L265–L270; cond-mat/0101385.
- [3] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 5335–5340; cond-mat/0102247.
- [4] H. W. J. Blöte, B. Nienhuis. J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 1415–1438.
- [5] V. E. Korepin, A. G. Izergin, N. M. Bogoliubov. Quantum Inverse Scattering Method, Correlation Functions, and Algebraic Bethe Ansatz. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [6] Р. Бэжстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [7] J. Propp. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc. 2001. V. AA. P. 43–58; <http://dmtcs.loria.fr/proceedings/html/dmAA0103.abs.html>.
- [8] B. Wieland. Electron. J. Combin. 2000. V. 7. № 1. P. R37; www.combinatorics.org.
- [9] П. Ланкастер. Теория матриц. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 6.V.2003 г.