Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц, Двухпетлевая β -функция $N = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной при помощи высших ковариантных производных, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 1, 135–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:13:48

© 2002 г.

А. А. Солошенко*, К. В. Степаньянц*

**ДВУХПЕТЛЕВАЯ β -ФУНКЦИЯ
 $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ
КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ,
РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ПРИ ПОМОЩИ
ВЫСШИХ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

Вычислена двухпетлевая β -функция в $N = 1$ суперсимметричной электродинамике, регуляризованной при помощи метода высших ковариантных производных. Установлено, что она совпадает с результатом, полученным при помощи метода размерной редукции вне зависимости от вида регуляризующего слагаемого.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важным аспектом исследования суперсимметричных теорий является вопрос о виде точной β -функции. Впервые точная β -функция была построена на основе исследования инстантонных вкладов в работе [1]. После этого предпринимались многочисленные попытки получить ее другими способами, например путем исследования квантовых аномалий [2], а также проверить предсказания при помощи явных вычислений по теории возмущений. С использованием метода размерной редукции [3] было получено, что двухпетлевая β -функция согласуется с предсказаниями, следующими из предложенного в работе [1] точного выражения, однако в трехпетлевом приближении [4]–[6] имеются разногласия, которые тем не менее могут быть устранены переопределением константы связи [7]. При этом сама возможность такого переопределения является нетривиальной [8]. Поэтому можно поставить вопрос о том, существует ли какая-либо регуляризация, в которой автоматически получается точный результат Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова.

Наиболее привлекательной регуляризацией при исследовании суперсимметричных теорий считается регуляризация при помощи метода высших ковариантных производных [9], [10]. В частности, в работе [11] построена суперсимметрично- и калибровоч-

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: solosh@theor.phys.msu.su; stepan@theor.phys.msu.su

но-инвариантная функция Лагранжа $N = 1$ теории Янга–Миллса, регуляризованной при помощи высших производных. Однако, к сожалению, метод высших производных является технически более сложным, чем техника размерной редукции. Конкретный расчет однопетлевой поправки¹⁾ для обычной (несуперсимметричной) теории Янга–Миллса с использованием этого метода был выполнен сравнительно недавно [12] и привел к результату, который отличается от результата вычислений в рамках размерной регуляризации, что было истолковано авторами как неприменимость метода для вычислений квантовых поправок. Однако в работе [13] было указано на то, что из-за сингулярного характера калибровки $\alpha = 0$ появляется некоторый дополнительный вклад, при учете которого результаты однопетлевых вычислений для теории Янга–Миллса с использованием метода высших производных совпадают с результатами вычислений в рамках размерной регуляризации. Более того, в работах [14], [15] было показано, что однопетлевые вычисления с использованием метода высших ковариантных производных (конечно, при добавлении дополнительной регуляризации для однопетлевых диаграмм) всегда дают тот же результат, что и размерная регуляризация. Однако вопрос о том, к какому результату приведут двухпетлевые вычисления пока не исследовался.

В данной работе для $N = 1$ суперсимметричной электродинамики показано, что вычисления β -функции в двухпетлевом приближении с использованием метода высших производных приводят к тому же результату, что и метод размерной редукции.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 напоминаются основные сведения о суперсимметричной электродинамике. Ее регуляризация при помощи метода высших производных приводится в разделе 3. Двухпетлевая β -функция рассматриваемой теории вычислена в разделе 4. В разделе 5 обсуждаются полученные результаты, а в приложениях вынесены технические детали вычислений.

2. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

$N = 1$ суперсимметричная электродинамика в суперпространстве описывается действием

$$S_0 = -\frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}), \quad (1)$$

где ϕ и $\tilde{\phi}$ – киральные суперполя, которые в терминах компонентных полей можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(y, \theta) &= \varphi(y) + \bar{\theta}(1 + \gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1 + \gamma_5)\theta f(y), \\ \tilde{\phi}(y, \theta) &= \tilde{\varphi}(y) + \bar{\theta}(1 + \gamma_5)\tilde{\psi}(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1 + \gamma_5)\theta \tilde{f}(y), \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾Заметим, что введение слагаемого с высшими производными не ведет к исчезновению расходимостей на однопетлевом уровне. Однако, добавляя еще одну вспомогательную регуляризацию на однопетлевом уровне, можно построить схему вычислений β -функции.

где $y^\mu = x^\mu + i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta/2$ – киральные координаты, φ и $\tilde{\varphi}$ – комплексные скалярные поля, ψ и $\tilde{\psi}$ – майорановские спиноры, которые могут быть объединены в один дираковский спинор

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((1 + \gamma_5)\psi + (1 - \gamma_5)\tilde{\psi}), \quad (3)$$

а f и $\tilde{f}$ – вспомогательные комплексные скалярные поля.

Через V в действии (1) обозначено абелево вещественное суперполе, которое в компонентах в калибровке Весса–Зумино имеет вид

$$V(x, \theta) = \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma_5\chi(x)) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x), \quad (4)$$

где A_μ – калибровочное поле, χ – майорановский спинор, а $D(x)$ – вещественное скалярное вспомогательное поле.

Суперполе W_a является суперсимметричным аналогом тензора напряженности калибровочного поля и в абелевом случае определяется как

$$W_a = \frac{1}{16}\bar{D}(1 - \gamma_5)D[(1 + \gamma_5)D_a V], \quad (5)$$

где суперсимметричная ковариантная производная D записывается в виде

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\gamma^\mu\theta\partial_\mu. \quad (6)$$

Поле W_a является киральным вейлевским спинором и с использованием киральных координат y^μ может быть представлено выражением

$$W_a = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\left(\sqrt{2}\chi(y) - i\theta D(y) + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\theta F^{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\chi(y)\bar{\theta}(1 + \gamma_5)\theta\right). \quad (7)$$

После взятия интеграла по антикоммутирующим переменным θ действие (1) в терминах компонентных полей записывается в виде

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{e^2}\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi + \frac{1}{2e^2}D^2 + \right. \\ \left. + |\mathcal{D}_\mu\varphi|^2 + |\mathcal{D}_\mu\tilde{\varphi}|^2 + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi + |f|^2 + |\tilde{f}|^2 \right). \quad (8)$$

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ВЫСШИХ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Для того чтобы регуляризовать модель (1) при помощи метода высших ковариантных производных, модифицируем ее действие следующим образом:

$$\begin{aligned} S_0 \rightarrow S &= S_0 + S_\Lambda = \\ &= -\frac{1}{4e_0^2} \operatorname{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} \left(1 + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) W_b + \\ &+ \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}). \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что поскольку рассматриваемая модель является абелевой, то суперполе W^a калибровочно-инвариантно и регуляризующее слагаемое будет содержать обычные, а не ковариантные производные.

Как показано в приложении А, для модели (9) индекс расходимости оказывается равным

$$\omega_\Lambda = \begin{cases} 2 - 2n(L - 1) - E_\phi(n + 1), & E_\phi \neq 0, \\ -2n(L - 1), & E_\phi = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где L – количество петель, а E_ϕ – число внешних ϕ -линий. Через E_V мы будем обозначать число внешних V -линий.

Заметим, что в соответствии с формулой (10) индекс расходимости диаграммы для определения β -функции в L петлях ($E_\phi = 0$, $E_V = 2$) равен индексу расходимости диаграммы для определения аномальной размерности в $(L - 1)$ -й петле ($E_\phi = 2$, $E_V = 0$). Поскольку гипотеза о точной β -функции требует существования связи между L -петлевой β -функцией и $(L - 1)$ -петлевой аномальной размерностью, то вышеуказанный факт свидетельствует, что регуляризация при помощи высших производных может оказаться весьма удобной для исследования квантовых поправок в суперсимметричных теориях.

Из формулы (10) также следует, что остаточные расходимости присутствуют только в однопетлевых диаграммах, если $n \geq 2$. Поэтому при регуляризации с помощью высших производных однопетлевое приближение является выделенным и требует специального рассмотрения. В частности, для регуляризации остаточных однопетлевых расходимостей необходимо использовать антикоммутирующие поля Паули–Вилларса Φ и $\tilde{\Phi}$ (см. [16])

$$\begin{aligned} S_{PV} &= \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\Phi^* e^{2V} \Phi + \tilde{\Phi}^* e^{-2V} \tilde{\Phi}) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \tilde{\Phi} \Phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} M \tilde{\Phi}^* \Phi^*. \end{aligned} \quad (11)$$

(Поскольку в суперсимметричной электродинамике квадратичные расходимости отсутствуют, то в рассматриваемом случае число полей Паули–Вилларса можно выбрать равным единице.) В дальнейшем мы будем считать, что $M = a\Lambda$, где a – некоторая постоянная.

4. ДВУХПЕТЛЕВАЯ β -ФУНКЦИЯ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Проведем теперь явное вычисление однопетлевой аномальной размерности и двухпетлевой β -функции в модели (9).

Квантование рассматриваемой модели производится аналогично квантованию нерегуляризованной теории, подробно описанному в книге [17], и здесь не обсуждается. Необходимо только отметить, что калибровочная инвариантность фиксировалась добавлением слагаемого

$$S_{\text{gf}} = \frac{1}{64e_0^2} \int d^4x d^4\theta \left(V D^2 \bar{D}^2 \left(1 + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) V + V \bar{D}^2 D^2 \left(1 + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) V \right), \quad (12)$$

где

$$D^2 \equiv \frac{1}{2} \bar{D}(1 + \gamma_5)D, \quad \bar{D}^2 \equiv \frac{1}{2} \bar{D}(1 - \gamma_5)D. \quad (13)$$

После добавления таких членов, фиксирующих калибровку, кинетический член калибровочного поля записывается в наиболее простом виде:

$$S_{\text{gauge}} + S_{\text{gf}} = -\frac{1}{4e_0^2} \int d^4x d^4\theta V \partial^2 \left(1 + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) V. \quad (14)$$

Поскольку в исследуемом случае калибровочной группой является группа $U(1)$, то диаграммы с духовыми петлями отсутствуют.

В силу суперсимметричной калибровочной инвариантности

$$V \rightarrow V - \frac{1}{2}(A + A^+), \quad \phi \rightarrow e^A \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow e^{-A} \tilde{\phi}, \quad (15)$$

где A – произвольное скалярное киральное суперполе, перенормированное действие рассматриваемой модели может быть представлено в виде

$$S_{\text{ren}} = -\frac{1}{4e^2(\Lambda/\mu)} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + Z \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}). \quad (16)$$

(Напомним, что массы полей Паули–Вилларса, которые необходимы при однопетлевых вычислениях с использованием регуляризации с помощью высших ковариантных производных, полагаются пропорциональными Λ .)

β -Функция и аномальная размерность при этом определяются соотношениями

$$\beta = \frac{d}{d \ln \mu} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right), \quad \gamma = -\frac{d \ln Z}{d \ln \mu}. \quad (17)$$

В двухпетлевом приближении нетривиальный вклад в β -функцию дают диаграммы, показанные на рис. 1, а в однопетлевую аномальную размерность – диаграмма, показанная на рис. 2.

После проведения вычислений были получены следующие результаты:

1. Однопетлевой вклад в эффективное действие, квадратичный по полям материи, дается выражением

$$\Delta\Gamma_{\phi}^{(1)} = \int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\phi^*(p)\phi(-p) + \tilde{\phi}^*(p)\tilde{\phi}(-p)) \times \\ \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2(k^2 + k^6/\Lambda^4)(k+p)^2}. \quad (18)$$

2. Двухпетлевой вклад в эффективное действие, содержащий калибровочное поле, дается выражением

$$\Delta\Gamma_V^{(2)} = \int d^2\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} W_a(p) C^{ab} W_b(-p) \times \\ \times \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2k^2(k+p)^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2(k^2 + M^2)((k+p)^2 + M^2)} + \right. \\ \left. + e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(k+p+q)^2 + q^2 - k^2 - p^2}{(k^2 + k^{2n+2}/\Lambda^{2n})(k+q)^2(k+p+q)^2 q^2 (q+p)^2} \right\}, \quad (19)$$

где $M = a\Lambda$ – массы полей Паули–Вилларса. (В двухпетлевом интеграле вклад полей Паули–Вилларса можно опустить, поскольку он заведомо оказывается конечным и не влияет на расходящуюся часть эффективного действия.)

Результаты (18) и (19) автоматически являются суперсимметрично-инвариантными, поскольку при переходе к координатному представлению они запишутся в виде интегралов по суперпространству от произведений суперполей (2) и (7). Отсутствие калибровочной инвариантности в формуле (18) связано с тем, что вычисления проводились только для слагаемых, квадратичных по полям материи. Добавление слагаемых, содержащих произведения полей материи на степени калибровочного поля V , естественно приведет к восстановлению калибровочной инвариантности.

При помощи стандартных методов несложно убедиться, что справедливо равенство

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k+p)^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M^2)((k+p)^2 + M^2)} = \\ = \frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{M^2}{p^2} + 2 \sqrt{1 + \frac{4M^2}{p^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{p^2}{4M^2 + p^2}} \right). \quad (20)$$

При $n = 2$ однопетлевой интеграл также можно вычислить до конца (вычисления приведены в приложении Б):

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 + k^6/\Lambda^4)(k+p)^2} = \pi^2 \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{p^2} \sqrt{1 + \frac{p^4}{\Lambda^4}} \right) + \frac{\Lambda^2}{p^2} \operatorname{arctg} \frac{p^2}{\Lambda^2} \right\}, \quad (21)$$

Рис. 1. Диаграммы Фейнмана, дающие вклад в двухпетлевую β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики.

Рис. 2. Диаграмма Фейнмана, определяющая однопетлевую аномальную размерность.

а расходящаяся часть однопетлевого интеграла получается для произвольного значения n :

$$\left(\int d^4 k \frac{1}{(k^2 + k^{2n+2}/\Lambda^{2n})(k+p)^2} \right)_{\infty} = \pi^2 \ln \Lambda^2. \quad (22)$$

Также оказывается возможным вычислить расходящуюся часть двухпетлевого интеграла для произвольного n :

$$\left(\int d^4 k d^4 q \frac{(k+p+q)^2 + q^2 - k^2 - p^2}{(k^2 + k^{2n+2}/\Lambda^{2n})(k+q)^2(k+p+q)^2 q^2 (q+p)^2} \right)_{\infty} = 2\pi^2 \ln \Lambda^2 \quad (23)$$

(детали вычисления приводятся в приложении Б).

Из формул (19), (22) и (23) следует равенство

$$\frac{4\pi^2}{e^2} = \frac{\pi}{\alpha_0} + \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\alpha_0}{\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu}, \quad (24)$$

благодаря чему двухпетлевая β -функция для $N = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной при помощи высших производных, записывается в виде

$$\beta^{(2)} = \frac{\alpha^2}{\pi} \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \right) \quad (25)$$

и совпадает с результатом вычислений в рамках размерной редукции [7], а также с предсказанием о виде точной β -функции [2].

Необходимо обратить внимание на следующий интересный факт, отмеченный в приложении Б: расходящаяся часть двухпетлевой β -функции выражается через расходящуюся часть однопетлевой аномальной размерности еще до взятия интеграла по $d^4 k$. Поэтому возможно, что связь β -функции и аномальной размерности в высших петлях также удастся установить, не производя явного вычисления аномальной размерности, которое крайне затруднено, если теория регуляризована при помощи высших производных.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе вычислена двухпетлевая β -функция для $N = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной при помощи метода высших ковариантных производных. Показано, что результат не зависит от формы регуляризующего слагаемого и совпадает с результатами вычислений в рамках размерной редукции, а также с предсказанием о виде точной β -функции. Более того, связь двухпетлевой β -функции и однопетлевой аномальной размерности может быть прослежена еще до взятия интегралов. Этот результат позволяет надеяться, что в высших петлях точная β -функция и аномальная размерность оказываются связанными друг с другом именно при использовании метода высших ковариантных производных. Тем не менее окончательный ответ на этот вопрос может быть дан только после проведения явных трехпетлевых вычислений, поскольку в трехпетлевом приближении β -функция уже зависит от схемы перенормировки и регуляризации.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Индекс расходимости суперсимметричной электродинамики, регуляризованной при помощи высших производных

Вычислим индекс расходимости произвольной диаграммы в суперсимметричной электродинамике, регуляризованной при помощи высших ковариантных производных. Пусть L – число петель, N_V – число вершин, I_V и I_ϕ – число внутренних V - и ϕ -линий, E_V и E_ϕ – число внешних V - и ϕ -линий. Тогда в силу очевидной непрерывности ϕ -линий справедливы следующие тождества:

$$N_V = I_\phi + \frac{1}{2}E_\phi, \quad L = I_A + 1 - \frac{1}{2}E_\phi. \quad (26)$$

В соответствии с правилами Фейнмана для суперграфов, подробно описанными в книге [17], каждый пропагатор поля материи пропорционален k^{-2} , а каждый пропагатор поля V из-за введенной регуляризации пропорционален k^{-2-2n} . Каждой вершине без внешних ϕ -линий соответствуют два множителя D^2 , а вершине с внешней ϕ -линией – один множитель D^2 . Поскольку размерность D^2 равна k , то каждая вершина увеличивает индекс расходимости соответственно на 2 или 1. Каждой петле соответствует интегрирование по 4-импульсу. Кроме того, в каждой петле два множителя D^2 из вершин должны быть использованы для удаления произведения δ -функций от антикоммутирующих переменных в совпадающих точках. Поэтому в результате получается, что индекс расходимости диаграммы оказывается равным

$$\omega_\Lambda = 2L - 2I_\phi - I_V(2 + 2n) + 2N_V - E_\phi = 2 - 2n(L - 1) - E_\phi(n + 1), \quad (27)$$

где были использованы тождества (26).

Однако при $E_\phi = 0$ (диаграмма имеет только внешние V -линии) из-за калибровочной инвариантности два множителя D^2 должны действовать на внешние V -линии, что уменьшает индекс расходимости на 2. Поэтому окончательно получаем формулу (10).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Вычисление интегралов, регуляризованных
при помощи высших производных

Вычислим однопетлевой и двухпетлевой интегралы с высшими производными, возникающие в формулах (18) и (19). При этом будем предполагать, что пространство является евклидовым, что может быть всегда достигнуто при помощи поворота Вика.

При вычислении однопетлевой аномальной размерности возникает интеграл (21):

$$I_1 = \int d^4k \frac{1}{(k^2 + k^{2n+2}/\Lambda^{2n})(k+p)^2}. \quad (28)$$

Для того чтобы вычислить его, перейдем к четырехмерным сферическим координатам

$$\begin{aligned} k_1 &= k \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1, & k_2 &= k \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1, \\ k_3 &= k \sin \theta_3 \cos \theta_2, & k_4 &= k \cos \theta_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда, направляя четвертую ось вдоль импульса p^μ , мы получаем, что подынтегральное выражение зависит только от θ_3 , благодаря чему имеем

$$\begin{aligned} \int d^4k &= \int_0^\infty k^3 dk \int_0^\pi d\theta_3 \sin^2 \theta_3 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_1 = \\ &= 4\pi \int_0^\infty k^3 dk \int_0^\pi d\theta_3 \sin^2 \theta_3 = 4\pi \int_0^\infty k^3 dk \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2}, \end{aligned} \quad (30)$$

где в последнем равенстве сделана замена $x = \cos \theta_3$. Поскольку $k^\mu p_\mu = kp \cos \theta_3 = kpx$, то при вычислении I_0 получаем

$$\begin{aligned} \int d^4k \frac{1}{(k^2 + k^{2n+2}/\Lambda^{2n})(k+p)^2} &= \\ &= 4\pi \int_0^\infty k dk \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})(k^2 + 2kpx + p^2)} = \\ &= 2\pi \int_0^\infty k dk \oint_C dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})(k^2 + 2kpx + p^2)}, \end{aligned} \quad (31)$$

где контур C показан на рис. 3. Особыми точками подынтегрального выражения являются $x = \pm 1$ — точки ветвления, $x = \infty$ — полюс, а также полюс $x_0 = -(k^2 + p^2)/2kp$.

Несложно видеть, что интеграл по контуру C оказывается равным интегралу по бесконечно большому контуру, проходимому в отрицательном направлении, минус интеграл по малой окружности вокруг точки x_0 . Другими словами,

$$\begin{aligned} \oint dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2kpx + p^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{|x=\infty} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2kpx + p^2} \right) - \\ &- 2\pi i \operatorname{Res}_{|x=x_0} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2kpx + p^2} \right) = 2\pi i \left(-i \frac{k^2 + p^2}{4k^2 p^2} + i \frac{|k^2 - p^2|}{4k^2 p^2} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Рис. 3. Контур C для вычисления интеграла по угловой переменной x .

Поэтому получаем

$$\oint dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2kpx + p^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{k^2}, & k \geq p, \\ \frac{\pi}{p^2}, & p \geq k, \end{cases} \quad (33)$$

и после взятия интеграла по углам имеем

$$I_1 = 2\pi^2 \int_p^\infty dk \frac{1}{k(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})} + 2\pi^2 \int_0^p dk \frac{k}{p^2(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})}. \quad (34)$$

При $n = 2$ этот интеграл может быть полностью вычислен:

$$I_1|_{n=2} = \pi^2 \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{p^2} \sqrt{1 + \frac{p^4}{\Lambda^4}} \right) + \frac{\Lambda^2}{p^2} \operatorname{arctg} \frac{p^2}{\Lambda^2} \right\}, \quad (35)$$

откуда следует, что

$$(I_1)_\infty = \pi^2 \ln \Lambda^2. \quad (36)$$

Этот же результат можно получить и для произвольного значения параметра n несколько другим способом. Действительно, заметим, что

$$I_1 = b_1 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^i, \quad (37)$$

причем коэффициент b_1 может быть определен из формулы

$$b_1 = \frac{1}{2} \Lambda \frac{dI_1}{d\Lambda} \Big|_{p=0} = n \int d^4 k \frac{k^{2n-4}}{\Lambda^{2n}(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})^2}. \quad (38)$$

Интеграл в правой части этого выражения может быть легко взят при помощи перехода к четырехмерным сферическим координатам:

$$\int d^4k \frac{k^{2n-4}}{\Lambda^{2n}(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})^2} = 2\pi^2 \int_0^\infty dk \frac{k^{2n-1}}{\Lambda^{2n}(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})^2} = \frac{\pi^2}{n}, \quad (39)$$

что с учетом равенства (38) доказывает справедливость формулы (36).

К сожалению, полностью вычислить двухпетлевой интеграл

$$I_2 = \int d^4k d^4q \frac{(k+p+q)^2 + q^2 - k^2 - p^2}{(k^2 + k^{2n+2}/\Lambda^{2n})(k+q)^2(k+p+q)^2q^2(q+p)^2} \quad (40)$$

нам не удалось. Однако можно вычислить его расходящуюся часть. Для этого заметим, что в силу масштабных соображений $I_2 = I_2(p/\Lambda)$. Более того, в силу логарифмической расходимости этого интеграла при $\Lambda = \infty$

$$I_2 = b_2 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^i. \quad (41)$$

(Дважды логарифмические расходимости полностью определяются формой однопетлевых контрчленов и в рассматриваемом случае отсутствуют.) При этом коэффициент b_2 может быть вычислен по формуле

$$b_2 = \frac{1}{2} \Lambda \frac{dI_2}{d\Lambda} \Big|_{p=0} = \int d^4k d^4q \frac{2n k^{2n-2}}{\Lambda^{2n}(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})^2} \frac{q^2 + k_\mu q_\mu}{(k+q)^4 q^4}. \quad (42)$$

Заметим также, что если интеграл I_2 содержит более чем логарифмические расходимости, то выражение (42) окажется расходящимся, что немедленно укажет на ошибку в вычислениях.

Интегрирование по d^4q в формуле (42) осуществляется переходом к четырехмерным сферическим координатам, как и в ранее рассмотренном случае:

$$\begin{aligned} \int d^4q \frac{q^2 + k_\mu q_\mu}{(k+q)^4 q^4} &= 4\pi \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 dx \frac{(q+kx)\sqrt{1-x^2}}{(k^2 + 2kqx + q^2)^2} = \\ &= -2\pi \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty dq \frac{d}{dq} \frac{\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2kqx + q^2} = \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi^2}{k^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Поэтому окончательно получаем

$$b_2 = 2n\pi^2 \int d^4k \frac{k^{2n-4}}{\Lambda^{2n}(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})^2} = 2\pi^2 b_1 = 2\pi^4, \quad (44)$$

где была использована формула (39). Подчеркнем, что вывод равенства $b_2 = 2\pi^2 b_1$, вообще говоря, не требует взятия интеграла по d^4k , что позволяет связать двухпетлевую β -функцию и однопетлевую аномальную размерность, не вычисляя их явно.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность П. И. Пронину за полезные обсуждения и А. А. Славнову за внимание к работе. К. В. Степаньянц также благодарен проф. И. Охба (университет Васеда) за гостеприимство и важные замечания.

Список литературы

- [1] *V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zakharov.* Phys. Lett. B. 1985. V. 166. P. 329.
- [2] *А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман.* ЯФ. 1986. Т. 43. С. 1596; *M. Shifman, A. Vainshtein.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 277. P. 456.
- [3] *W. Siegel.* Phys. Lett. B. 1979. V. 84. P. 193.
- [4] *L. Avdeev, O. Tarasov.* Phys. Lett. B. 1982. V. 112. P. 356.
- [5] *I. Jack, D. Jones, C. North.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 473. P. 308.
- [6] *I. Jack, D. Jones, C. North.* Phys. Lett. B. 1996. V. 386. P. 138.
- [7] *I. Jack, D. Jones, C. North.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 473. P. 308; hep-ph/9603386.
- [8] *I. Jack, D. Jones.* Regularization of supersymmetric theories. hep-ph/9707278.
- [9] *A. Slavnov.* Nucl. Phys. B. 1971. V. 31. P. 301.
- [10] *T. Bakeyev, A. Slavnov.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1539.
- [11] *P. West.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 113.
- [12] *C. Martin, F. Ruiz-Ruiz.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 436. P. 645.
- [13] *M. Asorey, F. Falceto.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 5290.
- [14] *П. И. Пронин, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 1998. Т. 114. С. 137.
- [15] *P. Pronin, K. Stepanyantz.* Phys. Lett. B. 1997. V. 414. P. 117.
- [16] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [17] *П. Уэст.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию 2.X.2001 г.