Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Гончар, Л. В. Танатаров, А. В. Чечкин, Стационарные решения дробного кинетического уравнения со степенным симметричным потенциалом, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 1, 162–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:39:33

© 2002 г. В. Ю. Гончар*, Л. В. Танатаров*, А. В. Чечкин*

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДРОБНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Аналитически и численно исследованы свойства стационарных решений одномерного дробного уравнения Эйнштейна–Смолуховского с потенциалом вида x^{2m+2} , $m = 1, 2, \dots$, и дробной пространственной производной Рисса порядка α , $1 \leq \alpha \leq 2$. Показано, что стационарные функции распределения при $1 \leq \alpha < 2$ имеют степенные асимптотики при больших значениях аргумента, спадающие как $x^{-(\alpha+2m+1)}$. Обнаружен бимодальный характер этих распределений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время кинетические уравнения с дробными производными используются для описания аномальных диффузионных и релаксационных процессов [1]–[3]. Такие уравнения рассматриваются как обобщения классических кинетических уравнений теории броуновского движения: уравнения Эйнштейна–Смолуховского для функции распределения $f(x, t)$ в координатном пространстве и уравнения Фоккера–Планка для функции распределения $f(x, v, t)$ в фазовом пространстве координат и скоростей. Возможны три типа обобщений: первый, когда вторая производная по пространству (или по скорости) заменяется на дробную производную порядка меньше двух; второй, когда первая производная по времени заменяется на дробную временную производную порядка меньше единицы; наконец, третий тип обобщений, который сочетает первый и второй. Дробные кинетические уравнения в отсутствие внешнего поля могут быть получены из уравнений теории “случайного блуждания с непрерывным временем” [4]. Однако дробные уравнения позволяют также исследовать процессы, протекающие во внешних полях, и использовать различные граничные (начальные) условия; обе эти возможности не могут быть реализованы в рамках схемы случайных блужданий с непрерывным временем. Заметим также, что кинетические уравнения, содержащие дробные производные по пространству и скорости, могут быть получены “на физическом

*Институт теоретической физики Национального научного центра “Харьковский физико-технический институт”, Харьков, Украина. E-mail:achechkin@kipt.kharkov.ua

уровне строгости” с использованием метода, применяемого Чандрасекаром в монографии [5] для вывода классических кинетических уравнений Фоккера–Планка и Эйнштейна–Смолуховского [6].

К настоящему времени исследованы свойства решений дробных кинетических уравнений лишь в некоторых простых частных случаях. Поиск решений и развитие регулярных аналитических и численных методов исследования дробных кинетических уравнений представляет несомненный интерес.

В данной работе исследуются стационарные решения одномерного дробного уравнения Эйнштейна–Смолуховского, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(Ff) + \frac{\partial^\alpha f}{\partial |x|^\alpha}, \quad f(x, 0) = \delta(x), \\ F &= -\frac{dU}{dx}, \quad U = \frac{x^{2m+2}}{2m+2}, \quad m = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $f(x, t)$ – функция распределения в пространстве координат, F – внешняя сила, U – потенциальная энергия, $\partial^\alpha / \partial |x|^\alpha$ – дробная производная Рисса (использовано обозначение, введенное в работе [7]), α – порядок дробной производной, $1 \leq \alpha < 2$. Эта производная определяется для “достаточно хорошей” функции с помощью производных Лиувилля–Вейля [8] соотношением

$$\frac{d^\alpha}{d|x|^\alpha} \phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2 \cos(\pi\alpha/2)} [D_+^\alpha \phi + D_-^\alpha \phi], & \alpha \neq 1, \\ -\frac{d}{dx} H\phi, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $D_\pm^\alpha$ – лево- и правосторонние производные Лиувилля–Вейля,

$$\begin{aligned} D_+^\alpha \phi &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^x \frac{\phi(\xi) d\xi}{(\xi-x)^{\alpha-1}}, \quad 1 \leq \alpha < 2, \\ D_-^\alpha \phi &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_x^\infty \frac{\phi(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}, \quad 1 \leq \alpha < 2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

(при $\alpha = 1$ по определению $D_\pm^1 = \pm d/dx$), H – оператор преобразования Гильберта,

$$H\phi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\phi(\xi) d\xi}{x-\xi}.$$

В фурье-представлении операторы дробных производных приобретают простой вид

$$\widehat{\Phi}(D_\pm^\alpha \hat{\phi}) = \int_{-\infty}^\infty dx \exp(ikx) D_\pm^\alpha \phi = (\mp ik)^\alpha \hat{\phi}(k), \quad (1.4)$$

где $\hat{\phi}(k)$ – фурье-образ функции $\phi(x)$ и

$$(\mp ik)^\alpha = |k|^\alpha \exp\left(\mp \frac{\alpha\pi i}{2} \operatorname{sgn} k\right).$$

Так как

$$\widehat{\Phi}(H\phi) = i \operatorname{sgn} k \hat{\phi} \quad (1.5)$$

($\widehat{\Phi}$ означает операцию преобразования Фурье), то с помощью формул (1.4), (1.5) получаем выражение для фурье-образа дробной производной Рисса, которое справедливо для всех значений α ,

$$\widehat{\Phi}\left(\frac{d^\alpha \phi}{d|x|^\alpha}\right) = -|k|^\alpha \hat{\phi}. \quad (1.6)$$

Ниже мы будем пользоваться только представлением Фурье (1.6) для дробной производной (1.2).

В случае $F = 0$ и $0 < \alpha < 2$ решением уравнения (1.1) является функция распределения устойчивого процесса с независимыми приращениями. В случае $\alpha = 2$ и произвольных m стационарным решением является функция распределения Больцмана,

$$f_{\text{st}}(x) = C \exp(-U(x)), \quad C = \frac{(2m+2)^{\frac{2m+1}{2m+2}}}{2\Gamma((2m+2)^{-1})}. \quad (1.7)$$

Случай $m = 0$, $1 \leq \alpha < 2$ (гармонический осциллятор Леви) является достаточно простым и подробно исследован наряду с другими релаксационными процессами [6], [9]. Для того чтобы исследовать решения во всем диапазоне $1 \leq \alpha \leq 2$ и для произвольных m , перейдем к характеристической функции $\hat{f}_{\text{st}}(k)$ стационарного решения,

$$\hat{f}_{\text{st}}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(ikx) f_{\text{st}}(x), \quad (1.8)$$

уравнение для которой следует из уравнения (1.1) (в дальнейшем индекс “st” опускаем),

$$\frac{d^{2m+1}}{dk^{2m+1}} \hat{f}(k) = (-1)^{m+1} \operatorname{sgn} k |k|^{\alpha-1} \hat{f}(k). \quad (1.9)$$

При выводе (1.9) использовалось естественное условие стремления к нулю функции $\hat{f}$ и ее производных при $k \rightarrow \infty$. Функция $\hat{f}(k)$ удовлетворяет также следующим условиям. В силу симметрии задачи $f(x) = f(-x)$ и, следовательно, $\hat{f}(k) = \hat{f}^*(k)$. Кроме того, на основании теоремы Бохнера–Хинчина $\hat{f}^*(k) = \hat{f}(-k)$. Из этих условий следует, что решение уравнения (1.9) достаточно искать на положительной полуоси. Поэтому в последующих разделах мы будем исследовать решение уравнения (1.9) при $k \geq 0$. Кроме того, все нечетные моменты функции $f(x)$, если они существуют, равны нулю, а значит,

$$\frac{d^p \hat{f}(0)}{dk^p} = 0, \quad p = 1, 3, 5, \dots$$

Дальнейший план статьи следующий. В разделе 2 получены функции распределения для случаев $\alpha = 1$, $m = 1, 2$. В разделе 3 исследуется асимптотика характеристической функции для $1 \leq \alpha \leq 2$ при больших значениях аргумента. В разделе 4 приведены частные решения уравнения (1.9) для всех α и m и получены асимптотики функций распределения при больших значениях аргумента. В разделе 5 получено и исследуется общее решение для всех α и $m = 1$. В разделе 6 приведены результаты численного моделирования, основанного на решении уравнения Ланжевена, соответствующего уравнению (1.1). Наконец, в разделе 7 сформулированы основные результаты работы.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ $\alpha = 1$

В этом разделе мы исследуем решения уравнения

$$\frac{d^{2m+1}}{dk^{2m+1}} \hat{f}(k) = (-1)^{m+1} \hat{f}(k), \quad k \geq 0 \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \hat{f}(\infty) &= 0, \quad \hat{f}(0) = 1, \\ \hat{f}'(0) &= \hat{f}^{(3)}(0) = \dots = \hat{f}^{(2m-1)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\hat{f}(k) = \sum_{j=1}^{2m+1} C_j e^{k_j k}, \quad (2.3)$$

где k_j — корни характеристического уравнения

$$k^{2m+1} = (-1)^{m+1},$$

C_j — постоянные. В силу первого условия (2.2) следует положить $C_j = 0$ для корней характеристического уравнения, лежащих в правой полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq 0$. Остальные C_j находятся с помощью граничных условий (2.2) при $k = 0$. Дальнейшее применение обратного преобразования Фурье приводит к функции распределения $f(x)$. Приведем результаты для $m = 1, 2$, полученные в результате простых, но весьма громоздких выкладок:

$$f(x) = \begin{cases} \pi^{-1} (1 - x^2 + x^4)^{-1}, & m = 1, \\ C(1 + x^2)^{-1} (1 - 2x^2 \cos(\frac{\pi}{5}) + x^4)^{-1}, & m = 2, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $C = 2\pi^{-1} \cos(\pi/5) (1 + 2 \cos(2\pi/5))^{-1}$.

Отметим две важные особенности функций распределения (2.4):

а) степенной характер асимптотик при $x \rightarrow \infty$:

$$f(x) \sim x^{-4} \quad \text{при } m = 1, \quad f(x) \sim x^{-6} \quad \text{при } m = 2;$$

б) бимодальный характер функций $f(x)$: при $x = 0$ они имеют локальный минимум, а при

$$x_{\max} = \begin{cases} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, & m = 1, \\ \pm 3^{-\frac{1}{2}} (\mu + \sqrt{\mu^2 + 3\mu})^{\frac{1}{2}}, & \mu = 4 \sin^2(\frac{2\pi}{5}) - 3, \quad m = 2 \end{cases} \quad (2.5)$$

они имеют максимум.

Стационарные решения при $\alpha = 1$ коренным образом отличаются от больцмановского решения, которое экспоненциально спадает на бесконечности и является унимодальным. Ниже будет показано, что степенные асимптотики и бимодальность присущи стационарным решениям не только при $\alpha = 1$, но и при $1 \leq \alpha < 2$.

3. АСИМПТОТИКА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА

Вернемся к уравнению (1.9) при $k \geq 0$ и рассмотрим асимптотику решений при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим функцию

$$\eta(\xi) = k^{\frac{\alpha-1}{2m+1}} \hat{f}(k), \quad \xi = k^{1+\frac{\alpha-1}{2m+1}}. \quad (3.1)$$

Она удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{2m+\alpha}{2m+1}\right)^{2m+1} \left[\xi^{\frac{\alpha-1}{2m+\alpha}} \frac{d}{d\xi}\right]^{2m+1} (\eta \xi^{-\frac{\alpha-1}{2m+\alpha}}) = (-1)^{m+1} \eta \xi^{\frac{2m(\alpha-1)}{2m+\alpha}}. \quad (3.2)$$

Нас интересует асимптотика решения $\eta(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. Уравнение подобного типа рассмотрено в [10], [11]. Там же приведен метод нахождения асимптотики решения при больших значениях ξ . Следуя этому методу, необходимо разделить обе части уравнения на $\xi^{2m(\alpha-1)/(2m+\alpha)}$, после чего оно сводится к уравнению

$$\frac{d^{2m+1}}{d\xi^{2m+1}} \eta + \sum_{l=0}^{2m} P_l(\xi) \frac{d^l}{d\xi^l} \eta = (-1)^{m+1} \lambda \eta, \quad (3.3)$$

где $\lambda = ((2m+1)/(2m+\alpha))^{2m+1}$, а коэффициенты

$$P_l(\xi) = \frac{a_l}{\xi^{2m+1-l}},$$

где a_l — некоторые коэффициенты, зависящие от m и α .

Асимптотика ищется в виде $\eta(\xi) = u \exp(\beta\xi)$, где

$$u = c_0 + \frac{c_1}{\xi} + \frac{c_2}{\xi^2} + \dots \quad (3.4)$$

Здесь β — корень характеристического уравнения (см. [11, с. 391])

$$\beta^{2m+1} = (-1)^{m+1} \lambda, \quad (3.5)$$

c_0 — произвольная постоянная, а постоянные $c_1, c_2, \dots$ определяются через c_0 путем подстановки выражения (3.4) в (3.3). Из всех корней характеристического уравнения (3.5) нужно выбрать корни, имеющие отрицательную действительную часть.

В качестве примера рассмотрим случай $m = 1$. Уравнение (3.3) приобретает вид

$$\frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + \frac{A}{\xi^2} \left(\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{\eta}{\xi} \right) = \lambda \eta, \quad (3.6)$$

где $A = (\alpha - 1)(\alpha + 5)(\alpha + 2)^{-2}$. Для u получаем уравнение

$$\frac{d^3 u}{d\xi^3} + 3\beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left(3\beta^2 + \frac{A}{\xi^2}\right) \frac{du}{d\xi} + \left(\beta^3 - \lambda - \frac{A}{\xi^3}\right) u = 0. \quad (3.7)$$

Характеристическое уравнение $\beta^3 = \lambda$ является условием обращения в нуль члена нулевого порядка по $1/\xi$ в коэффициенте уравнения (3.7) при самой функции u . Решение уравнения (3.7) для u ищем в виде разложения (3.4). Подставляя его в уравнение, определяем коэффициенты $c_1, c_2, \dots$ через c_0 . В результате получаем

$$u = c_0 \left(1 - \frac{A}{6\beta^2 \xi^2} - \frac{A}{3\beta^3 \xi^3} + \dots\right). \quad (3.8)$$

Если не интересоваться следующими за единицей членами в разложении (3.8), то экспоненциальную зависимость $\eta(\xi)$ формально можно получить сразу из уравнения (3.6), отбросив в нем члены порядка $1/\xi^2, 1/\xi^3$, т.е. оставив в левой части лишь высшую производную. То же самое можно выполнить и для произвольного m . Поэтому в левой части уравнения (3.2) оставляем единственное слагаемое, содержащее наибольшую степень ξ . Переходя к переменной

$$\tilde{\xi} = \frac{2m+1}{2m+\alpha} \xi, \quad (3.9)$$

получаем уравнение, которому удовлетворяет главный член асимптотики $\eta(\tilde{\xi})$ при $\tilde{\xi} \rightarrow \infty$,

$$\frac{d^{2m+1} \eta}{d\tilde{\xi}^{2m+1}} = (-1)^{m+1} \eta(\tilde{\xi}). \quad (3.10)$$

Таким образом, для асимптотики функции $\eta(\tilde{\xi})$ получается то же самое уравнение, что и для характеристической функции в случае $\alpha = 1$ (см. (2.1)).

Из (3.10) следует, что функция $\eta(\tilde{\xi})$, а следовательно, и $\hat{f}(k)$ (3.1) осциллируют, экспоненциально приближаясь к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Так как для функции $\eta(\tilde{\xi})$ используется лишь граничное условие $\eta(\infty) = 0$, решение уравнения (3.10) зависит от $m+1$ произвольной постоянной.

Приведем выражения для асимптотик $\eta(\xi)$ при $m = 1$ и 2:

$$\eta(\xi) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{3}{2(\alpha+2)}\xi\right) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2(\alpha+2)}\xi + \theta\right), & m = 1, \\ C_1 \exp\left(-\frac{5}{4+\alpha}\xi\right) + \\ + 2C_2 \exp\left(-\frac{5 \cos \frac{2\pi}{5}}{4+\alpha}\xi\right) \cos\left(\frac{5 \sin \frac{2\pi}{5}}{4+\alpha}\xi + \theta_1\right), & m = 2, \end{cases} \quad (3.11)$$

где C , C_1 , C_2 , θ и θ_1 – некоторые постоянные. Переходя к функции $\hat{f}(k)$ по формулам (3.1), получаем

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} Ck^{-\frac{\alpha-1}{3}} \exp\left(-\frac{3k^{\frac{\alpha+2}{3}}}{2(\alpha+2)}\right) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}k^{\frac{\alpha+2}{3}}}{2(\alpha+2)} + \theta\right), & m = 1, \\ C_1 k^{-\frac{\alpha-1}{5}} \exp\left(-\frac{5k^{\frac{\alpha+4}{5}}}{4+\alpha}\right) + 2C_2 k^{-\frac{\alpha-1}{5}} \exp\left(-\frac{5 \cos \frac{2\pi}{5} k^{\frac{\alpha+4}{5}}}{4+\alpha}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{5 \sin \frac{2\pi}{5} k^{\frac{\alpha+4}{5}}}{4+\alpha} + \theta_1\right), & m = 2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Нетрудно убедиться, что выражения (3.12) находятся в соответствии с асимптотикой характеристической функции распределения Больцмана ($\alpha = 2$). Эту асимптотику можно получить, используя асимптотическое значение интеграла

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(ikx - x^{2m}) &= \left(\frac{\pi}{m(2m-1)}\right)^{\frac{1}{2}} (2m)^{\frac{m-1}{2m-1}} x^{-\frac{m-1}{2m-1}} \times \\ &\times \exp\left(c_m x^{\frac{2m}{2m-1}} \cos \frac{\pi m}{2m-1}\right) \cos\left(c_m x^{\frac{2m}{2m-1}} \sin \frac{\pi m}{2m-1} - \frac{\pi(m-1)}{2(2m-1)}\right), \\ c_m &= \frac{2m-1}{2m} (2m)^{-\frac{1}{2m-1}}. \end{aligned}$$

При этом в формуле (3.12), например, для $m = 1$ имеем

$$C = \frac{2^{\frac{10}{3}} \sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{4})}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

4. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА

Будем искать решение уравнения (1.9) при $k \geq 0$ в виде

$$\hat{f}(k) = \varphi_0(k) + \sum_{j=1}^{\infty} k^{\nu_j} \varphi_j(k), \quad (4.1)$$

где φ_0, φ_j – аналитические функции и ν – нецелое положительное число (если $\alpha \neq 1, 2$). При подстановке такого решения в (1.9) получится уравнение, в правой части которого нет слагаемых, содержащих целые степени k . Поэтому должно выполняться условие $\varphi_0^{(2m+1)}(k) = 0$, а следовательно, $\varphi_0(k)$ – полином степени не выше $2m$.

Далее, в силу того что все нечетные производные $\hat{f}(k)$ (если они существуют) равны нулю при $k = 0$, получаем, что φ_0 содержит только четные степени k , $\varphi_0 \equiv \varphi_0(k^2)$. Покажем, что функции $\varphi_j(k)$ также являются полиномами степени не выше $2m$, содержащими лишь четные степени k , $\varphi_j \equiv \varphi_j(k^2)$. Для этого подставим (4.1) в уравнение (1.9)

и учтем, что

$$\frac{d^{2m+1}}{dk^{2m+1}} k^{\nu j} \varphi_j(k) = \sum_{p=0}^{2m+1} C_{2m+1}^p \frac{d^p \varphi_j(k)}{dk^p} \frac{d^{2m+1-p}}{dk^{2m+1-p}} k^{\nu j},$$

и

$$\frac{d^{2m+1-p}}{dk^{2m+1-p}} k^{\nu j} = \nu j (\nu j - 1) \dots (\nu j - (2m - p)) k^{\nu j - (2m+1) + p}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{2m+1} C_{2m+1}^p k^p \frac{d^p \varphi_j(k)}{dk^p} \nu j (\nu j - 1) \dots (\nu j - 2m + p) k^{\nu j - (2m+1)} = \\ = (-1)^{m+1} k^{\alpha-1} \varphi_0(k^2) + (-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{\infty} k^{\nu j + \alpha - 1} \varphi_j(k). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Приравняем в (4.2) множители при одинаковых степенях k . Отсюда сразу следует, что

$$\nu = \alpha + 2m \quad (4.3)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{2m+1} C_{2m+1}^p k^p \frac{d^p \varphi_j(k)}{dk^p} j(\alpha + 2m) [j(\alpha + 2m) - 1] \dots [j(\alpha + 2m) - 2m + p] = \\ = (-1)^{m+1} \varphi_{j-1}(k). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что так как φ_0 — полином от k^2 степени не выше m , то все φ_j являются также полиномами от k^2 степени не выше m .

Представив φ_j в виде

$$\varphi_j(k^2) = \sum_{l=1}^m \alpha_j^{(l)} k^{2l}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.5)$$

($a_0^{(0)} = 1$ в силу того что $\hat{f}(0) = 1$) и подставляя эти разложения в (4.1), получаем

$$\hat{f}(k) = \sum_{l=0}^m k^{2l} \left(a_0^{(l)} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(l)} k^{j(\alpha+2m)} \right). \quad (4.6)$$

Общее решение уравнения (1.9) является суперпозицией решений вида

$$k^{2l} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j^{(l)} k^{j(\alpha+2m)} \right), \quad (4.7)$$

где $\tilde{a}_j^{(l)} = a_j^{(l)} / a_0^{(l)}$, $l = 0, \dots, m$. Общее решение зависит от m констант. Коэффициенты $\tilde{a}_j^{(l)}$ определяются путем подстановки (4.7) в уравнение (1.9):

$$\begin{aligned} \tilde{a}_j^{(l)} [j(\alpha + 2m) + 2l] [j(\alpha + 2m) + 2l - 1] \dots [j(\alpha + 2m) - 2(m - l)] &= \tilde{a}_{j-1}^{(l)} (-1)^{m+1}, \\ j &= 1, 2, \dots, \\ \tilde{a}_0^{(l)} &= 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Выражения (4.7), (4.8) полностью определяют совокупность m частных решений уравнения (1.9).

С помощью полученных выражений найдем асимптотики стационарных функций распределения при $x \rightarrow \infty$. Асимптотики определяются неаналитическим членом в разложении (4.1), содержащим наименьшую степень k , т.е. членом

$$a_1^{(0)} k^{\alpha+2m}. \quad (4.9)$$

Таким образом,

$$f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} a_1^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |k|^{\alpha+2m} e^{-ikx} = 2a_1^{(0)} \frac{1}{x^{\alpha+2m+1}} \operatorname{Re} I, \quad (4.10)$$

где

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2\pi} t^{\alpha+2m} e^{-it} = (-1)^{m+1} i e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} \frac{\Gamma(\alpha + 2m + 1)}{2\pi}. \quad (4.11)$$

Этот несобственный интеграл вычисляется методом суммирования Абеля [12], [13]. Значение интеграла приведено, например, в книге [14] (приложение II, формула (II.24)).

Подставим (4.11) в (4.10) и учтем явное выражение для $a_1^{(0)}$ (см. (4.8)). В результате получаем асимптотику стационарной функции распределения при $x \rightarrow \infty$,

$$f(x) \approx \frac{C_\alpha}{x^{\alpha+2m+1}}, \quad (4.12)$$

где

$$C_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}.$$

Из выражения (4.12) следует, что целые моменты порядка, большего $2m+1$, расходятся.

5. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ $m = 1$

В этом разделе мы более подробно исследуем общее решение, даваемое выражением (4.6) для $m = 1$,

$$\hat{f}(k) = \sigma_1 + a_0^{(1)} k^2 \sigma_2, \quad (5.1)$$

где

$$\sigma_1 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(0)} k^{j(\alpha+2m)}, \quad (5.2)$$

$$\sigma_2 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j^{(1)} k^{j(\alpha+2m)} \quad (5.3)$$

и коэффициенты $a_j^{(0)}, \tilde{a}_j^{(1)}$ определяются выражениями (4.8).

Постоянную $a_0^{(1)}$ определим из условия $\hat{f}(k \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, т.е.

$$a_0^{(1)} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1}{k^2 \sigma_2}. \quad (5.4)$$

Таким образом, несмотря на то что частные решения возрастают на бесконечности, выбирается такая их линейная комбинация, которая на бесконечности убывает. Возможность такого выбора подтверждается численным расчетом, результаты которого приведены ниже.

Рис. 1

Рис. 2

На рис. 1 и 2 показаны результаты численных расчетов для $m = 1$, $\alpha = 1.5$. На рис. 1а изображены зависимости двух частных решений σ_1 (кривая 1) и $k^2\sigma_2$ (кривая 2) от k . Оба частных решения неограниченно возрастают при $k \rightarrow \infty$, однако их отношение $a(k) = \sigma_1(k)/k^2\sigma_2(k)$ стремится к постоянному пределу, равному a_0 . Это утверждение иллюстрирует рис. 1б, на котором изображена зависимость $|a(k) - a_0|$ от k в полупологарифмическом масштабе. Значение $a(k)$ осциллирует, приближаясь к a_0 ; величина a_0 принимается равной

$$a_0 \equiv a(15) = -0.384411398. \quad (5.5)$$

Вычисления $a(k)$ при $k > 15$ приводят лишь к увеличению количества значащих цифр в записи (5.5); первые 9 цифр после запятой для a_0 при этом не изменяются. По этой причине мы ограничимся численным расчетом характеристической функции с помощью рядов (5.2), (5.3) при значениях $|k| \leq 15$ и рекуррентной формулы (4.8), в которой $a_0^{(1)}$ принимается равным a_0 из выражения (5.5). Вид характеристической функции $\hat{f}(k)$ представлен в линейном (рис. 2а) и полупологарифмическом (рис. 2б) масштабах. На рис. 2б отчетливо видны осцилляции характеристической функции, амплитуда которых экспоненциально убывает. Такое поведение находится в соответствии с видом асимптотики (3.11) характеристической функции.

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 3 демонстрирует вид функций, полученных обратным преобразованием Фурье выражений (5.1)–(5.3) при различных значениях α от 1 до 2. При этом используется рекуррентная формула (4.8), $m = 1$ и коэффициент $a_0^{(1)}$ определяется формулой (5.5). Ясно видна бимодальность функций распределения. Наиболее ярко это свойство выражено у распределения с $\alpha = 1$. С увеличением α бимодальные профили “сглаживаются”, при $\alpha = 2$ распределение становится унимодальным.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Мы провели численное моделирование, основанное на решении уравнения Ланжевена

$$\frac{dx}{dt} = -x^{2m+1} + \xi_\alpha(t), \quad (6.1)$$

где $\xi_\alpha(t)$ – белый гауссовский шум или белый шум Леви с показателем Леви α , $1 \leq \alpha \leq 2$. Численный генератор белого шума Леви основан на применении теоремы Гнеденко об областях притяжения устойчивых законов [15] и подробно описан в работах, посвященных самоаффинным свойствам обыкновенного и дробного движения Леви [16], [17]. В работе [6] показана эквивалентность описания стохастических систем с помощью

Рис. 5

уравнения Ланжевена, содержащего источник белого шума Леви с показателем α , и кинетического уравнения с дробной пространственной производной того же порядка α . Для броуновского движения этот вопрос детально освещается, например, в [5].

На рис. 4 представлены результаты численного моделирования уравнения Ланжевена (6.1) при $m = 1$ и с источником ξ белого гауссовского шума, $\alpha = 2$ (рис. 4а и 4в), и белого шума Леви, $\alpha = 1.1$ (рис. 4б и 4г). На рис. 4а и 4б показаны типичные траектории $x(N)$, N – число временных шагов в численном моделировании. На траектории рис. 4б видны большие приращения координаты x – “прыжки Леви” или “полеты Леви”. Они возникают из-за больших значений шума ξ , которые в свою очередь обязаны своим появлением степенной асимптотике устойчивого распределения. На рис. 4в и 4г приняты следующие обозначения. Точками показаны функции распределения, построенные в результате решения уравнений Ланжевена. При этом установление со временем стационарного состояния в процессе численного моделирования фиксировалось по достижению постоянного значения дисперсии $\langle x^2(N) \rangle$. Жирная сплошная линия 1 и штриховая линия 2 изображают в относительных единицах потенциальную функцию $U = x^4/4$ и ее кривизну, соответственно. Сплошная линия 3 – распределение Больцмана (1.7). На рис. 4г сплошная линия 4 изображает степенную асимптотику (4.12). Эти результаты свидетельствуют о хорошем количественном согласии результатов аналитических рас-

четов и численного моделирования.

На рис. 5 сравниваются аналитические и численные результаты для $m = 1$ (рис. 5а и 5в) и $m = 2$ (рис. 5б и 5г). Здесь точками изображены функции распределения, полученные в результате численного решения уравнений Ланжевена при $\alpha = 1.5$. На рис. 5а и 5б представлены результаты при малых значениях аргумента, когда хорошо виден бимодальный характер распределения, а на рис. 5в и 5г – при больших значениях аргумента, когда отчетливо проявляется степенной характер асимптотики решений. Потенциальные функции $x^4/4$ (рис. 5а и 5в) и $x^6/6$ (рис. 5б и 5г) и кривизна этих потенциальных функций изображены жирными сплошными линиями 1 и штриховыми линиями 2, соответственно (в относительных единицах по оси ординат). На рис. 5а сплошной тонкой линией изображена функция распределения, полученная по формулам раздела 5 с помощью обратного преобразования Фурье. На рис. 5б сплошной линией 3 изображена гладкая кривая, проведенная через точки, являющиеся результатом численного моделирования. На рис. 5в и 5г сплошными линиями 3 изображены асимптотики (4.12). Из рисунков видно хорошее количественное согласие между результатами аналитических расчетов и численного моделирования для стационарной функции распределения как при малых, так и при больших значениях аргумента.

7. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе рассмотрены свойства стационарных решений одномерного дробного уравнения Эйнштейна–Смолуховского с потенциалом вида x^{2m+2} , $m = 1, 2, \dots$. Уравнение содержит пространственную дробную производную Рисса порядка α , $1 \leq \alpha \leq 2$. При $\alpha = 2$ это уравнение переходит в классическое уравнение Эйнштейна–Смолуховского для броуновского движения.

Получены следующие основные результаты:

1. Найдены стационарные функции распределения в случае $\alpha = 1$, $m = 1, 2$. Особенностями этих решений являются степенной характер асимптотик при $x \rightarrow \pm\infty$ ($f(x) \sim x^{-4}$ при $m = 1$ и $f(x) \sim x^{-6}$ при $m = 2$), а также бимодальный характер функций распределения.
2. Найдены асимптотики стационарных характеристических функций при больших значениях аргумента во всем диапазоне α при $m = 1$ и 2. Эти асимптотики имеют осциллирующий характер, экспоненциально приближаясь к нулю.
3. Получена полная система частных решений уравнений для стационарной характеристической функции для всего диапазона α и всех значений m . Рассчитаны асимптотики стационарных функций распределения при больших значениях аргумента и показано, что они имеют степенной характер, $f(x) \sim x^{-(\alpha+2m+1)}$. Следовательно, целые моменты порядка, большего чем $2m + 1$, расходятся.
4. Получено общее решение для стационарной характеристической функции при $m = 1$. Численное моделирование обратного преобразования Фурье указывает на бимодальный характер стационарных распределений при $1 \leq \alpha < 2$.

5. Проведено численное моделирование, основанное на решении уравнения Ланжевена, соответствующего дробному симметричному уравнению Эйнштейна–Смолуховского и содержащему источник белого шума Леви с показателем α , $1 \leq \alpha \leq 2$, $m = 1, 2$. Результаты численного моделирования показывают бимодальность и степенной характер асимптотик стационарных функций распределения и находятся в количественном согласии с результатами аналитических расчетов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках гранта ИНТАС 2000 № 847 и при информационной поддержке в рамках гранта ИНТАС 98-01.

Список литературы

- [1] *R. Metzler, J. Klafter.* Phys. Rep. 2000. V. 339. P. 1.
- [2] *G. M. Zaslavsky, M. Edelman, B. A. Niyazov.* Chaos. 1997. V. 7. P. 753.
- [3] *F. Mainardi.* Chaos, Solitons and Fractals. 1996. V. 7. P. 1461.
- [4] *E. Barkai, R. Metzler, J. Klafter.* Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 132.
- [5] *С. Чандрасекар.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ИЛ, 1947.
- [6] *A. V. Chechkin, V. Yu. Gonchar.* ЖЭТФ. 2000. Т. 118. С. 730.
- [7] *A. I. Saichev, G. M. Zaslavsky.* Chaos. 1997. V. 7. P. 753.
- [8] *С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев.* Дробные интегралы и производные. Минск: Наука и техника, 1987.
- [9] *S. Jespersen, R. Metzler, H. C. Fogedby.* Phys. Rev. E. 1999. V. 59. P. 2736.
- [10] *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
- [11] *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. Л.-М.: Гос. изд-во технико-теоретической л-ры, 1949.
- [12] *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.
- [13] *Г. Харди.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [14] *А. Н. Малазов.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
- [15] *Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: Гос. изд-во технико-теоретической л-ры, 1949.
- [16] *A. V. Chechkin, V. Yu. Gonchar.* Chaos, Solitons and Fractals. 2000. V. 11. P. 2379.
- [17] *A. V. Chechkin, V. Yu. Gonchar.* Physica A. 2000. V. 27. P. 312.

Поступила в редакцию 28.VI.2001 г.,
после доработки 1.X.2001 г.