Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Гарсия Фуертес, А. М. Переломов, Производные обобщенных полиномов Генбауэра, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 2, 194–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:49:28

© 2002 г.

В. Гарсия Фуертес*, А. М. Переломов*,†

ПРОИЗВОДНЫЕ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ГЕГЕНБАУЭРА

Доказаны некоторые новые формулы для производных обобщенных полиномов Гегенбауэра, связанных с алгеброй Ли A_2 .

Как хорошо известно [1], классические полиномы Гегенбауэра $C_m^\kappa(z)$ претерпевают при дифференцировании по z сдвиг по параметру κ , а именно

$$\frac{dP_m^\kappa}{dz} = m P_{m-1}^{\kappa+1}, \quad P_m^\kappa(z) = \frac{m!}{(\kappa)_m} C_m^\kappa\left(\frac{z}{2}\right), \quad (\kappa)_m = \kappa(\kappa+1)\dots(\kappa+m-1).$$

Классические полиномы Гегенбауэра являются (с точностью до множителя) собственными функциями простейшего квантового гамильтониана Калоджеро–Сазерленда [2], [3], связанного с алгеброй Ли A_1 . Цель данной заметки состоит в том, чтобы показать, что тот же сдвиг по κ происходит и при дифференцировании обобщенных полиномов Гегенбауэра $P_{m,n}^\kappa(z_1, z_2)$, дающих квантовые собственные функции системы Калоджеро–Сазерленда для алгебры Ли A_2 [4]–[8],

$$\Delta^\kappa P_{m,n}^\kappa = \varepsilon_{m,n}(\kappa) P_{m,n}^\kappa(z_1, z_2),$$

где

$$\begin{aligned} P_{m,n}^\kappa &= z_1^m z_2^n + \text{младшие члены}, \\ \Delta^\kappa &= (z_1^2 - 3z_2)\partial_{z_1}^2 + (z_2^2 - 3z_1)\partial_{z_2}^2 + (z_1 z_2 - 9)\partial_{z_1}\partial_{z_2} + (3\kappa+1)(z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2}), \\ \varepsilon_{m,n}(\kappa) &= m^2 + n^2 + mn + 3\kappa(m+n). \end{aligned}$$

Конкретно, мы докажем следующие формулы:

$$\frac{\partial P_{m,n}^\kappa}{\partial z_1} = m P_{m-1,n}^{\kappa+1} + A_{m,n}(\kappa) P_{m-2,n-1}^{\kappa+1} + B_{m,n}(\kappa) P_{m,n-2}^{\kappa+1}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_{m,n}^\kappa}{\partial z_2} = n P_{m,n-1}^{\kappa+1} + A_{n,m}(\kappa) P_{m-1,n-2}^{\kappa+1} + B_{n,m}(\kappa) P_{m-2,n}^{\kappa+1}, \quad (2)$$

* Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Oviedo, Oviedo, Spain

† Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.

E-mail: perelomo@dftuz.unizar.es

где

$$\begin{aligned} A_{m,n}(\kappa) &= \frac{m(m-1)n(m+n+\kappa-1)(m+n+\kappa)}{(m+\kappa-1)(m+\kappa)(m+n+2\kappa-1)(m+n+2\kappa)}, \\ B_{m,n}(\kappa) &= -\frac{n(n-1)(m+n+\kappa)}{(n+\kappa-1)(n+\kappa)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Сначала рассмотрим формулу (1). Ее доказательство дается по индукции по второму квантовому числу. Производящие функции для полиномов Джека $P_{m,0}^\kappa$, как известно, выражаются формулами [9]

$$(1 - z_1 t + z_2 t^2 - t^3)^{-\kappa} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\kappa)_m}{m!} P_{m,0}^\kappa t^m. \quad (4)$$

Дифференцируя это выражение, убеждаемся в справедливости (1) при $n = 0$. С другой стороны, рекуррентные соотношения для обобщенных полиномов Гегенбауэра [7] можно использовать для того, чтобы выразить $P_{m,n}^\kappa$ через полиномы с меньшими n :

$$P_{m,n}^\kappa = z_2 P_{m,n-1}^\kappa - \tilde{a}_{m,n-1}(\kappa) P_{m-1,n-1}^\kappa - c_{n-1}(\kappa) P_{m+1,n-2}^\kappa, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{m,n}(\kappa) &= \frac{m(n+m+\kappa)(m-1+2\kappa)(n+m-1+3\kappa)}{(m+\kappa)(m-1+\kappa)(n+m+2\kappa)(n+m-1+2\kappa)}, \\ c_n(\kappa) &= \frac{n(n-1+2\kappa)}{(n+\kappa)(n-1+\kappa)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференцируя (5) по z_1 в предположении, что формула (1) верна, когда второе квантовое число меньше чем n , и применяя рекуррентное соотношение (5), чтобы избавиться от остающихся множителей z_2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{m,n}^\kappa}{\partial z_1} &= m P_{m-1,n}^{\kappa+1} + \\ &+ [A_{m,n-1}(\kappa) \tilde{a}_{m-2,n-2}(\kappa+1) - A_{m-1,n-1}(\kappa) \tilde{a}_{m,n-1}(\kappa)] P_{m-3,n-2}^{\kappa+1} + \\ &+ [A_{m,n-1}(\kappa) + m \tilde{a}_{m-1,n-1}(\kappa+1) - (m-1) \tilde{a}_{m,n-1}(\kappa)] P_{m-2,n-1}^{\kappa+1} + \\ &+ [B_{m,n-1}(\kappa) - (m+1) c_{n-1}(\kappa) + m c_{n-1}(\kappa+1)] P_{m,n-2}^{\kappa+1} + \\ &+ [B_{m,n-1}(\kappa) c_{n-3}(\kappa+1) - B_{m+1,n-2}(\kappa) c_{n-1}(\kappa)] P_{m+1,n-4}^{\kappa+1} + \\ &+ [-\tilde{a}_{m,n-1}(\kappa) B_{m-1,n-1}(\kappa) + \tilde{a}_{m,n-3}(\kappa+1) B_{m,n-1}(\kappa) + \\ &+ A_{m,n-1}(\kappa) c_{n-2}(\kappa+1) - A_{m+1,n-2}(\kappa) c_{n-1}(\kappa)] P_{m-1,n-3}^{\kappa+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Явным образом используя (3) и (6), находим

$$\begin{aligned} A_{m,n-1}(\kappa) \tilde{a}_{m-2,n-2}(\kappa+1) - A_{m-1,n-1}(\kappa) \tilde{a}_{m,n-1}(\kappa) &= 0, \\ B_{m,n-1}(\kappa) c_{n-3}(\kappa+1) - B_{m+1,n-2}(\kappa) c_{n-1}(\kappa) &= 0, \\ -\tilde{a}_{m,n-1}(\kappa) B_{m-1,n-1}(\kappa) + \tilde{a}_{m,n-3}(\kappa+1) B_{m,n-1}(\kappa) + \\ + A_{m,n-1}(\kappa) c_{n-2}(\kappa+1) - A_{m+1,n-2}(\kappa) c_{n-1}(\kappa) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} A_{m,n-1}(\kappa) + m\tilde{a}_{m-1,n-1}(\kappa+1) - (m-1)\tilde{a}_{m,n-1}(\kappa) &= A_{m,n}(\kappa), \\ B_{m,n-1}(\kappa) - (m+1)c_{n-1}(\kappa) + mc_{n-1}(\kappa+1) &= B_{m,n}(\kappa), \end{aligned} \quad (9)$$

что и устанавливает требуемый результат. Доказательство равенства (2), в котором используется подобное (5) рекуррентное соотношение (см. [7]), полностью аналогично. В заключение хотелось бы упомянуть, что подход, развитый в данной заметке, можно использовать также в случае A_n . Мы надеемся вернуться к этой проблеме в будущем.

Благодарности. Мы признательны профессору М. Лоренте за интересные обсуждения. Один из авторов (А.М.П.) хотел бы поблагодарить Физический факультет Университета Овьедо за гостеприимство во время пребывания там в качестве Visiting Professor.

Список литературы

- [1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [2] F. Calogero. J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419–436.
- [3] B. Sutherland. Phys. Rev. A. 1972. V. 4. P. 2019–2021.
- [4] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov. Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313–404.
- [5] A. M. Perelomov. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. L31–L37.
- [6] A. M. Perelomov, E. Ragoucy, Ph. Zaugg. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. L559–L565.
- [7] A. M. Perelomov. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 8563–8576.
- [8] A. M. Perelomov. Quantum integrable systems and special functions. In: Proc. Clausthal Conference 1999, “Lie Theory and Its Applications in Physics-III”. Eds. H.-D. Doebner, V. K. Dobrev, J. Hilgert. Singapore: World Scientific, 2000. P. 139–154.
- [9] H. Jack. Proc. Roy. Soc. Edinb. A. 1970. V. 69. P. 1–18.

Поступила в редакцию 25.X.2001 г.