Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Переломов, Волчок Ковалевской. Элементарный подход, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 2, 197–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:51:07

© 2002 г.

А. М. Переломов*

ВОЛЧОК КОВАЛЕВСКОЙ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДХОД

Цель данной заметки – дать элементарное и краткое решение уравнений движения волчка Ковалевской. Для этого мы используем некоторые результаты оригинальных работ Ковалевской, Шёттера и Вебера, а также принадлежащее автору представление Лакса.

Памяти Юргена Мозера

1. Волчок Ковалевской [1] является одним из замечательных примеров интегрируемых систем. Это волчок, главные моменты инерции которого J_1, J_2, J_3 удовлетворяют соотношениям

$$J_1 = J_2 = 2J_3 = J, \quad (1)$$

а центр масс лежит в экваториальной плоскости тела (для простоты мы в дальнейшем полагаем $J = 1$). Динамическими переменными являются компоненты m_1, m_2, m_3 момента импульса и компоненты n_1, n_2, n_3 вектора центра масс в системе, связанной с главными осями тела.

Данная система является гамильтоновой относительно пуассоновой структуры, связанной с алгеброй Ли $e(3)$ движений трехмерного евклидова пространства,

$$\{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} m_k, \quad \{m_i, n_j\} = \varepsilon_{ijk} n_k, \quad \{n_i, n_j\} = 0, \quad (2)$$

где ε_{ijk} – стандартный полностью кососимметричный тензор.

Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + 2m_3^2 - n_1), \quad (3)$$

и уравнения движения выглядят как (точка означает производную по времени)

$$\dot{m}_j = \{H, m_j\}, \quad \dot{n}_j = \{H, n_j\}, \quad (4)$$

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия; Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Oviedo, Oviedo, Spain.
E-mail: perelomo@dftuz.unizar.es

или в явном виде

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= m_2 m_3, & 2\dot{m}_2 &= -(2m_3 m_1 + n_3), & 2\dot{m}_3 &= n_2, \\ \dot{n}_1 &= 2m_3 n_2 - m_2 n_3, & \dot{n}_2 &= m_1 n_3 - 2m_3 n_1, & \dot{n}_3 &= m_2 n_1 - m_1 n_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что вектор угловой скорости имеет вид

$$(p, q, r) = (m_1, m_2, 2m_3). \quad (6)$$

В знаменитой работе [1] Ковалевской удалось проинтегрировать эти уравнения в терминах абелевых функций двух переменных. Подход Ковалевской был позднее упрощен Шёттером [2]. Отметим также работу Колосова [3], в которой эта задача была сведена к задаче о движении точки на плоскости в потенциальном поле.

Прошло столетие, и волчок Ковалевской снова привлек к себе интерес. В работе [4] он был рассмотрен как проекция волчка Эйлера. Этот подход дает как объяснение знаменитому соотношению (1), так и естественное многомерное интегрируемое обобщение такой системы.

В работах [5], [6] были найдены нетривиальные редукции, дающие эллиптические решения для волчка Ковалевской. В работе [7] (см. также [8] и приведенную там библиографию) были построены переменные действие–угол для этой задачи и обнаружена пуассонова коммутативность переменных s_1 и s_2 . Заметим, что именно эти переменные возникают при рассмотрении волчка Ковалевской как проекции волчка Эйлера.

Авторы ряда работ (см. [9]–[12]) использовали алгебро-геометрический подход к данной задаче. К сожалению, этот подход очень сложен и к настоящему времени в его рамках воспроизведена только некоторая часть исходных результатов для волчка Ковалевской. Например, представление Лакса со спектральным параметром [9], [11] дает спектральную кривую рода три и соответственно абелевы функции трех переменных, а не двух, как в оригинальной работе Ковалевской [1]. Даже в простейшем случае $(m, n) = 0$ провести аналогию между двумя такими подходами весьма сложно [12]. Поэтому, по мнению автора, элементарный и естественный подход Ковалевской–Шёттера остается более адекватным для рассматриваемой задачи.

2. Следуя [1] и [2], сначала напомним, что уравнения (5) имеют четыре интеграла движения:

$$H_1 = 2H = m_1^2 + m_2^2 + 2m_3^2 - n_1 = h_1, \quad (7)$$

$$\tilde{H}_2 = \xi_+ \xi_- = k^2, \quad (8)$$

$$C_3 = (m, n) = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = c_3, \quad (9)$$

$$C_4 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = c_4, \quad (10)$$

где

$$\xi_{\pm} = m_{\pm}^2 + n_{\pm}, \quad m_{\pm} = (m_1 \pm im_2), \quad n_{\pm} = (n_1 \pm in_2). \quad (11)$$

Заметим, что C_3 и C_4 являются функциями Казимира, а уравнения (9), (10) определяют четырехмерное симплектическое многообразие $\mathcal{M}_c$ – орбиту коприсоединенного представления группы Ли $E(3)$ (группы движений трехмерного евклидова пространства).

Интегрирование уравнений (5) состоит из нескольких шагов.

3. Начнем с представления Лакса [4], описывающего волчок Ковалевской как проекцию волчка Эйлера,

$$\begin{aligned}\dot{L}_2 &= [L_2, M_2], \\ L_2 &= -A(2\hat{m}^2 + (\gamma \otimes n + n \otimes \gamma))A, \\ M_2 &= -A\hat{m}A,\end{aligned}\tag{12}$$

где

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} 0 & m_3 & -m_2 \\ -m_3 & 0 & m_1 \\ m_2 & -m_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (1, 0, 0), \quad n = (n_1, n_2, n_3),\tag{13}$$

$$\text{tr } L_2 = 2H_1 = 4H, \quad \det L_2 = H_2 = H_1^2 - \tilde{H}_2.\tag{14}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\det(sI - L_2) &= sP_2(s), \quad P_2(s) = s^2 - 2H_1s + H_2, \\ H_1 &= h_1, \quad H_2 = h_2, \quad h_2 = h_1^2 - k^2.\end{aligned}\tag{15}$$

Для волчка Ковалевской уравнения движения содержат как квадратичные, так и линейные члены по динамическим переменным $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$. Отсюда следует, что некоторые из этих переменных, являясь мероморфными функциями времени t , имеют полюсы второго порядка по t .

Постараемся найти такую замену переменных, чтобы уравнения движения содержали только квадратичные члены. Этого можно достичь исключением переменных n_1 и n_2 .

Из уравнений (7)–(10) следуют два линейных уравнения на переменные n_1 и n_2

$$\begin{aligned}m_1n_1 + m_2n_2 &= c_3 - m_3n_3, \\ (m_1^2 - m_2^2)n_1 + 2m_1m_2n_2 &= \frac{1}{2}(n_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)^2 + k^2 - c_4).\end{aligned}\tag{16}$$

Используя их, мы можем исключить n_1 и n_2 из уравнений

$$2H_1 = 2h_1, \quad H_2 = h_2.\tag{17}$$

При этом обнаруживается, что левые части этих уравнений становятся квадратичными формами, если ввести новые переменные¹⁾ $f = (f_1, f_2, f_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$, где

$$f_1 = \frac{1}{m_2}, \quad f_2 = \frac{m_1}{m_2}, \quad f_3 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_2},\tag{18}$$

$$g_1 = 2\frac{m_3}{m_2}, \quad g_2 = \frac{n_3}{m_2}, \quad g_3 = -\frac{2}{m_2}((m_1^2 + m_2^2)m_3 + m_1n_3).\tag{19}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}2H_1 &= S_1(f) + T_1(g), \\ H_2 &= S_2(f) + T_2(g),\end{aligned}\tag{20}$$

¹⁾Заметим, что эти переменные уже использовались в работах [1] и [2].

где

$$S_1 = \frac{1}{2}((f_3 + h_1 f_1)^2 - 4c_3 f_1 f_2 - (c_4 + h_2) f_1^2 - 4h_1 f_2^2), \quad (21)$$

$$S_2 = -2c_3(f_3 + h_1 f_1) f_2 - (c_4 + h_2) f_2^2 - c_3^2 f_1^2, \quad (22)$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(-g_1 g_3 + g_2^2), \quad (23)$$

$$T_2 = \frac{1}{4}((h_1 g_1 - g_3)^2 - (c_4 + h_2) g_1^2 + 4c_3 g_1 g_2). \quad (24)$$

Из (20) следует, что величины $S_1(f)$ и $S_2(f)$ можно рассматривать как естественную проекцию двух нетривиальных интегралов движения $2H_1$ и H_2 ,

$$\pi: 2H_1 \rightarrow S_1(f), \quad \pi: H_2 \rightarrow S_2(f). \quad (25)$$

Поэтому примем их за новые динамические переменные. Естественно также записать (аналогично (15)) выражение

$$\mathcal{F}(s, f) = s^2 - S_1(f) s + S_2(f) \quad (26)$$

и рассмотреть уравнение

$$\mathcal{F}(s, f) = 0. \quad (27)$$

Корни s_1 и s_2 уравнения (27) являются знаменитыми переменными Ковалевской

$$s_1 + s_2 = S_1, \quad s_1 s_2 = S_2. \quad (28)$$

Как было показано в работе [7], переменные s_1 и s_2 коммутируют относительно скобки Пуассона,

$$\{s_1, s_2\} = 0, \quad \{S_1, S_2\} = 0. \quad (29)$$

Другое свойство этих переменных можно записать как

$$\{T_1, T_2\} = 0, \quad 2\{H_1, S_2\} = \{H_2, S_1\}. \quad (30)$$

Таким образом, имеется также однопараметрическое семейство переменных $S_1(\lambda) = S_1 + 2\lambda H_1$ и $S_2(\lambda) = S_2 + \lambda H_2$, коммутирующих относительно скобки Пуассона,

$$\{S_1(\lambda), S_2(\lambda)\} = 0. \quad (31)$$

Заметим, что функции f_j , g_k не являются независимыми, но удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} f_1 f_3 - f_2^2 &= 1, \\ f_1 g_3 + 2f_2 g_2 + f_3 g_1 &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Эти соотношения являются стандартными для кокасательного расслоения двумерного двулистного гиперboloида. Итак, после замены переменных мы получили динамическую систему на двумерном двулистном гиперboloиде.

В новых переменных уравнения движения (5) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{f}_1 &= \frac{1}{2}(f_1 g_2 + f_2 g_1), \\ \dot{f}_2 &= -\frac{1}{2}(f_1 g_3 + f_2 g_2) = \frac{1}{4}(-f_1 g_3 + f_3 g_1), \\ \dot{f}_3 &= -\frac{1}{2}(f_2 g_3 + f_3 g_2)\end{aligned}\quad (33)$$

и

$$\begin{aligned}\dot{g}_1 &= c_3 f_1^2 + h_1 f_1 f_2 - f_2 f_3, \\ \dot{g}_2 &= \frac{1}{2} \gamma f_1^2 + c_3 f_1 f_2 + \frac{1}{2} f_3^2, \\ \dot{g}_3 &= -c_3(f_1 f_3 + 2 f_2^2) - h_1 f_2 f_3 - \gamma_4 f_1 f_2,\end{aligned}\quad (34)$$

где

$$\gamma_4 = c_4 - k^2 = c_4 + h_2 - h_1^2.$$

Отметим также следующие полезные уравнения:

$$\ddot{f}_1 = \nu f_1 + \frac{1}{2}(h_1 f_1 + f_3), \quad (35)$$

$$\ddot{f}_2 = \nu f_2 + \left(h_1 f_2 + \frac{1}{2} c_3 f_1\right), \quad (36)$$

$$\ddot{f}_3 = \nu f_3 + \frac{1}{2}(h_1 f_3 - 2 c_3 f_2 - (c_4 - k^2) f_1), \quad (37)$$

$$\nu = h_1 - S_1. \quad (38)$$

Можно показать, что уравнения движения для f_1, f_2, f_3 имеют лаксов вид

$$\dot{L} = [L, M], \quad (39)$$

где

$$L = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ -f_3 & -f_2 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -g_2 & g_1 \\ -g_3 & g_2 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Уравнения для g_1, g_2, g_3 имеют вид

$$\dot{M} = [L, N], \quad (41)$$

где

$$N = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} c_3 f_1 + 2 h_1 f_2 & f_3 + h_1 f_1 \\ \gamma_4 f_1 + 2 c_3 f_2 - h_1 f_3 & -(c_3 f_1 + 2 h_1 f_2) \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Рассмотрим теперь задачу Клебша [13] (см. также [14]–[17]), т.е. задачу о движении твердого тела в идеальной жидкости. Динамическими переменными здесь являются компоненты импульса p_1, p_2, p_3 и момента импульса l_1, l_2, l_3 , а в специальном случае они удовлетворяют также дополнительному условию $(l, p) = 0$. Эта система является

гамильтоновой по отношению к пуассоновой структуре для алгебры Ли $e(3)$ движений трехмерного евклидова пространства

$$\{l_i, l_j\} = \varepsilon_{ijk} l_k, \quad \{l_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad (43)$$

где ε_{ijk} — стандартный полностью кососимметричный тензор.

Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 l_j^2 + \sum_{j,k=1}^3 B_{jk} p_j p_k \right), \quad (44)$$

где величины B_{jk} — константы. Можно проверить, что уравнения движения в этом случае имеют тот же вид, что и уравнения (33), (34), и что второе уравнение в (32) эквивалентно условию $(l, p) = 0$.

Заметим, что для диагональной матрицы B эта задача была решена Вебером [18] в терминах абелевых функций двух переменных.

4. Последний шаг состоит в сведении нашей задачи к случаю диагональной матрицы B . Для этого удобно использовать важное тождество, открытое Шёттером [2]:

$$-2s\mathcal{F}(s) = Q_2^2(s) - P_3(s)Q_1(s), \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} P_3(s) &= sP_2(s) + c_4s - 2c_3^2, \\ P_2(s) &= s^2 - 2h_1s + h_2, \quad P_5(s) = P_3(s)P_2(s), \\ Q_1(s) &= f_1^2s - 2f_2^2, \\ Q_2(s) &= s^2f_1 - (f_3 + h_1f_1)s - 2c_3f_2. \end{aligned} \quad (46)$$

Вместо переменных f_j, g_k введем переменные x_j, y_k по формулам²⁾

$$x_j = \sqrt{(s_1 - a_j)(s_2 - a_j)}, \quad (47)$$

$$y_j = \frac{x_k x_l}{s_1 - s_2} \left(\frac{\sqrt{P_5(s_1)}}{(s_1 - a_k)(s_1 - a_l)} - \frac{\sqrt{P_5(s_2)}}{(s_2 - a_k)(s_2 - a_l)} \right), \quad (48)$$

где a_j — корень уравнения $P_3(s) = 0$ и $\{j, k, l\}$ — циклическая перестановка множества $\{1, 2, 3\}$.

Из (45)–(48) получаем выражения для f_j через x_k

$$f_1 = -i \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{2a_j}}{P_3'(a_j)} x_j, \quad (49)$$

$$f_2 = i \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{a_k a_l}}{P_3'(a_j)} x_j, \quad (50)$$

$$f_3 = -h_1 f_1 - 2i \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{2a_j}}{P_3'(a_j)} (a_1 + a_2 + a_3 - a_j) x_j \quad (51)$$

²⁾ Формулы такого типа, введенные Вейерштрассом, очень полезны в теории абелевых функций.

и

$$g_1 = -i \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{2a_j}}{P'_3(a_j)} y_j, \quad (52)$$

$$g_2 = i \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{a_k a_l}}{P'_3(a_j)} y_j, \quad (53)$$

$$g_3 = -h_1 g_1 - 2i \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{2a_j}}{P'_3(a_j)} (a_1 + a_2 + a_3 - a_j) y_j. \quad (54)$$

Заметим также, что

$$Q_2(a_j) = i\sqrt{2a_j}x_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (55)$$

Легко видеть, что переменные x_j, y_k удовлетворяют уравнениям движения для специального случая Клебша $((l, p) = 0)$ с диагональной матрицей B . Таким образом, можно использовать решение Вебера [18], задаваемое формулами

$$x_j = x_{j0} \frac{\theta_{j4}(u_1, u_2)}{\theta_0(u_1, u_2)}, \quad y_j = y_{j0} \frac{\theta_j(u_1, u_2)}{\theta_0(u_1, u_2)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (56)$$

где x_{j0} и y_{j0} — константы, u_1 и u_2 — линейные функции t , а $\theta_0(u_1, u_2)$, $\theta_j(u_1, u_2)$ и $\theta_{j4}(u_1, u_2)$ — стандартные тэта-функции с полупелыми тэта-характеристиками

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (u_1, u_2), & \theta_2 &= \theta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (u_1, u_2), & \theta_3 &= \theta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (u_1, u_2), \\ \theta_{14} &= \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (u_1, u_2), & \theta_{24} &= \theta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (u_1, u_2), & \theta_{34} &= \theta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (u_1, u_2), \\ \theta_0 &= \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (u_1, u_2). \end{aligned} \quad (57)$$

Эти функции определяются стандартными формулами

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} (u_1, u_2) &= \\ &= \sum_{n_j, n_k = -\infty}^{\infty} \exp \left\{ i\pi \left[\tau_{jk} \left(n_j + \frac{\varepsilon_j}{2} \right) \left(n_k + \frac{\varepsilon_k}{2} \right) + \left(n_j + \frac{\varepsilon_j}{2} \right) (2u_j + \delta_j) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (58)$$

где τ_{jk} — матрица периодов, связанная с алгебраической кривой

$$y^2 = P_5(x). \quad (59)$$

Таким образом, формулы (18), (19), (49)–(54) и (56)–(59) дают явное решение для волчка Ковалевской (подробности см. в [1], [2], [18]).

5. Аналогично подходу Вейерштрасса для геодезических на эллипсоиде [19] мы можем получить еще одно важное тождество,

$$\mathcal{F}(s)\mathcal{H}(s) - \mathcal{G}^2(s) = 2P_5(s), \quad (60)$$

где

$$\mathcal{F}(s) = s^2 - S_1s + S_2, \quad (61)$$

$$\mathcal{G}(s) = \dot{S}_1s - \dot{S}_2, \quad (62)$$

$$\mathcal{H}(s) = 2(s^3 - b_1s^2 + b_2s - b_3), \quad (63)$$

$$P_5(s) = (s^3 - 2h_1s^2 + (c_4 + h_2)s - 2c_3^2)(s^2 - 2h_1s + h_2) \quad (64)$$

и

$$\begin{aligned} b_1 &= -S_1 + 4h_1, \\ b_2 &= S_1^2 - S_2 - 4h_1S_1 + 2h_2 + 4h_1^2 + c_4, \\ b_3 &= -S_1^3 + 4h_1S_1^2 + 2S_1S_2 - 4h_1S_2 - (2h_2 + 4h_1^2 + c_4)S_1 - \\ &\quad - \frac{1}{2}\dot{S}_1^2 + 4h_1h_2 + 2h_1c_4 + 2c_3^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Из тождества (60) легко получить уравнения движения в стандартной форме Абеля–Якоби

$$\dot{s}_1 = i(s_1 - s_2)^{-1}\sqrt{2P_5(s_1)}, \quad \dot{s}_2 = i(s_2 - s_1)^{-1}\sqrt{2P_5(s_2)}, \quad (66)$$

а также представление Лакса со спектральным параметром s в терминах (2×2) -матриц:

$$\dot{\mathcal{L}}(s) = [\mathcal{L}(s), \mathcal{M}(s)], \quad (67)$$

$$\mathcal{L}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{G} & \mathcal{F} \\ -\mathcal{H} & -\mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{F}^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

где

$$\mathcal{C} = (s - 2T_1)\mathcal{F}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{H}(s), \quad \mathcal{D} = -\mathcal{G}(s). \quad (70)$$

6. В заключение данной статьи я хотел бы высказать предположение, что подобные результаты верны и для n -мерного обобщения волчка Ковалевской, приведенного в работе [4].

Основной результат этой заметки об эквивалентности системы Ковалевской и специального случая системы Клебша был получен в 1983г. в ходе подготовки обзора о движении твердого тела вокруг закрепленной точки [16]. Позднее я имел возможность обсуждать задачу Ковалевской и другие задачи классической механики с профессором Ю. Мозером. Эти обсуждения оказали огромное влияние на мою точку зрения на задачи классической механики в целом. В частности, профессор Мозер подчеркивал важную роль факторизации полинома Ковалевской $P_5(x)$ на полиномы $P_3(x)$ и $P_2(x)$. К сожалению, простого объяснения этого факта нет до сих пор.

Благодарности. Я глубоко признателен профессору Ю. Мозеру за плодотворные обсуждения. Я благодарен также В. З. Енольскому, А. П. Веселову и рецензенту за их замечания. Наконец, я хотел бы поблагодарить Физический факультет Университета Овьедо за гостеприимство.

Список литературы

- [1] *S. Kovalevskaya.* Acta Math. 1889. V. 12. P. 177–232.
- [2] *F. Kötter.* Acta Math. 1893. V. 17. P. 209–263.
- [3] *G. V. Kolosov.* Math. Ann. 1902. V. 56. P. 265–272.
- [4] *A. M. Perelomov.* Commun. Math. Phys. 1981. V. 81. P. 239–241.
- [5] *V. Z. Enolsky.* Phys. Lett. A. 1984. V. 100. P. 463–466.
- [6] *В. З. Энольский.* ДАН СССР. 1984. Т. 278. № 2. С. 305–308.
- [7] *С. П. Новиков, А. П. Веселов.* Тр. МИАН. 1984. Т. 165. С. 49–61.
- [8] *H. Dullin, P. Richter, A. P. Veselov.* Regular Chaot. Dynam. 1998. V. 3. P. 18–31.
- [9] *A. G. Reyman, M. A. Semenov–Tian-Shansky.* Lett. Math. Phys. 1987. V. 14. P. 55–61.
- [10] *M. Adler, P. van Moerbeke.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 113. P. 659–700.
- [11] *A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov–Tian-Shansky.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 321–354.
- [12] *D. G. Markushevich.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 2125–2135.
- [13] *A. Clebsch.* Math. Ann. 1871. V. 3. P. 238–262.
- [14] *Jü. Moser.* Geometry of quadrics and spectral theory. In: Differential Geometry. Proc. of the International Chern Symposium, Berkeley, 1979. Eds. W. Y. Hsiang et al. New York: Springer, 1980. P. 147–188.
- [15] *А. М. Переломов.* Функци. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. № 2. С. 83–85.
- [16] *A. M. Perelomov.* Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras. Motion of rigid body around fixed point. Preprint ITEP-147, 1983.
- [17] *A. M. Perelomov.* Regular Chaot. Dynam. 2000. V. 5. P. 89–91.
- [18] *H. Weber.* Math. Ann. 1879. V. 14. P. 173–206.
- [19] *K. Weierstrass.* Monatsberichte Akad. Wiss. zu Berlin. 1861. P. 986.

Поступила в редакцию 12.X.2001 г.,
после доработки 16.XI.2001 г.