Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Шалаев, Симметрия Крамерса–Ванье и S -дуальность в двумерной теории $g\Phi^4$, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 2, 206–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:52:54

СИММЕТРИЯ КРАМЕРСА–ВАНЬЕ И S -ДУАЛЬНОСТЬ В ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ $g\Phi^4$

Показано, что точная бета-функция двумерной теории $g\Phi^4$ имеет две дуальные симметрии, а именно симметрию Крамерса–Ванье $d(g)$ и симметрию сильной–слабой связи, или S -дуальность $f(g)$, соединяющая области сильной и слабой связей, лежащие выше и ниже фиксированной точки g^* . Получены явные представления для функций $d(g)$ и $f(g)$. Преобразование S -дуальности $f(g)$ позволяет приближенно вычислить вклады фейнмановских диаграмм высших порядков, используя высокотемпературные разложения. С математической точки зрения предложенная схема является сильно неустойчивой. Тем не менее приближенные численные значения ренормированной константы связи g^* , найденные из уравнений дуальности, находятся в хорошем согласии с имеющимися численными результатами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что двумерная модель Изинга (2D МИ), как и некоторые другие решеточные спиновые модели, обладает дуальной симметрией Крамерса–Ванье (КВ), играющей важную роль в статистической механике, квантовой теории поля [1]–[3] и теории суперструн [4]. Самодуальность изотропной МИ означает, что существует точное соответствие между высоко- и низкотемпературными разложениями статистической суммы модели [3]. На языке трансфер-матрицы $\hat{T}$ симметрия КВ означает инвариантность $\hat{T}$ -матрицы в точке фазового перехода $T = T_c$. Если предположить, что температура Кюри единственна, то из условия самодуальности легко находится точное значение для T_c . Замечательно, что симметрия КВ имеет место и для других, более сложных спиновых систем, в том числе и моделей с “замороженным” беспорядком (см. [3], [5]).

В работах [6], [7] симметрия КВ была распространена на случай непрерывной континуальной теоретико-полевой модели $g\Phi^4$ и применена в области больших констант связи $g > g^*$, т.е. выше фиксированной точки.

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия; Национальный институт ядерной физики, Павия, Италия; Институт физики твердого тела Макса Планка, Штутгарт, Германия. E-mail: shalaev@izing.ioffe.rssi.ru

В настоящее время бета-функция $\beta(g)$ двумерной модели известна в пятипетлевом приближении [8]. Она была вычислена в рамках стандартной теории возмущений для фиксированной размерности пространства $d = 2$ [9], [10]. Помимо приближения теории возмущений имеется также разложение для бета-функции по степеням обратной константы связи g , полученное из высокотемпературных разложений [6], [7]. Из квантовой теории поля и статистической механики хорошо известно, что разложения сильной связи представляют собой решеточные высокотемпературные разложения; другими словами, решетка используется как технический инструмент для рассмотрения теории поля с обрезанием (см. [11]–[13] и имеющиеся там ссылки).

Отметим, что вычисления бета-функций представляют большой интерес в статистической физике и квантовой теории поля. В частности, они содержат важную информацию о ренормированных константах связи (например, g^*), которые необходимы для построения уравнения состояния в 2D МИ. Дуальность накладывает также некоторые важные ограничения на точную бета-функцию [14].

В настоящей работе мы изучаем дуальные симметрии полевой модели 2D $g\Phi^4$, рассматриваемой как неинтегрируемая непрерывная версия точно решаемой решеточной 2D МИ. Показано, что имеются две дуальные симметрии, а именно симметрия КВ $d(g)$ и симметрия сильной–слабой связи $f(g)$ (S -дуальность). Наибольший интерес представляет, конечно, вычисление функции $f(g)$, связывающей области сильной и слабой связей, т.е. области $g > g^*$ и $g < g^*$.

S -дуальность в принципе позволяет вычислить неизвестные многопетлевые вклады (шести-, семипетлевой и т.д.) в функцию $\beta(g)$ на основе высокотемпературных разложений [13], [14].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводятся основные обозначения и получены корреляционная длина и бета-функция. В разделе 3 определяется преобразование КВ $\tilde{g} = d(g)$ для бета-функции, доказывается свойство ковариантности $\beta(d(g)) = d'(g)\beta(g)$ и приближенно вычисляется функция $d(g)$. В разделе 4 получено явное выражение для дуального преобразования $f(g)$. Уравнения дуальности применяются для вычисления ренормированной константы связи g^* . В разделе 5 уравнения S -дуальности используются для нахождения высших порядков в бета-функции, в частности шестипетлевого приближения. Обсуждается математическая устойчивость предложенного алгоритма. В разделе 6 содержатся обсуждения и заключительные замечания.

2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ДЛИНА И КОНСТАНТА СВЯЗИ

Рассмотрим классический гамильтониан МИ в нулевом магнитном поле $\hbar$

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \quad (1)$$

определенный на квадратной решетке с периодическими граничными условиями, где запись $\langle i, j \rangle$ означает, что суммирование производится по всем парам ближайших соседей,

$\sigma_i = \pm 1$ – решеточные спиновые переменные, J – энергия взаимодействия спинов. Стандартная спиновая корреляционная функция имеет вид

$$G(\mathbf{R}) = \langle \sigma_{\mathbf{R}} \sigma_{\mathbf{0}} \rangle, \quad (2)$$

где $\langle \cdot \rangle$ обозначает обычное гиббсовское среднее.

Стандартное определение корреляционной длины в статистической механике и квантовой теории поля имеет вид [10], [11]

$$\xi^2 = \left. \frac{d \ln G(p)}{dp^2} \right|_{p=0}. \quad (3)$$

Величину ξ^2 удобно выразить через сферические моменты спиновой корреляционной функции [11]:

$$\mu_l = \sum_{\mathbf{R}} \left(\frac{R}{a} \right)^l G(\mathbf{R}), \quad (4)$$

где a – постоянная решетки, $l = 0, 1, 2, \dots$. Нетрудно видеть, что

$$\xi^2 = \frac{\mu_2}{2d\mu_0}, \quad (5)$$

где d – размерность пространства (в данной статье всегда $d = 2$).

Для того чтобы определить симметрию КВ в непрерывной квантовой теории поля, необходимо ввести определение *решеточной* константы связи g , эквивалентное стандартному, даваемому в ренормгрупповом подходе.

Ренормгрупповая константа связи g в теории $g\Phi^4$ тесно связана с четвертой производной свободной энергии Гельмгольца $\partial^4 F(T, m)/\partial m^4$ по параметру порядка $m = \langle \Phi \rangle$. Эта величина определяется следующим образом (см. [11]):

$$g(T, h) = -\frac{(\partial^2 \chi / \partial h^2)}{\chi^2 \xi^d} + 3 \frac{(\partial \chi / \partial h)^2}{\chi^3 \xi^d}, \quad (6)$$

где χ – однородная магнитная восприимчивость:

$$\chi = \int d\mathbf{R} G(\mathbf{R}). \quad (7)$$

Легко видеть, что величина $g(T, h)$, определенная в уравнении (6), есть просто стандартная 4-спиновая корреляционная функция, вычисленная при нулевых внешних импульсах. Перенормированная константа связи g_c в теории критических явлений определяется как двойной предел:

$$g_c = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow T_c} g(T, h). \quad (8)$$

Хорошо известно, что данные предельные переходы не коммутируют друг с другом, поэтому фиксированная точка g_c зависит от пути в плоскости термодинамических переменных (T, h) [11].

В данной работе нас главным образом будет интересовать константа связи на изохоре $g(T, h)|_{T>T_c, h=0}$ в неупорядоченной фазе и ее критическое значение [11]

$$g^* = \lim_{T \rightarrow T_c^+} g(T, h)|_{h=0} = - \frac{\partial^2 \chi / \partial h^2}{\chi^2 \xi^d} \Big|_{h=0}. \quad (9)$$

В отличие от известной работы [11], в которой применялось обозначение g_+^* , в данной статье используется более простое обозначение g^* для фиксированной точки модели.

3. СИММЕТРИЯ КРАМЕРСА–ВАНЬЕ

Известно, что преобразование КВ связывает переменные $\tilde{K}$ и K следующим образом [1]–[3]:

$$\operatorname{sh} 2\tilde{K} = \frac{1}{\operatorname{sh} 2K}, \quad K = J/T. \quad (10)$$

Ниже мы увидим, что вместо температуры удобнее иметь дело с новой переменной $s = e^{2K} \operatorname{th} K$.

Из определения преобразования КВ следует простой закон преобразования величины s : $\tilde{s} = 1/s$, где $\tilde{s}$ определяется через $\tilde{K}$ так же, как s определяется через K . Отсюда следует, что корреляционная длина в 2D МИ является самодуальной величиной, $\xi^2 = s/(1-s)^2$ [9], и она элементарно вычисляется из высокотемпературного разложения, т.е. из ряда по степеням $1/s$. Эти свойства 2D МИ хорошо известны [3], [9].

Теперь перейдем к вычислению функции Гелл-Мана–Лоу $\beta(g)$. С одной стороны, мы имеем

$$\xi \frac{ds(g)}{d\xi} = \frac{ds(g)}{dg} \beta(g), \quad (11)$$

где $s(g)$ по определению есть функция, обратная к $g(s)$, т.е. $g(s(g)) = g$, а бета-функция равна, как обычно, логарифмической производной константы связи g :

$$\xi \frac{dg}{d\xi} = \beta(g). \quad (12)$$

С другой стороны, известно [9], что

$$\xi \frac{ds}{d\xi} = \frac{2s(1-s)}{1+s}. \quad (13)$$

Из уравнений (11), (13) можно найти полезное представление для бета-функции через функцию $s(g)$:

$$\beta(g) = \frac{2s(g)(1-s(g))}{(1+s(g))(ds(g)/dg)}. \quad (14)$$

Из представления (14) следует, что бета-функция обращается в нуль в точке $g = g^*$, где $s(g^*) = 1$. Разумно предположить (но это не очевидно), что этот нуль g^* является простым. Тогда легко видеть, что производная бета-функции в фиксированной точке g^* или критический индекс ω , отвечающий за поправки к скейлингу [10], имеет вид $\omega = \beta'(g)|_{g=g^*} = 1$. Этот известный результат был получен около 30 лет назад в классической работе [15].

Тем не менее в данной теории есть серьезная проблема, состоящая в том, что этот известный результат противоречит конформной теории поля, предсказывающей для 2D МИ значение $\omega = 4/3$. Так, в замечательной монографии [10] стоит знак вопроса: “ $\omega = ?$ ” (см. также работы [6], [16]).

Основным в данном разделе является вопрос о том, как определить дуальную константу связи $\tilde{g}$ и дуальное преобразование $d(g)$. В работе [6] эти величины определяются следующим образом:

$$s(\tilde{g}) = \frac{1}{s(g)}, \quad \tilde{g} \equiv d(g) = s^{-1}\left(\frac{1}{s(g)}\right), \quad (15)$$

где $s^{-1}(x)$ служит для обозначения функции, обратной к $x = s(g)$. Легко видеть, что функция $d(g)$ совпадает со своей обратной: $d(d(g)) = g$, как и должно быть по определению для дуального преобразования (15), (10).

Теперь изучим симметричные свойства функции $\beta(g)$. Ниже будет показано, что при преобразовании КВ $g \rightarrow d(g)$ бета-функция преобразуется по формуле

$$\beta(d(g)) = d'(g)\beta(g). \quad (16)$$

Для доказательства этого утверждения вычислим величину $\beta(d(g))$. Формула (14) дает

$$\beta(d(g)) = \frac{2s(\tilde{g})(1 - s(\tilde{g}))}{(1 + s(\tilde{g}))(ds(\tilde{g})/d\tilde{g})}. \quad (17)$$

Используя выражение (15), мы приходим к соотношению

$$\beta(d(g)) = \frac{2s(g) - 2}{s(g)(1 + s(g))(ds(\tilde{g})/d\tilde{g})}. \quad (18)$$

Производную в правой части уравнения (18) нужно переписать через $s(g)$ и $d(g)$. Это нетрудно сделать, используя (15):

$$\frac{ds(\tilde{g})}{d\tilde{g}} = \frac{d}{d\tilde{g}} \frac{1}{s(g)} = -\frac{s'(g)}{s^2(g)} \frac{1}{d'(g)}. \quad (19)$$

Подставив правую часть уравнения (19) в (18), получим желаемое свойство симметрии (16).

В частности, свойство самодуальности модели позволяет найти фиксированную точку из уравнения дуальности $d(g^*) = g^*$, хотя вычисление $d(g)$ само по себе представляет трудную задачу.

Например, в грубом приближении для функции $s(g)$ имеем

$$s(g) \simeq \frac{2}{g} + \frac{24}{g^2} \simeq \frac{2}{g} \frac{1}{1 - 12/g} = \frac{2}{g - 12}. \quad (20)$$

Комбинируя найденную ашпроксиманту Паде и определение функции $d(g)$ (15), находим

$$d(g) = 4 \frac{3g - 35}{g - 12}. \quad (21)$$

Фиксированная точка, полученная из уравнения для неподвижной точки $d(g^*) = g^*$, является довольно грубым приближением: $g^* = 14$, тогда как недавние численные и аналитические оценки колеблются около значения $g^* = 14.69$ (см. [10], [17], [18] и имеющиеся там ссылки).

4. ДУАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ СИЛЬНОЙ–СЛАБОЙ СВЯЗИ

В предыдущих разделах мы рассматривали хорошо известную симметрию КВ. В частности, оказалось, что эта симметрия является следствием алгебраического представления весьма специального вида (14) для бета-функции. Ниже будет показано, что из этого представления следует также другая симметрия, а именно S -дуальность, хорошо известная в теории суперструн [4].

Эта симметрия представляет собой дуальную симметрию сильной–слабой связи. Таким образом, имея, скажем, несколько первых слагаемых высокотемпературного ряда, можно найти первые слагаемые ряда теории возмущений для бета-функции. Эта задача решается в настоящем и следующем разделах данной работы.

В настоящее время бета-функция теории $g\Phi^4$ известна в пятипетлевом приближении перенормированной теории возмущений [6] (четырёхпетлевые результаты см. в [9], [10]). С другой стороны, она известна в виде достаточно длинного отрезка ряда по степеням обратной константы связи; для наших целей нам достаточно ограничиться слагаемыми до g^{-6} [6]:

$$\beta_1(g) = 2g - 2g^2 + 1.432347241g^3 - 1.861532885g^4 + 3.164776688g^5 - 6.520837458g^6 + O(g^7), \quad (22)$$

$$\beta_2(g) = -2g + \frac{12}{\pi} - \frac{9}{\pi^2 g} + \frac{27}{\pi^3 g^2} + \frac{81}{8\pi^4 g^3} - \frac{3645}{16\pi^5 g^4} - \frac{15309}{32\pi^6 g^5} + \frac{2187}{64\pi^7 g^6} + O(g^{-7}). \quad (23)$$

Здесь индексы 1, 2 обозначают области слабой и сильной связей, соответственно. Главная задача этого раздела – вычислить дуальное преобразование $f(g)$, связывающее бета-функции в областях слабой и сильной связей $\beta_1(g)$ и $\beta_2(g)$ и имеющее естественное для дуальности ограничение $f[f(g)] = g$.

Удобно ввести следующие функции: $G_{1,2}(s)$ и $S_{1,2}(g)$. Здесь по определению $G_{1,2}(s)$ – константа связи g как функция переменной s , введенной в разделе 3, а функция $S_{1,2}(g) = G_{1,2}^{-1}(g)$ – обратная функция. Существенно, что в области слабой связи $s \in [0, 1]$, $g \in [0, g^*]$, в то время как в области сильной связи $s \in [0, 1]$, $g \in [g^*, \infty]$.

Из уравнения (14) нетрудно вычислить функции $S_1(g)$, $S_2(g)$ и обратные функции $G_1(s) = S_1^{-1}(g)$, $G_2(s) = S_2^{-1}(g)$ для обеих областей. Громоздкие вычисления, выполненные в среде “Mathematica 3.0” приводят к следующим формулам:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= s + s^2 + 0.3580868104s^3 - 0.1166327797s^4 - \\ &\quad - 0.1968226859s^5 - 0.1299831557s^6 + O(s^7), \\ S_1(g) &= g - g^2 + 1.6419131896g^3 - 3.09293317g^4 + \\ &\quad + 6.361881481g^5 - 13.78545095g^6 + O(g^7), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &s \in [0, 1], \quad g \in [0, g^*]; \\ G_2(s) &= \frac{3}{4\pi s} + \frac{9}{2\pi} - \frac{9s}{4\pi} + \frac{18s^2}{\pi} - \frac{108s^3}{\pi} + \\ &\quad + \frac{618s^4}{\pi} - \frac{3474s^5}{\pi} + \frac{19494s^6}{\pi} + O(s^7), \\ S_2(g) &= \frac{6}{8\pi g} + \frac{24 \cdot 3^2}{(8\pi g)^2} + \frac{264 \cdot 3^3}{(8\pi g)^3} + \frac{2976 \cdot 3^4}{(8\pi g)^4} + \frac{35136 \cdot 3^5}{(8\pi g)^5} + \\ &\quad + \frac{423680 \cdot 3^6}{(8\pi g)^6} + \frac{5149824 \cdot 3^7}{(8\pi g)^7} + \frac{63275520 \cdot 3^8}{(8\pi g)^8} + O(g^{-9}), \\ &s \in [0, 1], \quad g \in [g^*, \infty). \end{aligned} \quad (25)$$

Полученные формулы позволяют построить две различные ветви дуального преобразования $f_{12}(g)$ и $f_{21}(g)$, определенные в разных областях:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{21}(g)} &\equiv \frac{1}{G_2(S_1(g))} = \frac{4\pi g}{3} - \frac{28\pi g^2}{3} + 220.5059303g^3 - \\ &\quad - 1766.8145g^4 + 14816.94007g^5 - 127842.5955g^6, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &g \in [0, g^*], \quad f_{21}(g) \in [g^*, \infty]; \\ f_{12}(g) &\equiv G_1(S_2(g)) = \frac{3}{4\pi g} + \frac{63}{16\pi^2 g^2} + \frac{0.61714739472}{g^3} + \\ &\quad + \frac{0.9560453953}{g^4} + \frac{1.502156783}{g^5} + \frac{2.368311503}{g^6} + O(g^7), \\ &g \in [g^*, \infty), \quad f_{12}(g) \in [0, g^*]. \end{aligned} \quad (27)$$

Найденные выше функции похожи на инверсию $g \rightarrow 1/g$, но не столь просты.

Нетривиальный пример двумерных дираковских фермионов со случайной массой приведен в работе [19], где было обнаружено, что симметрия сильной–слабой связи ($\tilde{g} \rightarrow 1/g$) представляет собой действительно инверсию.

Полезно отметить, что преобразование $f(g)$ является самодуальным:

$$f_{12}(f_{21}(g)) = f_{21}(f_{12}(g)) \equiv g. \quad (28)$$

Более того, по определению симметрия сильной–слабой связи задает соотношение между бета-функциями в различных областях следующим образом:

$$\beta_2(g) = \frac{\beta_1(f_{12}(g))}{f'_{12}(g)}, \quad (29)$$

$$\beta_1(g) = \frac{\beta_2(f_{21}(g))}{f'_{21}(g)}. \quad (30)$$

Эти уравнения являются одним из основных результатов данной работы.

5. ВЫСШИЕ ПОРЯДКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Забавно, что выражение (27) так же сильно напоминает геометрическую прогрессию. Применяя аппроксиманту Паде в простейшей форме, получаем

$$f_{12}(g) \approx \frac{0.2387324146g^2 - 0.0745907136g + 0.0850867165}{g^3 - 1.983571753g^2 + 1.086109562g - 0.6919672492}, \quad (31)$$

$$g \in [g^*, \infty), \quad f_{12}(g) \in [0, g^*].$$

Уравнения сильной связи и S -дуальности полезны, в частности, для получения численных оценок для ренормированной константы связи

$$\begin{aligned} f_{12}(g^*) - g^* &= 0, & g^* &= 14.38, \\ \beta_2(g^*) &= 0, & g^* &= 14.63, \end{aligned} \quad (32)$$

которые находятся в хорошем согласии с современными оценками [13], [17], [18].

Идея вычисления более высоких порядков стандартной теории возмущений состоит в следующем. На основании вышеизложенного можно предположить, что функция $f_{12}(g)$ хорошо описывается уравнением (29). Поэтому разумно искать величину $\beta_1(g)$ из уравнения (29).

Разложение сильной связи для бета-функции хорошо известно (см. выше). Известна также и S -функция $f_{12}(g)$ с хорошей (как мы считаем) точностью. Поэтому мы ищем бета-функцию в области слабой связи в виде отрезка асимптотического ряда.

Предположим, что мы ищем бета-функцию в виде полинома седьмой степени (шестипетлевое приближение). Тогда в результате громоздких вычислений получаем

$$\begin{aligned}\beta_1(g) = & 2g - 2g^2 + 1.432347241g^3 - 1.861532885g^4 + \\ & + 3.164776688g^5 - 6.520837458g^6 - 331.454743g^7.\end{aligned}\quad (33)$$

Из этого выражения видно, что первые шесть членов разложения бета-функции совпадают с истинными. Было бы соблазнительно (но неверно!) рассматривать семипетлевой результат как точный. Дело в том, что функция $f_{12}(g)$ не является точной. Легко показать, что даже очень маленькие (численные) отклонения от истинной функции $f_{12}^{\text{exact}}(g)$ приводят к большим отклонениям для коэффициента при g^7 .

Проиллюстрируем это на простом примере. Предположим, что отклонение точной функции от приближенной имеет вид

$$f_{12}^{\text{exact}}(g) = \frac{0.2387324146g^2 - 0.0745907136g + 0.0850867165}{g^3 - 1.983571753g^2 + 1.086109562g - 0.6919672492} + \frac{b}{g^7}, \quad (34)$$

где b — неизвестный численный параметр. Прямой расчет показывает, что новый шестипетлевой коэффициент бета-функции сильно зависит от параметра b , который значительно изменяет предыдущий результат:

$$\begin{aligned}\beta_1(g) = & 2g - 2g^2 + 1.432347241g^3 - 1.861532885g^4 + 3.164776688g^5 - \\ & - 6.520837458g^6 + (-331.454743 + 271519.803807b)g^7.\end{aligned}\quad (35)$$

Так, если $b = 10^{-4}$, т.е. численное отличие от точной дуальной функции $f_{12}^{\text{exact}}(g)$ действительно мало, то вариация шестипетлевого коэффициента порядка 1.

Таким образом, предложенный в работе регулярный алгоритм вычисления фейнмановских диаграмм высоких порядков с помощью решеточных высокотемпературных разложений действительно работает. К сожалению, на практике этот метод очень трудно реализовать из-за его сильной неустойчивости.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе показано, что непрерывная двумерная модель $g\Phi^4$ действительно обладает двумя различными типами дуальной симметрии, а именно симметрией КВ и симметрией сильной–слабой связи, или S -дуальностью. Обе симметрии имеют общую алгебраическую основу, иными словами, они следуют из представления для бета-функции (14). Отметим, что предложенное доказательство симметрии КВ основано на свойствах функций $g(s)$, $s(g)$, определенных только для $1 \leq s < \infty$, $g^* \leq g < \infty$, и, строго говоря, не работает в области слабой связи $0 \leq g \leq g^*$. Таким образом, бета-функция обладает симметрией КВ только в области больших g : $g > g^*$ [6], [7].

Вопреки широко распространенному убеждению [14], дуальные симметрии накладывают мягкие ограничения на вид искомым функций; именно, они фиксируют только четные производные в фиксированной точке, оставляя нечетные производные свободными параметрами. В частности, именно поэтому дуальные симметрии не фиксируют величину критического индекса ω , отвечающего за поправки к скейлингу.

В настоящей статье доказано существование S -дуальности $f(g)$, соединяющей области сильной и слабой связей, и разработана схема ее приближенного вычисления. Показано, что в принципе существует метод, позволяющий вычислять фейнмановские диаграммы высоких порядков с помощью высокотемпературных разложений. Однако этот алгоритм трудно применять на практике, так как он математически неустойчив.

Благодарности. Автор искренне благодарен Национальному институту ядерной физики (отделение в г. Павия, Италия) и Институту Макса Планка (г. Штутгарт, Германия) за гостеприимство. Он также считает своим приятным долгом поблагодарить Дж. Юга и Г. Халиуллина за сердечное гостеприимство и исключительно полезные обсуждения. Большую пользу автору принесли обсуждения с А. И. Соколовым, К. Б. Варнашевым и Е. В. Орловым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-02-17794).

Список литературы

- [1] *H. A. Kramers, G. H. Wannier.* Phys. Rev. 1941. V. 60. P. 252.
- [2] *R. Savit.* Rev. Mod. Phys. 1980. V. 52. P. 453.
- [3] *J. B. Kogut.* Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. P. 659.
- [4] *С. Г. Гуксов.* УФН. 1998. Т. 168. С. 705.
- [5] *B. N. Shalaev.* Phys. Rep. 1974. V. 237. P. 129.
- [6] *G. Jug, B. N. Shalaev.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 7249.
- [7] *G. Jug, B. N. Shalaev.* ФЭЧАЯ. 2000. Т. 31. № 7Б. С. 215.
- [8] *А. И. Соколов, Е. В. Орлов.* ФТТ. 2000. Т. 42. С. 2087.
- [9] *G. A. Baker (Jr.), B. G. Nickel, D. I. Meiron.* Phys. Rev. B. 1978. V. 17. P. 1365.
- [10] *J. Zinn-Justin.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. 3rd ed. Oxford: Clarendon Press, 1999.
- [11] *H. B. Tarko, M. E. Fisher.* Phys. Rev. B. 1975. V. 11. P. 1217.
- [12] *Shun-Yong Zinn, Sheng-Nan Lai, M. E. Fisher.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 1176.
- [13] *P. Butera, M. Comi.* Phys. Rev. B. 1996. V. 54. P. 15828.
- [14] *P. H. Damgaard, P. E. Haagensen.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 4681.
- [15] *E. Barouch, B. M. McCoy, T. T. Wu.* Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1409.
- [16] *P. Calabrese, M. Caselle, A. Celi, A. Pelissetto, E. Vicari.* J. Phys. A. 2002. V. 33. P. 8155; hep-th/0005254.
- [17] *V. Privman, M. E. Fisher.* Phys. Rev. B. 1984. V. 30. P. 322.
- [18] *T. W. Burkhardt, D. Derrida.* Phys. Rev. B. 1985. V. 32. P. 7273.
- [19] *A. LeClair.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 1292.

Поступила в редакцию 5.X.2001 г.