Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Боос, И. П. Волобуев, Ю. А. Кубышин, М. Н. Смоляков, Эффективные лагранжианы модели Рэндалл–Сундрума, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 2, 216–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:26:51

© 2002 г.

Э. Э. Боос*, И. П. Волобуев*,
Ю. А. Кубышин*, М. Н. Смоляков†

ЭФФЕКТИВНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

Построен лагранжиан второй вариации для модели Рэндалл–Сундрума с двумя бранами, изучена его калибровочная инвариантность, выведены и расцеплены соответствующие уравнения движения. Для физических степеней свободы этой модели найдены эффективные четырехмерные лагранжианы, которые описывают безмассовый гравитон, массивные гравитоны и безмассовый скалярный радион. Показано, что массы этих полей и их константы взаимодействия с материей различны на разных бранах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза Калуцы–Клейна (КК) обсуждается в теоретической физике уже три четверти века. В соответствии с этой гипотезой пространство-время может иметь дополнительные измерения, которые по каким-то причинам оказываются ненаблюдаемыми. В оригинальных работах Калуцы и Клейна ненаблюдаемость объяснялась компактностью дополнительных измерений и их малым размером порядка длины Планка $l_{Pl} = 1/M_{Pl}$.

В 1983 г. Рубаков и Шапошников предложили новый сценарий для теории КК, который был основан на идее локализации полей на доменной стенке [1]. Они также предложили вид многомерной метрики, совместный с этой гипотезой [2].

В последние годы появились указания на то, что модели такого типа могут возникнуть в теориях струн [3] (см. также [4] и приведенную там литературу). В этом случае наши три пространственных измерения реализованы как трехмерная гиперповерхность (мембрана), вложенная в многомерное пространство-время. Такие гиперповерхности называются 3-браны, или просто браны.

Основной целью построения таких моделей было решение проблемы иерархий. Оказалось, что ее можно решить или с помощью дополнительных измерений достаточно большого размера [5], или с помощью введения экспоненциального фактора в выражение для метрики [6], [7]. В обоих случаях гравитация в многомерном пространстве-вре-

* НИИЯФ им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия

† Московский государственный университет, Москва, Россия

мени становится “сильной” не при энергиях порядка 10^{19} ГэВ, а при намного меньших энергиях, возможно $\sim 1 \div 10$ ТэВ. Поэтому новые эффекты, предсказываемые такими моделями, могут быть проверены уже в ближайшее время в экспериментах на коллайдерах.

В работе [6] было найдено точное решение для системы двух бран, взаимодействующих с гравитацией, которое позволяет учесть гравитационные поля, порождаемые бранами. Эта модель называется моделью Рэндалл–Сундрума, и она широко обсуждается в литературе (см. [4], [8] и приведенную там литературу). Однако многие вопросы еще до конца не изучены. В частности, еще не до конца исследованы вопросы о калибровочной инвариантности этой модели и о выделении из пятимерной метрики физических степеней свободы. Строгое решение этой задачи известно только для модели Рэндалл–Сундрума с однойбраной [9].

Отличительной чертой настоящей работы является использование лагранжева подхода для описания линеаризованной гравитации на фоне решения Рэндалл–Сундрума. Работа устроена следующим образом. В разделе 2 мы приведем детальный вывод лагранжиана второй вариации на фоне решения Рэндалл–Сундрума, изучим его калибровочную инвариантность, докажем существование глобальной унитарной калибровки и в этой калибровке исследуем соответствующие уравнения движения. Кроме того, мы диагонализуем этот лагранжиан и полученные уравнения движения, т.е. явно выделим физические степени свободы. Затем в разделе 3 мы рассмотрим взаимодействие этих степеней свободы с материей на бранах и обсудим его физические следствия. При этом мы подчеркиваем, что для правильной интерпретации этих взаимодействий нужно использовать галилеевы координаты на обеих бранах. В разделе 4 мы еще раз остановимся на отличии наших результатов от полученных в предшествующих работах.

2. ЛАГРАНЖИАН ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

Модель Рэндалл–Сундрума [6] описывает гравитацию в пятимерном пространстве-времени E , взаимодействующую с двумя мембранами (часто эту модель называют RS1-моделью). Обозначим координаты в E $\{\hat{x}^M\} = \{x^\mu, y\}$, $M = 0, 1, 2, 3, 4$, где $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, суть координаты в четырехмерном пространстве-времени, а координата y соответствует пятому измерению, которое образует орбифолд S^1/Z_2 , являющийся окружностью диаметра $2R/\pi$ с отождествленными точками y и $-y$. В соответствии с этим метрика g_{MN} удовлетворяет условиям симметрии орбифолда

$$g_{\mu\nu}(x, -y) = g_{\mu\nu}(x, y), \quad g_{\mu 4}(x, -y) = -g_{\mu 4}(x, y), \quad g_{44}(x, -y) = g_{44}(x, y). \quad (1)$$

Браны расположены в неподвижных точках орбифолда $y = 0$ и $y = R$. В дополнение к этому мы имеем обычное условие периодичности, которое отождествляет точки (x, y) и $(x, y + 2nR)$. Действие для этой модели записывается в виде

$$S = S_g + S_1 + S_2, \quad (2)$$

где гравитационное действие S_g дается формулой

$$S_g = \frac{1}{16\pi\widehat{G}} \int_E (R - \Lambda) \sqrt{-g} d^5 \hat{x}, \quad (3)$$

а действия мембран суть

$$S_1 = V_1 \int_E \sqrt{-\tilde{g}} \delta(y) d^5 \hat{x}, \quad (4)$$

$$S_2 = V_2 \int_E \sqrt{-\tilde{g}} \delta(y - R) d^5 \hat{x}. \quad (5)$$

Здесь $\widehat{G}$ и Λ – пятимерные гравитационная и космологическая постоянные, $\tilde{g} = \det g_{\mu\nu}$, где $g_{\mu\nu}$ есть индуцированная метрика. Сигнатура метрики g_{MN} выбрана равной $(-1, 1, \dots, 1)$. Индексы 1 и 2 различают браны.

Решение Рэндалл–Сундрума для метрики имеет вид

$$\gamma_{MN} d\hat{x}^M d\hat{x}^N = e^{2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (6)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ есть метрика Минковского и функция $\sigma(y) = -k|y|$ в интервале $-R \leq y \leq R$. Она обладает свойствами

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -k \operatorname{sign} y, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = -2k(\delta(y) - \delta(y - R)) \equiv -2k\tilde{\delta}. \quad (7)$$

Параметр k положителен и имеет размерность массы, а Λ , $V_{1,2}$ выражаются через него следующим образом:

$$\Lambda = -12k^2, \quad V_1 = -V_2 = -\frac{3k}{4\pi\widehat{G}}.$$

Отсюда следует, что брана 1 имеет положительное натяжение, в то время как брана 2 – отрицательное.

Построим теперь лагранжиан второй вариации в модели Рэндалл–Сундрума. Для этого параметризуем метрику как

$$g_{MN} = \gamma_{MN} + \hat{\kappa} h_{MN}, \quad (8)$$

подставим в действие (2) и сохраним члены нулевого порядка по $\hat{\kappa} = \sqrt{16\pi\widehat{G}}$. Вклад члена S_g в полное действие дается выражением

$$\begin{aligned} \frac{L_g^{(2)}}{\sqrt{-\gamma}} = & -\frac{1}{4} (\nabla_K h_{MN} \nabla^K h^{MN} - \nabla_K h \nabla^K h + 2\nabla_M h^{MN} \nabla_N h - 2\nabla^K h^{MN} \nabla_M h_{KN}) + \\ & + \frac{\Lambda}{2(d+2)} \left(h_{MN} h^{MN} - \frac{1}{2} h h \right) - \frac{4\pi\widehat{G}}{d+2} T^K_K \left(h_{MN} h^{MN} - \frac{1}{2} h h \right) + \\ & + (8\pi\widehat{G} T^{MN} h_{MK} h_N^K - 4\pi\widehat{G} T^{MN} h_{MN} h), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\gamma = \det \gamma_{MN}$, ∇_M обозначает ковариантную производную в смысле метрики γ_{MN} , $h = \gamma^{MN} h_{MN}$, а тензор энергии-импульса есть

$$T_{MN} = -\frac{3k}{4\pi\tilde{G}} \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}} \gamma_{\mu\nu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \tilde{\delta}, \quad (10)$$

при этом $\tilde{\gamma}$ обозначает определитель матрицы $\gamma_{\mu\nu}$. Вклады бран даются выражением

$$\Delta L_{1,2}^{(2)} = 3k \left(h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h} \tilde{h} \right) \tilde{\delta} \sqrt{\tilde{\gamma}}, \quad (11)$$

где $\tilde{h} = \gamma^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.

Таким образом, лагранжиан второй вариации для флуктуаций метрики h_{MN} может быть записан как

$$\begin{aligned} \frac{L}{\sqrt{-\gamma}} = & -\frac{1}{4} (\nabla_K h_{MN} \nabla^K h^{MN} - \nabla_K h \nabla^K h + 2 \nabla_M h^{MN} \nabla_N h - 2 \nabla^K h^{MN} \nabla_M h_{KN}) - \\ & - 2k^2 \left(h_{MN} h^{MN} - \frac{1}{2} h h \right) + \\ & + \left[4k \left(h_{MN} h^{MN} - \frac{1}{2} h h \right) + 3k h \tilde{h} - 6k h_{M\nu} h^{M\nu} + 3k \left(h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h} \tilde{h} \right) \right] \tilde{\delta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Удобно привести член $(1/2) \nabla^K h^{MN} \nabla_M h_{KN}$ к стандартной форме Фирца–Паули

$$\frac{1}{2} \nabla^K h^{MN} \nabla_M h_{KN} = \frac{1}{2} \nabla_M h^{MN} \nabla^K h_{KN} + \frac{1}{2} h^{MN} h^{PQ} R_{MNPQ} - \frac{1}{2} h^{MN} h_{NP} R_M^P, \quad (13)$$

где R_{MNPQ} и R_M^P – тензор кривизны и тензор Риччи метрики γ_{MN} , соответственно. После подстановки (13) в (12) лагранжиан принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{L}{\sqrt{-\gamma}} = & -\frac{1}{4} (\nabla_K h_{MN} \nabla^K h^{MN} - \nabla_K h \nabla^K h + 2 \nabla_M h^{MN} \nabla_N h - 2 \nabla_M h^{MN} \nabla^K h_{KN}) + \\ & + \frac{k^2}{2} (h_{MN} h^{MN} + h h) + \\ & + \left[-2k h_{MN} h^{MN} + k h \tilde{h} - k h_{M\nu} h^{M\nu} + 3k \left(h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h} \tilde{h} \right) \right] \tilde{\delta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Обсудим теперь калибровочную инвариантность полученного лагранжиана. Нетрудно проверить, что этот лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований [10]

$$h'_{MN}(\hat{x}) = h_{MN}(\hat{x}) - (\nabla_M \xi_N + \nabla_N \xi_M), \quad (15)$$

если функции $\xi^M(\hat{x})$ удовлетворяют условиям симметрии орбифолда

$$\xi^\mu(x, -y) = \xi^\mu(x, y), \quad \xi^4(x, -y) = -\xi^4(x, y). \quad (16)$$

Для метрики Рэндалл–Сундрума эти калибровочные преобразования могут быть найдены явно; они имеют вид

$$\begin{aligned} h'_{\mu\nu}(x, y) &= h_{\mu\nu}(x, y) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + 2\gamma_{\mu\nu} \partial_4 \sigma \xi_4), \\ h'_{\mu 4}(x, y) &= h_{\mu 4}(x, y) - (\partial_\mu \xi_4 + \partial_4 \xi_\mu - 2\partial_4 \sigma \xi_\mu), \\ h'_{44}(x, y) &= h_{44}(x, y) - 2\partial_4 \xi_4, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\partial_4 \equiv \partial/\partial y$. Эти калибровочные преобразования в другой параметризации обсуждались в работах [9], [11]. Мы будем использовать их для выделения физических степеней свободы поля h_{MN} .

Для этого сначала сделаем калибровочное преобразование с функцией

$$\xi_4(x, y) = \frac{1}{4} \int_{-y}^y h_{44}(x, y') dy' - \frac{y}{4R} \int_{-R}^R h_{44}(x, y') dy'. \quad (18)$$

Легко видеть, что функция ξ_4 удовлетворяет условиям симметрии орбифолда. После этого преобразования h_{44} принимает вид

$$h'_{44}(x) = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R h_{44}(x, y) dy, \quad (19)$$

т.е. не зависит от y . Более того, остаточных калибровочных преобразований с функцией ξ_4 нет.

Теперь рассмотрим компоненты $h_{\mu 4}$. Вследствие симметрии орбифолда

$$h_{\mu 4}(x, -y) = -h_{\mu 4}(x, y), \quad (20)$$

и калибровочные преобразования для $h_{\mu 4}$ имеют вид

$$h'_{\mu 4}(x, y) = h_{\mu 4}(x, y) - (\partial_4 \xi_\mu - 2\partial_4 \sigma \xi_\mu). \quad (21)$$

Покажем, что можно наложить условие $h'_{\mu 4} = 0$. Из (21) следует, что соответствующее уравнение для ξ_μ имеет вид

$$\partial_4(e^{-2\sigma} \xi_\mu) = e^{-2\sigma} h_{\mu 4}.$$

Таким образом,

$$\xi_\mu(x, y) = e^{2\sigma} \int_0^y e^{-2\sigma} h_{\mu 4}(x, y') dy', \quad (22)$$

причем ξ_μ удовлетворяет условиям симметрии орбифолда (16). Назовем калибровку

$$h_{\mu 4} = 0, \quad h_{44} = h_{44}(x) \equiv \phi(x) \quad (23)$$

унитарной калибровкой. После наложения этой калибровки остаются калибровочные преобразования, удовлетворяющие условию

$$\partial_4(e^{-2\sigma}\xi_\mu) = 0. \quad (24)$$

Они понадобятся для устранения калибровочных степеней свободы безмассовой моды гравитационного поля.

Следует отметить, что во многих работах по исследованию модели Рэндалл–Сундрума используются гауссовы нормальные координаты, т.е. координаты, в которых $h_{44} = h_{\mu 4} = 0$ [11]. В рамках нашего подхода калибровка, отвечающая выбору гауссовых нормальных координат, получается, если в качестве функции ξ_4 , параметризующей калибровочное преобразование (17), на некотором интервале $0 \leq y < a < R$ взять первое слагаемое из правой части уравнения (18) и гладко продолжить его на интервал $a < y \leq R$ так, что $\xi_4(x, R) = 0$. Очевидно, что после такого калибровочного преобразования $h_{44} = 0$ при $0 \leq y \leq a$. Затем компоненты $h_{\mu 4}$ можно обратить в нуль так же, как это было сделано выше. Таким образом, калибровка, отвечающая выбору гауссовых нормальных координат, с необходимостью является локальной, т.е. определена в некоторой окрестности одной из бран, не пересекающейся с другой браной. Поэтому, в отличие от введенной нами глобальной унитарной калибровки, она не позволяет рассматривать теорию на обеих бранах одновременно.

Варируя действие, соответствующее лагранжиану (14), получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\nabla_K\nabla^K h_{MN} - \frac{1}{2}\gamma_{MN}\nabla_K\nabla^K h + \frac{1}{2}\nabla_M\nabla_N h + \frac{1}{2}\gamma_{MN}\nabla^K\nabla^K h_{KS} - \\ & - \frac{1}{2}\nabla_M\nabla^K h_{KN} - \frac{1}{2}\nabla_N\nabla^K h_{KM} + k^2(h_{MN} + \gamma_{MN}h) + \\ & + \left[-4kh_{MN} - k(h_{M\nu}\delta_N^\nu + h_{\mu N}\delta_M^\mu) + k\gamma_{MN}\tilde{h} + \right. \\ & \left. + k\delta_M^\mu\delta_N^\nu\gamma_{\mu\nu}h + 6k\delta_M^\mu\delta_N^\nu\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tilde{h}\right) \right] \tilde{\delta} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Свертывая в этом выражении индексы, получим очень простое уравнение

$$\frac{3}{2}\nabla^K\nabla^K h_{KS} - \frac{3}{2}\nabla_K\nabla^K h + 6k^2h - 3k\tilde{h}\tilde{\delta} = 0, \quad (26)$$

которое будет использовано в дальнейшем. Уравнения движения для разных компонент получаются из (25) и в унитарной калибровке (23) имеют следующий вид:

1) $\mu\nu$ -компонента

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial^\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu\partial^\rho h_{\rho\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial y^2}\right) - 2k^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\tilde{h} + \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\left(\partial^\rho\partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \partial_\rho\partial^\rho\tilde{h} - \frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial y^2} - 4\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial y} - \partial_\rho\partial^\rho\phi + 12k^2\phi\right) + \\ & + (2kh_{\mu\nu} - 3k\gamma_{\mu\nu}\phi)\tilde{\delta} = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

2) $\mu 4$ -компонента

$$\frac{\partial}{\partial y}(\partial_\mu \tilde{h} - \partial^\nu h_{\mu\nu}) - 3 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \partial_\mu \phi = 0, \quad (28)$$

играющая роль уравнения связи;

3) 44-компонента

$$\frac{1}{2}(\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\mu \tilde{h}) - \frac{3}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} + 6k^2 \phi = 0. \quad (29)$$

В унитарной калибровке свернутое уравнение принимает вид

$$\frac{3}{2}(\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\mu \tilde{h}) - \frac{15}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} - \frac{3}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi + 30k^2 \phi - 12k\phi\tilde{\sigma} = 0. \quad (30)$$

Сначала рассмотрим 44-компоненту и свернутое уравнение. Умножая уравнение (29) на 3 и вычитая его из (30), получим уравнение, содержащее только $\tilde{h}$ и ϕ :

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} - 8k^2 \phi + 8k\phi\tilde{\sigma} + \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0. \quad (31)$$

Для корректного описания физических степеней свободы данной модели представим гравитационное поле в виде

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}(\sigma - c)\phi + \frac{1}{2k^2} \left(\sigma - c + \frac{1}{2} + \frac{c}{2} e^{-2\sigma} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi, \quad (32)$$

где $\sigma = \sigma(y)$, а c — некоторая константа. В дальнейшем мы увидим, что поле $b_{\mu\nu}(x, y)$ описывает безмассовый гравитон и массивные тензорные поля КК [6], [7], а функция $\phi(x)$ описывает безмассовое скалярное поле, которое называется радионом. По-видимому, радион как безмассовое четырехмерное поле был впервые идентифицирован в работе [12] (см. также [13]) и изучен в работах [11], [14], [15]. Как будет показано ниже, выражение (32) с соответствующей константой c диагонализует лагранжиан второй вариации и расщепляет уравнения движения (27)–(29). Вид подстановки (32) подсказан видом калибровочных преобразований, переводящих теорию из локальных гауссовых нормальных координат, в которых лагранжиан второй вариации диагонален во всем пространстве, кроме бран [11], к координатам общего вида. Отметим, что уравнения движения, полученные в работе [11], остаются зацепленными в неподвижных точках орбифолда, т.е. в точках, где находятся браны. Для их расщепления нужно ввести член $\sim e^{-2\sigma}$ в выражение (32). Как следует из (32),

$$\tilde{h} = \tilde{b} + 4(\sigma - c)\phi + \frac{1}{2k^2} \left(\sigma - c + \frac{1}{2} + \frac{c}{2} e^{-2\sigma} \right) \partial_\mu \partial^\mu \phi, \quad (33)$$

где, аналогично $\tilde{h}$, $\tilde{b} = \gamma^{\mu\nu} b_{\mu\nu}$.

Подставляя (33) в (31), получаем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{2\sigma} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial y} \right) + 2c \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{2}{k} e^{2\sigma} (\sigma - c + c e^{-2\sigma}) \partial_\mu \partial^\mu \phi \tilde{\delta} = 0.$$

Выбирая константу c таким образом, чтобы граничный член, пропорциональный $\tilde{\delta}(y)$, обратился в нуль, т.е.

$$c = \frac{kR}{e^{2kR} - 1}, \quad (34)$$

уравнение можно упростить:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{2\sigma} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial y} \right) + 2c \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0. \quad (35)$$

Учитывая, что $\gamma_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \eta_{\mu\nu}$, перейдем в этом уравнении к плоской метрике и обозначим $b = \eta^{\mu\nu} b_{\mu\nu}$. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{2\sigma} \frac{\partial (e^{-2\sigma} b)}{\partial y} \right) + 2c e^{-2\sigma} \square \phi = 0, \quad (36)$$

где $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ — оператор Д'Аламбера в плоском пространстве.

Рассмотрим разложение правой и левой частей этого уравнения в ряд Фурье по координате y . Так как член с производной $\partial/\partial y$ не имеет нулевой моды, то радион является свободным безмассовым полем [11], т.е.

$$\square \phi = 0, \quad (37)$$

и $\partial(e^{-2\sigma} b)/\partial y = e^{-2\sigma} f(x)$. Применяя аналогичные рассуждения к последнему уравнению, получаем

$$\frac{\partial(e^{-2\sigma} b)}{\partial y} = 0.$$

Напомним, что в нашем распоряжении остались еще калибровочные преобразования, удовлетворяющие условию (24). С помощью этих преобразований мы можем наложить калибровку

$$\tilde{b} = b = 0. \quad (38)$$

Видно, что остаточные калибровочные преобразования имеют вид $\xi_\mu = e^{2\sigma} \epsilon_\mu(x)$, где $\epsilon_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial^\mu \epsilon_\mu = 0$. Подставляя (32) в (28), (29) и переходя в калибровку (38), мы получим следующую систему уравнений:

$$\partial^\mu \partial^\nu b_{\mu\nu} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{-2\sigma} \partial^\mu b_{\mu\nu}) = 0. \quad (40)$$

С помощью остаточных калибровочных преобразований можно наложить калибровку

$$\partial^\mu b_{\mu\nu} = 0. \quad (41)$$

Соотношения (38) и (41) определяют калибровку, которую обычно называют поперечно-бесследовой (ТТ) калибровкой. После наложения этой калибровки все еще остаются калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям

$$\xi_\mu = e^{2\sigma} \epsilon_\mu(x), \quad \partial^\mu \epsilon_\mu = 0, \quad \square \epsilon_\mu = 0, \quad (42)$$

которые важны для нахождения числа степеней свободы безмассовой моды поля $b_{\mu\nu}$.

Итак, в калибровке (38), (41) свернутое уравнение и уравнения (28), (29) удовлетворяются автоматически. Теперь рассмотрим уравнение (27). Подставляя в него выражения (32), (33) и переходя к ТТ-калибровке, преобразуем его к виду

$$\frac{e^{-2\sigma}}{2} \square b_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b_{\mu\nu}}{\partial y^2} - 2k^2 b_{\mu\nu} + 2k b_{\mu\nu} \tilde{\delta} = 0. \quad (43)$$

Это уравнение для поперечно-бесследовой части гравитационного поля было фактически постулировано в работе [6]. Итак, мы расцепили все уравнения.

Таким образом, флуктуации метрики на фоне решения Рэндалл–Сундрума описываются полем $b_{\mu\nu}(x, y)$ со спином 2 и безмассовым скалярным радионом $\phi(x)$. Их классические уравнения движения даются формулами (43) и (37), соответственно.

Теперь рассмотрим действие второй вариации в этой теории. Подставляя (32), (33) с учетом (34) в лагранжиан (14) и переходя в ТТ-калибровку (38), (41) для $b_{\mu\nu}$, получим

$$\frac{L}{\sqrt{-\gamma}} = -\frac{1}{4} \partial_\rho b_{\mu\nu} \partial^\rho b^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (\partial_4 b_{\mu\nu} - 2\partial_4 \sigma b_{\mu\nu}) (\partial_4 b^{\mu\nu} + 2\partial_4 \sigma b^{\mu\nu}) - \frac{3}{4} c e^{-2\sigma} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (44)$$

Для получения эффективного лагранжиана надо представить поле $b_{\mu\nu}$ в виде суммы безмассовой моды и мод с ненулевыми массами, а затем проинтегрировать L в выражении (44) по y . В частности, после интегрирования по y мы получим следующий четырехмерный эффективный лагранжиан для поля ϕ :

$$L_\phi = -\frac{3}{2} \frac{kR^2}{e^{2kR} - 1} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (45)$$

где индекс поднят с помощью плоской метрики. Чтобы привести кинетический член к каноническому виду, следует переопределить скалярное поле следующим образом:

$$\phi = \sqrt{\frac{e^{2kR} - 1}{3kR^2}} \varphi. \quad (46)$$

Вернемся к рассмотрению мод поля $b_{\mu\nu}$. Следуя работам [7], [16], [17], сначала найдем собственные функции $\psi_n(y)$ и собственные значения m_n уравнения

$$\left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + 2k(\delta(y) - \delta(y - R)) - 2k^2 \right] \psi_n(y) = -\frac{m_n^2}{2} e^{2k|y|} \psi_n(y). \quad (47)$$

Отметим, что это уравнение фактически представляет собой уравнение (43), в котором четырехмерный оператор Δ Аламбера заменен его собственным значением m_n^2 .

Уравнение (47) можно решить точно. Для этого нужно ввести переменную $\xi = (m_n/k)e^{k|y|}$, в определение которой входят собственные значения m_n . После замены переменной уравнение (47) принимает вид

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} + 1 - \frac{4}{\xi^2} + \frac{4}{\xi} (\delta(\xi - \xi_1) - \delta(\xi - \xi_2)) \right] f(\xi) = 0, \quad (48)$$

где $\xi_1 = m_n/k$ и $\xi_2 = (m_n/k)e^{kR}$. Это уравнение без членов с δ -функцией есть просто уравнение Бесселя, решением которого является линейная комбинация функций Бесселя $J_2(\xi)$ и Неймана $Y_2(\xi)$: $Z_2(\xi) = aJ_2(\xi) + bY_2(\xi)$. Член с δ -функцией учитывается наложением граничного условия $Z_2'(\xi) + (2/\xi)Z_2(\xi) = 0$ в точках $\xi = \xi_1 = m_n/k$ и $\xi = \xi_2 = (m_n/k)e^{kR}$. Первое граничное условие (при $\xi = \xi_1$) удовлетворяется выбором соответствующих коэффициентов a и b :

$$Z_2(\xi) = Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right) J_2(\xi) - J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) Y_2(\xi). \quad (49)$$

Второе граничное условие (в точке $\xi = \xi_2$) определяет спектр масс теории и может быть переписано в виде

$$J_1(\xi_1)Y_1(t\xi_1) - J_1(t\xi_1)Y_1(\xi_1) = 0, \quad (50)$$

где $t = e^{kR}$. Существует теорема о свойствах такой комбинации функций Бесселя и Неймана, утверждающая, что при $t > 1$ эта комбинация является четной функцией ξ_1 и ее корни действительные и простые [18]. Таким образом, ненулевые массы тензорных гравитонов определяются положительными нулями γ_n , $n = 1, 2, \dots$, приведенной выше комбинации и равны $m_n = \gamma_n k$. Как обсуждалось во многих работах (см., например, [6], [7], [16], [17]), величина kR выбирается равной примерно $30 \div 35$, для того чтобы решить проблему иерархий. Так как $e^{kR} \gg 1$, то $\gamma_n \ll 1$ для малых n . Используя разложение функций Бесселя для малого аргумента, легко получить, что для малых n имеет место представление $\gamma_n = \beta_n e^{-kR}$, где β_n приближенно являются корнями уравнения $J_1(\beta_n) = 0$.

Теперь опишем полную ортонормированную систему $\{\psi_n(y), n = 0, 1, \dots\}$ собственных функций уравнения (47), удовлетворяющих условию

$$\int_{-R}^R e^{2k|y|} \psi_m(y) \psi_n(y) dy = \delta_{mn}.$$

Нормированные функции $\psi_n(y)$, отвечающие нулевой массе $m_0 = 0$ и ненулевым массам $m_n = \gamma_n k > 0$, имеют вид

$$\psi_0(y) = N_0 e^{-2k|y|}, \quad N_0 = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{(1 - e^{-2kR})^{\frac{1}{2}}}, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \psi_n(y) &= N_n (Y_1(\gamma_n) J_2(\gamma_n e^{k|y|}) - J_1(\gamma_n) Y_2(\gamma_n e^{k|y|})), \\ N_n &= \frac{k^{\frac{1}{2}}}{(e^{2kR} Z_2^2(\gamma_n e^{kR}) - Z_2^2(\gamma_n))^{\frac{1}{2}}}, \quad \gamma_n = \frac{m_n}{k} = \beta_n e^{-kR}, \end{aligned} \quad (52)$$

где функция Z_2 определена в (49).

Оценим значения собственных функций для малых значений n в точках $y = 0$ и $y = R$, которые понадобятся нам в дальнейшем. Используя тот факт, что $e^{kR} \gg 1$, получим

$$\psi_0(0) = N_0 \approx \sqrt{k}, \quad \psi_n(0) \approx \frac{\sqrt{k}}{|J_2(\beta_n)|} e^{-kR}, \quad (53)$$

$$\psi_0(R) = N_0 e^{-2kR} \approx \sqrt{k} e^{-2kR}, \quad \psi_n(R) \approx -\sqrt{k} e^{-kR}. \quad (54)$$

Теперь представим $b_{\mu\nu}(x, y)$ в виде

$$b_{\mu\nu}(x, y) = \sum_n b_{\mu\nu}^n(x) \psi_n(y), \quad (55)$$

где $b_{\mu\nu}^n(x)$ являются поперечно-бесследовыми четырехмерными полями со спином 2 и массой m_n . Подставляя (55) в (44), переходя к соответствующему действию, интегрируя по орбифолду и переопределяя поле ϕ в соответствии с (46), получим эффективное действие для физических степеней свободы пятимерного гравитационного поля

$$S_{\text{eff}} = \int \left(-\frac{1}{4} \sum_n (\partial_\mu b_{\rho\sigma}^n \partial^\mu b^{n,\rho\sigma} + m_n^2 b_{\rho\sigma}^n b^{n,\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right) dx. \quad (56)$$

Итак, в теории имеется безмассовое тензорное поле со спином 2, бесконечное число массивных тензорных полей со спином 2 и одно безмассовое скалярное поле – радион. Очень важно, что в соответствии с видом функции (51) остаточные калибровочные преобразования (42) являются калибровочными преобразованиями поля $b_{\mu\nu}^0(x)$:

$$b_{\mu\nu}^0(x) = b_{\mu\nu}^0(x) - (\partial_\mu \zeta_\nu(x) + \partial_\nu \zeta_\mu(x)), \quad \partial^\mu \zeta_\mu(x) = 0, \quad \square \zeta_\nu(x) = 0. \quad (57)$$

Это обеспечивает наличие у поля $b_{\mu\nu}^0(x)$ только двух степеней свободы, и, следовательно, оно может быть отождествлено с полем безмассового гравитона.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С МАТЕРИЕЙ НА БРАНАХ

Рассмотрим теперь взаимодействие найденных физических полей с материей на бранах. Стандартная форма этого взаимодействия имеет вид

$$\frac{\hat{\kappa}}{2} \int_{B_1} h^{\mu\nu}(x, 0) T_{\mu\nu}^1 dx + \frac{\hat{\kappa}}{2} \int_{B_2} h^{\mu\nu}(x, R) T_{\mu\nu}^2 \sqrt{-\det \gamma_{\mu\nu}(R)} dx, \quad (58)$$

где $T_{\mu\nu}^1$ и $T_{\mu\nu}^2$ – тензоры энергии-импульса материи на бране 1 и бране 2, соответственно:

$$T_{\mu\nu}^{1,2} = 2 \frac{\delta L^{1,2}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} - \gamma_{\mu\nu}^{1,2} L^{1,2}.$$

Подставляя (32) в (58), представляя $b_{\mu\nu}(x, y)$ в виде (55) и переопределяя поле ϕ в соответствии с (46), получим, что взаимодействие гравитационного поля $b_{\mu\nu}^n(x)$ и безмассового канонически нормированного поля радиона φ с материей имеет вид

$$\frac{1}{2} \int_{B_1} \left(\kappa_1 b_{\mu\nu}^0(x) T^{\mu\nu} + \kappa_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(0) e^{kR}}{N_0} b_{\mu\nu}^n(x) T^{\mu\nu} - \frac{\kappa_2}{\sqrt{3}} \varphi T_{\mu}^{\mu} \right) dx, \quad (59)$$

где

$$\kappa_1 = \hat{\kappa} N_0, \quad \kappa_2 = \kappa_1 e^{-kR} \quad (60)$$

и фактор N_0 определен в (51). Согласно соотношениям (53) фактор $\psi_n(0) e^{kR} / N_0$ перед $b_{\mu\nu}^n(x)$ оказывается порядка единицы для малых n .

Так как κ_1 является константой взаимодействия безмассового гравитона, ее можно выразить через четырехмерную гравитационную постоянную G_1 на бране 1 как $\kappa_1 = \sqrt{16\pi G_1}$, и эта связь между κ_1 и G_1 дает соотношение

$$G_1 = \frac{\hat{G}k}{1 - e^{-2kR}}$$

между гравитационными константами на бране 1 [6], [8].

Предположим, что брана 1 является нашей браной. В этом случае мы должны потребовать, чтобы $\kappa_1 \sim M_{\text{Pl}}^{-1}$, что необходимо для воспроизведения закона Ньютона. С учетом того, что $\hat{G} = M^{-3}$, где M – пятимерная масса Планка, т.е. фундаментальная масса теории, этого можно достичь, взяв $M \sim k \sim M_{\text{Pl}}$ и $e^{kR} \gg 1$. Тогда мы получим, что $\kappa_1 \gg \kappa_2$, т.е. взаимодействие массивных мод и поля радиона с материей на бране 1 намного слабее (экспоненциально подавлено), чем взаимодействие безмассового гравитона. Следовательно, на бране 1 поле радиона не влияет на ньютоновскую гравитацию, которая определяется взаимодействием безмассового гравитона в (59). Массы КК-мод при этом оказываются равными $M_{\text{Pl}} e^{-kR}$. Таким образом, теория на бране 1 феноменологически приемлема, но неинтересна.

Нахождение взаимодействия пятимерной гравитации с материей на бране 2 – более сложная задача, так как координаты $\{x^\mu\}$ в соотношении (6), в которых мы работаем,

не являются галилеевыми на этой бране (координаты называются галилеевыми, если $g_{MN} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, см. [19]). Этот факт был отмечен в работах [8], [20].

Для решения этой задачи введем галилеевы координаты $\{z^\mu\}$ на бране 2, которые выражаются через $\{x^\mu\}$ формулой $x^\mu = e^{kR} z^\mu$. После этого получим для браны 2 (в соответствии с (58))

$$\frac{\hat{\kappa}}{2} \int_{B_2} h'_{\mu\nu}(z, R) T'^{2,\mu\nu} dz, \quad (61)$$

где $T'^{2,\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи в канонической форме, $h'_{\mu\nu}(z, R) = e^{2kR} h_{\mu\nu}(x, R)$, а индексы подняты с помощью плоской метрики. Таким образом, видно, что для нахождения взаимодействия пятимерной гравитации с материей на бране 2 необходимо перейти к галилеевым координатам $\{z^\mu\}$ также и в эффективном действии (56). В результате получим

$$S_{\text{eff}} = \int \left(-\frac{1}{4} \sum_n (e^{-2kR} \partial_\mu b'^n_{\rho\sigma} \partial^\mu b'^{n,\rho\sigma} + m_n^2 b'^n_{\rho\sigma} b'^{n,\rho\sigma}) - \frac{1}{2} e^{2kR} \partial_\mu \varphi' \partial^\mu \varphi' \right) dz, \quad (62)$$

где индексы подняты с помощью плоской метрики. Для того чтобы преобразовать это выражение к каноническому виду, нужно переопределить поля $b'^n_{\rho\sigma}$, φ' и массы m_n . Определим поле гравитона $u^n_{\rho\sigma} = e^{-kR} b'^n_{\rho\sigma}$ и поле радиона $\varphi = e^{kR} \varphi'$. После этого выражение (62) примет вид канонического действия в галилеевых координатах $\{z^\mu\}$:

$$S_{\text{eff}} = \int \left(-\frac{1}{4} \sum_n (\partial_\mu u^n_{\rho\sigma} \partial^\mu u^{n,\rho\sigma} + (m_n e^{kR})^2 u^n_{\rho\sigma} u^{n,\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right) dz. \quad (63)$$

Теперь мы можем записать члены взаимодействия нормированных полей с материей на бране 2:

$$\frac{1}{2} \int_{B_2} \left(\kappa_2 u^0_{\mu\nu}(z) T^{\mu\nu} + \kappa_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(R) e^{kR}}{N_0} u^n_{\mu\nu}(z) T^{\mu\nu} - \frac{\kappa_1}{\sqrt{3}} \varphi T^\mu_\mu \right) dz. \quad (64)$$

Константы взаимодействия κ_1 и κ_2 определяются выражениями (60), а фактор $\psi_n(R) e^{kR} / N_0$ вследствие соотношений (54) для малых n оказывается порядка единицы. Поскольку κ_2 является константой взаимодействия безмассового гравитона, то формально это определяет связь между пятимерной гравитационной постоянной $\hat{G}$ и четырехмерной гравитационной постоянной G_2 на бране 2:

$$G_2 = \frac{\hat{G} k}{e^{2kR} - 1}. \quad (65)$$

Эта формула совпадает с приведенной в обзоре [8].

Выбирая фундаментальную массу $M \sim k \sim 1$ ТэВ, мы получаем правильное значение массы Планка, если аргумент экспоненты удовлетворяет условию $kR \approx 30 \div 35$. Из формулы (64) следует, что константы связи массивных мод и безмассового радиона, как

и в стандартном сценарии, оказываются порядка 1 ТэВ^{-1} [16], [17]. Лагранжиан взаимодействия (64) при этом может быть переписан в следующем виде, из которого эти свойства очевидны:

$$\frac{1}{2} \int_{B_2} \left(\frac{1}{M_{\text{Pl}}} u_{\mu\nu}^0(z) T^{\mu\nu} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{\Lambda_\pi} u_{\mu\nu}^n(z) T^{\mu\nu} - \frac{1}{\Lambda_\pi \sqrt{3}} \varphi T_\mu^\mu \right) dz. \quad (66)$$

В этом выражении $\Lambda_\pi = M_{\text{Pl}} e^{-kR} = \sqrt{M^3/k}$, что является следствием соотношения (65), а параметр ω_n оказывается порядка единицы для малых n . Массы КК-возбуждений, которые могут быть найдены из уравнения (63), получаются равными $M_n = k\beta_n$, так что $M_n \sim k \sim 1 \text{ ТэВ}$ для малых n . Присутствие безмассового радиона с такой константой связи приводит к предсказаниям, которые оказываются в противоречии с имеющимися экспериментальными данными. Для решения этой проблемы был предложен ряд механизмов генерации массы радиона (см., например, [21]).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы ввели глобальную унитарную калибровку для линеаризованной гравитации в модели Рэндалл–Сундрума и в этой калибровке построили эффективные четырехмерные лагранжианы для физических степеней свободы пятимерной гравитации на обеих бранах и для их взаимодействия с полями материи. Оказалось, что это взаимодействие на обеих бранах фактически определяется всего двумя константами связи κ_1 и κ_2 , которые различаются на экспоненциальный фактор.

Важным результатом развитого подхода является одновременное описание взаимодействия пятимерной гравитации с материей на обеих бранах, что невозможно в подходах предшествующих работ, использующих гауссовы нормальные координаты. В частности, это позволяет сделать заключения о свойствах гравитационного взаимодействия в зеркальном мире. Так, если нашей браной является брана 2, то, как легко видеть из лагранжианов взаимодействия (59), (64), гравитационное взаимодействие в зеркальном мире сравнимо по силе со слабым. Не исключено, что это может приводить к каким-то эффектам и в нашем мире, например связанным с распределением материи, поскольку между обоими мирами существует гравитационное взаимодействие.

Наш результат для лагранжиана эффективной четырехмерной теории на бране 2 в галилеевых координатах, приведенный в выражениях (63), (64), отличается от обычно используемого (см., например, работы [16], [17]). В частности, мы получаем $k \sim 1 \text{ ТэВ}$, в то время как в упомянутых работах $k \sim M_{\text{Pl}}$, что приводит к противоречию между размером дополнительного измерения и спектром возникающих из него возбуждений. Однако нетрудно проверить, что отношение κ_1/κ_2 оказывается тем же самым в физических (галилеевых) координатах $\{z^\mu\}$ и “нефизических” координатах $\{x^\mu\}$. Поэтому феноменологические предсказания упомянутых работ остаются справедливыми.

Отметим еще, что в работах [6], [20] из общих физических соображений, наряду со значением $k \sim M_{\text{Pl}}$, обсуждалась возможность того, что $k \sim 1 \text{ ТэВ}$. Результаты нашей

работы означают, что это значение параметра k является единственно допустимым для последовательной физической интерпретации теории на бране 2.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Г. Ю. Богословскому, Ю. В. Грацу и В. А. Рубакову за полезные обсуждения. Работа Э.Б., Ю.К. и И.В. была поддержана грантом РФФИ № 00-01-00704 и грантом № 990588 программы “Университеты России”. Работа Э.Б. была частично поддержана грантом CERN-INTAS № 99-0377 и грантом INTAS № 01-0679. Работа Ю.К. и И.В. была частично поддержана программой SCOPES (Scientific co-operation between Eastern Europe and Switzerland) Швейцарского национального научного фонда, проект № 7SUPJ062239, и профинансирована Федеральным отделом иностранных дел (Federal Department of Foreign Affairs).

Список литературы

- [1] V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. Phys. Lett. B. 1983. V. 125. P. 136.
- [2] V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov. Phys. Lett. B. 1983. V. 125. P. 139.
- [3] J. Polchinski. TASI lectures on D-branes. hep-th/9611050; E. Witten. Nucl. Phys. B. 1996. V. 471. P. 135; J. Lykken. Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 3693; C.P. Bachas. Lectures on D-branes. hep-th/9806199.
- [4] I. Antoniadis. String and D-brane physics at low energy. hep-th/0102202.
- [5] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali. Phys. Lett. B. 1998. V. 429. P. 263.
- [6] L. Randall, R. Sundrum. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3370.
- [7] L. Randall, R. Sundrum. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4690.
- [8] В. А. Рубаков. УФН. 2001. Т. 171. С. 913; hep-ph/0104152.
- [9] I. Ya. Aref'eva, M. G. Ivanov, W. Mück, K. S. Viswanathan, I. V. Volovich. Nucl. Phys. B. 2000. V. 590. P. 273.
- [10] L. P. Grishchuk, A. N. Petrov, A. D. Popova. Commun. Math. Phys. 1984. V. 94. P. 379.
- [11] Ch. Charmousis, R. Gregory, V. Rubakov. Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 067505.
- [12] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, J. March-Russel. Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 064020.
- [13] R. Sundrum. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 085010.
- [14] W. D. Goldberger, M. B. Wise. Phys. Lett. B. 2000. V. 475. P. 275.
- [15] C. Csáki, M. Graesser, L. Randall, J. Terning. Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 045015.
- [16] H. Davoudiasl, J. H. Hewett, T. G. Rizzo. Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2080.
- [17] H. Davoudiasl, J. H. Hewett, T. G. Rizzo. Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 075004.
- [18] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 1967.
- [20] B. Grinstein, D. R. Nolte, W. Skiba. Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 105005.
- [21] W. D. Goldberger, M. B. Wise. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4922.

Поступила в редакцию 30.X.2001 г.