Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Шарипов, Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг, и волновые уравнения, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 2, 244–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:42:30

© 2002 г.

Р. А. Шарипов*

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ НОРМАЛЬНЫЙ СДВИГ, И ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваются волновые уравнения на римановых многообразиях, исследуется динамика волновых фронтов в квазиклассическом приближении. Решена задача выделения волновых уравнений, для которых динамика волновых фронтов описывается ньютоновскими динамическими системами, допускающими нормальный сдвиг. В явной форме выделен подкласс таких динамических систем, которые могут быть заданы модифицированными уравнениями Лагранжа и модифицированными уравнениями Гамильтона.

1. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Высокочастотный предел в волновых процессах принято называть квазиклассическим пределом, или пределом геометрической оптики. Распространение волн в этом пределе описывается в терминах лучей и волновых фронтов. Волновой фронт – это поверхность постоянной фазы, ее точки перемещаются вдоль лучей. Движение этих точек описывается модифицированными уравнениями Гамильтона (см. раздел 3), которые можно рассматривать как частный случай уравнений Ньютона. В простейших случаях (например, при распространении света в изотропной неоднородной преломляющей среде) динамика точек такова, что она сохраняет перпендикулярность волновых фронтов и лучей. Это свойство было положено в основу теории динамических систем, допускающих нормальный сдвиг гиперповерхностей. В данной работе исследуется обратная задача, а именно задача описания волновых уравнений, для которых динамика волновых фронтов задается ньютоновскими динамическими системами, допускающими нормальный сдвиг гиперповерхностей в римановом многообразии.

Пусть M – риманово многообразие размерности n . Обозначим через ∇ оператор ковариантного дифференцирования относительно метрической связности в M . Тогда выражение

$$\mathbf{a}_r \cdot D^r = \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_r=1}^n \left(\frac{1}{i}\right)^r a^{k_1 \dots k_r}(x^1, \dots, x^n) \cdot \nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_r} \quad (1.1)$$

*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия. E-mail: R.Sharipov@ic.bashedu.ru; r-sharipov@mail.ru

можно рассматривать как элементарный дифференциальный оператор r -го порядка. Здесь $a^{k_1 \dots k_r}(x^1, \dots, x^n)$ – компоненты некоторого гладкого симметричного тензорного поля $\mathbf{a}$ типа $(r, 0)$ в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$, а $i = \sqrt{-1}$. Из операторов (1.1) формируется полином

$$H(p, D) = \sum_{r=0}^m \mathbf{a}_r \cdot D^r. \quad (1.2)$$

Это скалярный дифференциальный оператор m -го порядка в многообразии M . Здесь p – точка многообразия M , а D – просто формальный символ. Оператор (1.2) может быть применен как к скалярным, так и к тензорным полям в M . Мы применим его к скалярному полю u , но прежде введем большой параметр λ в оператор $H(p, D)$. Обозначим

$$H(p, \lambda^{-1} D) = \sum_{r=0}^m \lambda^{-r} \mathbf{a}_r \cdot D^r \quad (1.3)$$

и рассмотрим скалярное волновое уравнение m -го порядка с параметром λ :

$$H(p, \lambda^{-1} D)u = 0. \quad (1.4)$$

В различных частных случаях уравнение (1.4) может редуцироваться к уравнению Гельмгольца, к уравнению Шредингера либо к волновому уравнению (см. [1]). Следующий анзац для формального асимптотического решения уравнения (1.4) при $\lambda \rightarrow \infty$ был предложен Дебаем:

$$u = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{(i\lambda)^\alpha} \cdot e^{i\lambda S}. \quad (1.5)$$

Здесь $\varphi(\alpha)$ и S – гладкие скалярные поля в M . Скалярное поле S интерпретируется как фаза волны.

Подставим разложение (1.5) в уравнение (1.4). Выполним эту подстановку в несколько этапов. Для начала рассмотрим результат применения дифференциального оператора $\nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_r}$ к скалярному полю $e^{i\lambda S}$:

$$\nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_r} e^{i\lambda S} = \left(\sum_{q=0}^r \beta_{k_1 \dots k_r}^{(q)} \cdot (i\lambda)^{r-q} \right) \cdot e^{i\lambda S}. \quad (1.6)$$

Коэффициент при старшей степени λ в (1.6) может быть посчитан в явном виде:

$$\beta_{k_1 \dots k_r}^{(0)} = \nabla_{k_1} S \dots \nabla_{k_r} S. \quad (1.7)$$

Остальные коэффициенты $\beta_{k_1 \dots k_r}^{(q)}$ также могут быть вычислены для каждого конкретного q . Однако записать явную формулу сразу для всех таких коэффициентов представляется проблематичным.

На втором этапе мы применим оператор (1.3) к степенному ряду (1.5). Используя формулу (1.6), мы получим следующее выражение для $H(p, \lambda^{-1}D)u$:

$$Hu = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^r \sum_{q=s}^r \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_r=1}^n \frac{r! \cdot a^{k_1 \dots k_r} \cdot \beta_{k_{s+1} \dots k_r}^{(q-s)}}{s!(r-s)! \cdot (i\lambda)^{q+\alpha}} \cdot e^{i\lambda S} \cdot \nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_s} \varphi(\alpha).$$

Если выделить в его правой части все слагаемые с некоторым фиксированным значением α и $\theta = q + \alpha$, то обнаружится, что число таких слагаемых конечно. Для доказательства этого нужно сделать следующие преобразования сумм:

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^r \sum_{q=s}^r \rightarrow \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{r=0}^m \sum_{q=0}^r \sum_{s=0}^q \rightarrow \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m \sum_{r=q}^m \sum_{s=0}^q \rightarrow \sum_{\theta=0}^{\infty} \sum_{\alpha=\alpha_{\theta,m}}^{\theta} \sum_{r=\theta-\alpha}^m \sum_{s=0}^{\theta-\alpha},$$

где $\alpha_{\theta,m} = \max(0, \theta - m)$. Теперь мы определим дифференциальный оператор

$$R_{\omega} = \sum_{r=\omega}^m \sum_{s=0}^{\omega} \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_r=1}^n \frac{r! \cdot a^{k_1 \dots k_r} \cdot \beta_{k_{s+1} \dots k_r}^{(\omega-s)}}{s!(r-s)!} \cdot \nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_s} \quad (1.8)$$

и запишем левую часть (1.4) с использованием этого оператора:

$$Hu = \sum_{\theta=0}^{\infty} \sum_{\alpha=\alpha_{\theta,m}}^{\theta} \frac{R_{\theta-\alpha} \varphi(\alpha)}{(i\lambda)^{\theta}} \cdot e^{i\lambda S}.$$

Это третий шаг, необходимый для подстановки степенного ряда (1.5) в уравнение (1.4). В результате такой подстановки уравнение (1.4) распадается в бесконечную серию уравнений относительно $\varphi(\alpha)$:

$$\sum_{\alpha=\alpha_{\theta,m}}^{\theta} R_{\theta-\alpha} \varphi(\alpha) = 0, \quad \theta = 0, 1, \dots, \infty. \quad (1.9)$$

Для исследования серии уравнений (1.9) найдем явное выражение оператора (1.8) при $\omega = 0$. Используя формулу (1.7), получаем

$$R_0 = \sum_{r=0}^m \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_r=1}^n a^{k_1 \dots k_r} (x^1, \dots, x^n) \cdot \nabla_{k_1} S \dots \nabla_{k_r} S. \quad (1.10)$$

Заметим, что R_0 — это не дифференциальный оператор, а оператор умножения на функцию $R_0 = R_0(x^1, \dots, x^n)$. Поэтому первое уравнение в серии (1.9) выглядит так: $R_0 \cdot \varphi(0) = 0$. Старший член ряда (1.5) отличен от нуля. Поэтому уравнение $R_0 \cdot \varphi(0) = 0$ сводится к уравнению

$$R_0 = 0. \quad (1.11)$$

Учитывая (1.11), мы можем переписать (1.9):

$$\sum_{\alpha=\alpha_{\theta,m}}^{\theta-1} R_{\theta-\alpha} \varphi_{(\alpha)} = 0, \quad \theta = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.12)$$

Первое уравнение в серии (1.12) тоже очень простое. Это уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $\varphi_{(0)}$:

$$R_1 \varphi_{(0)} = 0. \quad (1.13)$$

Остальные уравнения в серии (1.12) задают рекурсию для $\varphi_{(\alpha)}$:

$$R_1 \varphi_{(\theta-1)} = - \sum_{\alpha=\alpha_{\theta,m}}^{\theta-2} R_{\theta-\alpha} \varphi_{(\alpha)}, \quad \theta = 2, 3, \dots, \infty. \quad (1.14)$$

Ниже мы приведем явное выражение для оператора R_1 , но не станем рассматривать проблему разрешимости уравнений (1.13) и (1.14). Это должно делаться отдельно для каждого конкретного уравнения (1.4) с учетом поставленных для него начальных и граничных условий.

Для получения оператора R_1 в явном виде надо сначала найти явное выражение для коэффициента $\beta_{k_1 \dots k_r}^{(1)}$ в (1.6). Это делается прямым вычислением. Применив оператор $\nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_r}$ к функции $e^{i\lambda S}$ и собрав слагаемые при одинаковых степенях λ , получим

$$\beta_{k_1}^{(1)} = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad (1.15)$$

$$\beta_{k_1 \dots k_r}^{(1)} = \sum_{1 \leq i < j \leq r} \nabla_{k_i} \nabla_{k_j} S \cdot \prod_{\substack{1 \leq q \leq r \\ q \neq i, q \neq j}} \nabla_{k_q} S \quad \text{при } r \geq 2. \quad (1.16)$$

Затем подставим выражения (1.15) и (1.16) в формулу (1.8) и учтем симметричность коэффициентов $a^{k_1 \dots k_r}$. Это дает

$$\begin{aligned} R_1 = & \sum_{r=1}^m \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_r=1}^n r \cdot a^{k_1 \dots k_r} \cdot \prod_{\rho=2}^r \nabla_{k_\rho} S \cdot \nabla_{k_1} + \\ & + \sum_{r=2}^m \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_r=1}^n \frac{r(r-1)}{2} \cdot \nabla_{k_1} \nabla_{k_2} S \cdot \prod_{\rho=3}^r \nabla_{k_\rho} S. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В дальнейшем будем предполагать уравнения (1.13) и (1.14) с оператором (1.17) в левой части разрешимыми в каком-либо смысле, а также будем считать, что $\varphi_{(0)} \neq 0$. В рамках указанных условий мы будем рассматривать уравнение (1.11).

2. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

Заметим, что правая часть равенства (1.10) очень похожа на правую часть (1.1), и это не случайно. Для того чтобы выявить природу такого сходства, обозначим ∇S через $\mathbf{p}$. Тогда $\mathbf{p}$ – ковекторное поле с компонентами

$$p_k = \nabla_k S, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Используя обозначения (2.1), можно переписать (1.10) как $R_0 = H(p, \mathbf{p})$, где

$$H(p, \mathbf{p}) = \sum_{r=0}^m \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_r=1}^n a^{k_1 \dots k_r}(x^1, \dots, x^n) \cdot p_{k_1} \dots p_{k_r}. \quad (2.2)$$

Правая часть (2.2) – полином относительно компонент ковектора $\mathbf{p}$. Если $p_1, \dots, p_n$ рассматривать как независимые переменные, представляющие собой компоненты некоторого произвольного ковектора $\mathbf{p}$ в точке $p \in M$, то полином $H(p, \mathbf{p})$ – это так называемый *символ* дифференциального оператора (1.2). В случае, когда символ $H(p, \mathbf{p})$ задан, сам оператор может быть получен в результате подстановки $p_k = -i\nabla_k$ в его символ. Этот прием хорошо известен в квантовой механике, где вектор импульса заменяется дифференциальным оператором. Аналогия с квантовой механикой станет более прозрачной (см. [2]), если сделать подстановку

$$p_k = -\frac{i}{\lambda} \nabla_k, \quad (2.3)$$

где $\lambda = 1/\hbar$ понимается как большой параметр. Подставив (2.3) в полином (2.2), мы получим оператор (1.3), используемый в уравнении (1.4).

Теперь вернемся к уравнению (1.11) – первому в серии уравнений (1.9). С учетом (1.10) и (2.2) мы можем записать его в виде

$$H(p, \nabla S) = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) – нелинейное уравнение в частных производных первого порядка относительно скалярного поля S . Оно часто называется *уравнением Гамильтона–Якоби*. Традиционный способ решения таких уравнений основан на понятии *характеристических линий*. Для уравнения (2.4) это параметрические кривые, заданные уравнениями Гамильтона:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad (2.5)$$

В работе [3] была предложена следующая форма записи уравнений (2.5):

$$\dot{x}^i = \tilde{\nabla}^i H, \quad \nabla_t p_i = -\nabla_i H. \quad (2.6)$$

Она специально предназначена для случая гамильтоновых динамических систем в римановых многообразиях. Здесь ∇_t – стандартное обозначение для ковариантного дифференцирования векторнозначных и тензорнозначных функций по параметру t вдоль

кривой. В нашем конкретном случае ковариантная производная $\nabla_t p_i$ записывается следующим образом:

$$\nabla_t p_i = \dot{p}_i - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k p_k \dot{x}^j. \quad (2.7)$$

Ковариантные производные ∇_i и $\tilde{\nabla}^i$ в (2.6) являются менее стандартными объектами. Суть в том, что, записывая уравнения Гамильтона (2.6), мы понимаем H как расширенное скалярное поле в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Расширенным тензорным полем $\mathbf{X}$ типа (r, s) в M называют тензорнозначную функцию, отображающую точку $q \in G \subseteq T^*M$ в тензор из пространства $T_s^r(p, M)$, где $p = \pi(q)$. Подмножество G в T^*M – область определения расширенного тензорного поля $\mathbf{X}$. В случае, когда $G = T^*M$, поле $\mathbf{X}$ называется *глобальным расширенным тензорным полем* в M .*

В координатной записи расширенные тензорные поля задаются своими компонентами

$$X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n). \quad (2.8)$$

В отличие от традиционных тензорных полей, компоненты расширенных тензорных полей являются функциями удвоенного набора аргументов. Первые n аргументов $X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ в (2.8) – локальные координаты точки $p \in M$, остальные – компоненты ковектора $\mathbf{p} \in T_p^*(M)$. В совокупности p и $\mathbf{p}$ образуют точку $q = (p, \mathbf{p})$ кокасательного расслоения T^*M . (Подробнее о теории расширенных тензорных полей см. работы [3], [4].) Приведем явные формулы для ковариантных дифференцирований ∇ и $\tilde{\nabla}$ в локальных координатах $x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n$:

$$\tilde{\nabla}^q X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial p_q}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla_q X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^q} + \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n p_a \Gamma_{qb}^a \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial p_b} + \\ &+ \sum_{k=1}^r \sum_{a_k=1}^n \Gamma_{qa_k}^{i_k} X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots a_k \dots i_r} - \sum_{k=1}^s \sum_{b_k=1}^n \Gamma_{qj_k}^{b_k} X_{j_1 \dots b_k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ковариантное дифференцирование $\tilde{\nabla}$, заданное формулой (2.9), называется *импульсным градиентом*; ковариантное дифференцирование ∇ , заданное формулой (2.10), – *пространственным градиентом*. Для традиционных тензорных полей формула (2.10) сводится к стандартной формуле для ковариантных производных. Поэтому использование символа ∇ в разделе 1 и в формуле (2.4) не противоречит формуле (2.10).

Пусть σ – некоторая гладкая ориентируемая гиперповерхность в M . Обозначим через $\mathbf{n} = \mathbf{n}(p)$ гладкое поле единичных нормалей к σ . При помощи римановой метрики $\mathbf{g}$ можно превратить его в поле единичных векторов

$$n_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} n^j. \quad (2.11)$$

Обозначим это поле тем же символом $\mathbf{n}$. Используя ковектор $\mathbf{n} = \mathbf{n}(p)$, зададим следующие граничные условия для уравнения Гамильтона–Якоби (2.4):

$$S|_{p \in \sigma} = s_0 = \text{const}, \quad \nabla S|_{p \in \sigma} = \nu(p) \cdot \mathbf{n}(p), \quad (2.12)$$

где $\nu = \nu(p)$ – скалярный множитель. Он не произволен. Для того чтобы граничные условия (2.12) были совместны с уравнением (2.4), должно быть выполнено соотношение

$$H(p, \nu(p) \cdot \mathbf{n}(p)) = 0. \quad (2.13)$$

Наряду с граничными условиями (2.12) для уравнения Гамильтона–Якоби (2.4) зададим начальные условия для уравнений Гамильтона (2.6):

$$x^i|_{t=0} = x^i(p), \quad p_i|_{t=0} = \nu(p) \cdot n_i(p), \quad (2.14)$$

которые параметризованы точками гиперповерхности σ . Функция $\nu = \nu(p)$ в (2.14) – тот же самый скалярный множитель, что и в (2.12). Его выбор ограничен условием (2.13).

Решив задачу Коши (2.6), (2.14), мы получим семейство параметрических кривых в кокасательном расслоении T^*M . Их проекции на M составляют семейство параметрических кривых

$$\gamma = \gamma(t, p), \quad (2.15)$$

начинающихся в точках гиперповерхности σ . Граничные условия (2.12) и начальные условия (2.14) называются *регулярными*, если функция $\nu = \nu(p)$ не обращается в нуль на σ , т.е.

$$\nu(p) \neq 0, \quad (2.16)$$

и интегральные кривые (2.15) трансверсальны к гиперповерхности σ . Используя функцию Гамильтона H , определим расширенное скалярное поле

$$\Omega = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{\nabla}^i H. \quad (2.17)$$

В терминах поля Ω условие трансверсальности $\gamma \nparallel \sigma$ сведется к неравенству

$$\Omega(p, \nu(p) \cdot \mathbf{n}(p)) \neq 0. \quad (2.18)$$

Предположим, что оба условия регулярности (2.16) и (2.18) на гиперповерхности σ выполнены. В этом случае интегральные кривые (2.15) заполняют некоторую окрестность гиперповерхности σ , и мы можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Если граничные условия (2.12), которые удовлетворяют условию (2.13), регулярны, т.е. если оба неравенства (2.16) и (2.18) на σ выполнены, то граничная задача для уравнения Гамильтона–Якоби (2.4), (2.12) имеет единственное решение S в некоторой окрестности гиперповерхности σ . Это решение задается интегралом вдоль кривых (2.15):*

$$S = s_0 + \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n p_i dx^i = s_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}^i dt. \quad (2.19)$$

Эта теорема – стандартный результат в теории уравнений в частных производных первого порядка. Ее доказательство можно найти в работе [1].

3. ДИНАМИКА ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Сформулированная выше теорема дает метод решения уравнения Гамильтона–Якоби и тем самым определяет скалярное поле $S = S(p)$ в асимптотическом разложении (1.5). Вспомним, что S – фаза распространяющейся волны, а волновой фронт по определению – множество точек с постоянной фазой:

$$\sigma(s) = \{p \in M : S(p) = s = \text{const}\}. \quad (3.1)$$

Гиперповерхность σ в (2.12) интерпретируется как начальный волновой фронт, поскольку $\sigma = \sigma(s_0)$. В регулярном случае для s , достаточно близких к s_0 , волновые фронты $\sigma(s)$ из (3.1) являются гладкими гиперповерхностями, заполняющими некоторую окрестность начальной гиперповерхности σ . Кривые (2.15) в пределе геометрической оптики (при $\lambda \rightarrow \infty$) интерпретируются как лучи, а уравнения Гамильтона (2.6) определяют начинающееся в момент времени $t = 0$ движение точек, движущихся вдоль этих лучей. Если мы отметим их положение в какой-то ненулевой момент времени t , то для достаточно малого значения t получим гладкую гиперповерхность σ_t , близкую к исходной гиперповерхности σ . Гиперповерхности σ_t образуют другое семейство гиперповерхностей, также заполняющее некоторую окрестность начального волнового фронта σ . Совпадают ли они с $\sigma(s)$? В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный:

$$\sigma_t \neq \sigma(s). \quad (3.2)$$

На рисунке гиперповерхности σ_t показаны сплошными линиями, а волновые фронты $\sigma(s)$ – штриховыми. Неравенство (3.2) означает, что уравнения Гамильтона (2.6) не описывают в точности реальную динамику волновых фронтов. Для ее описания посредством обыкновенных дифференциальных уравнений мы должны заменить параметр t в уравнениях (2.6) на параметр $s = S(t)$. Формула (2.19) для скалярного поля S дает связь между этими двумя параметрами:

$$\frac{ds}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}^i = \sum_{i=1}^n p_i \widetilde{\nabla}^i H = \Omega. \quad (3.3)$$

Заменяя t на s в соответствии с формулой (3.3), сохраним символ t для обозначения нового параметра. При этом уравнения Гамильтона (2.6) перейдут в модифицированные уравнения Гамильтона

$$\dot{x}^i = \frac{\tilde{\nabla}^i H}{\Omega}, \quad \nabla_t p_i = -\frac{\nabla_i H}{\Omega}, \quad (3.4)$$

где Ω определяется формулой (2.17). Дифференциальные уравнения (3.4) называются *уравнениями динамики волновых фронтов*.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

Уравнения Гамильтона (2.6) и модифицированные уравнения Гамильтона (3.4) являются уравнениями в кокасательном расслоении T^*M . Преобразуем их в уравнения в касательном расслоении TM . Воспользуемся тем, что для каждой точки $(p, \mathbf{p})$ кокасательного расслоения T^*M определен вектор $\mathbf{v} \in T_p(M)$ с компонентами

$$v^i = \tilde{\nabla}^i H. \quad (4.1)$$

Объединив p и $\mathbf{v}$, мы получим точку $(p, \mathbf{v})$ касательного расслоения TM . Тем самым формула (4.1) определяет отображение $\lambda^{-1}: T^*M \rightarrow TM$, которое известно как обратное преобразование Лежандра. Мы будем предполагать, что оно обратимо, и обозначим через λ прямое преобразование Лежандра $\lambda: TM \rightarrow T^*M$. Пусть $\mathbf{X}$ – некоторое расширенное тензорное поле. Согласно определению 1 оно является тензорнозначной функцией в T^*M . Тогда композиция $\mathbf{X} \circ \lambda$ есть тензорнозначная функция в касательном расслоении TM . Таким образом мы приходим к альтернативному определению расширенного тензорного поля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Расширенное тензорное поле $\mathbf{X}$ типа (r, s) в M – это тензорнозначная функция, которая отображает точку $q \in G \subseteq TM$ в тензор из пространства $T_s^r(p, M)$, где $p = \pi(q)$. Подмножество G в TM – область определения расширенного тензорного поля $\mathbf{X}$. В случае, когда $G = TM$, поле $\mathbf{X}$ называется *глобальным расширенным тензорным полем* в M .*

В случае произвольного гладкого многообразия M определения 1 и 2 ведут к двум различным теориям расширенных тензорных полей на данном многообразии. Но в случае риманова многообразия касательное и кокасательное расслоения связаны отображениями дуальности

$$\mathbf{g}: TM \rightarrow T^*M, \quad \mathbf{g}^{-1}: T^*M \rightarrow TM. \quad (4.2)$$

В координатной записи отображения дуальности (4.2) понимаются как опускание и поднятие индексов в аргументах компонент расширенного тензорного поля $\mathbf{X}$, к которому они применяются. В силу наличия отображений (4.2) два объекта, введенные определениями 1 и 2, по существу совпадают. Мы будем называть их *ковариантными* и *контравариантными* представлениями расширенного тензорного поля $\mathbf{X}$. Если мы выберем контравариантное представление поля $\mathbf{X}$, то формула (2.9) переписется как

$$\tilde{\nabla}_q X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial p^q}, \quad (4.3)$$

а формула (2.10) для $\nabla \mathbf{X}$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla_q X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^q} - \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n p^a \Gamma_{qa}^b \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial p^b} + \\ &+ \sum_{k=1}^r \sum_{a_k=1}^n \Gamma_{qa_k}^{i_k} X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots a_k \dots i_r} - \sum_{k=1}^s \sum_{b_k=1}^n \Gamma_{qb_k}^{b_k} X_{j_1 \dots b_k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Прямое и обратное преобразования Лежандра – это еще два отображения

$$\lambda: TM \rightarrow T^*M, \quad \lambda^{-1}: T^*M \rightarrow TM, \quad (4.5)$$

которые связывают касательное и кокасательное расслоения. Наличие нелинейных отображений (4.5) увеличивает число представлений расширенного тензорного поля $\mathbf{X}$. Если $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ \lambda^{-1}$, то будем называть $\mathbf{Y}$ **p**-представлением, или импульсным представлением, для $\mathbf{X}$, а $\mathbf{X} = \mathbf{v}$ -представлением, или скоростным представлением, для $\mathbf{Y}$. Имеется следующий набор различных представлений для расширенного тензорного поля:

- ковариантное **p**-представление;
- контравариантное **p**-представление;
- ковариантное **v**-представление;
- контравариантное **v**-представление.

Функцией Лагранжа называется расширенное скалярное поле

$$l = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \tilde{\nabla}^i H - H. \quad (4.6)$$

Ковариантное **p**-представление естественно для функции Гамильтона H , а для функции Лагранжа естественным является контравариантное **v**-представление: $L = l \circ \lambda$. Если функция Лагранжа (4.6) уже пересчитана к контравариантному **v**-представлению, то прямое преобразование Лежандра λ в (4.5) задается формулой, аналогичной формуле (4.1):

$$p_i = \tilde{\nabla}_i L \quad (4.7)$$

(см. подробнее [3]). Заметим, что формулы (2.9), (2.10), (4.3) и (4.4) для ∇ и $\tilde{\nabla}$ применимы как в **p**-представлении, так и в **v**-представлении. Однако в **v**-представлении мы должны заменить в них p_i на v_i и p^i на v^i . По этой причине $\tilde{\nabla}$ в **v**-представлении называется *скоростным градиентом*.

Отображения дуальности (4.2) перестановочны с ковариантными дифференцированиями ∇ и $\tilde{\nabla}$. Это выражается в следующих равенствах:

$$\nabla(\mathbf{X} \circ \mathbf{g}) = (\nabla \mathbf{X}) \circ \mathbf{g}, \quad \tilde{\nabla}(\mathbf{X} \circ \mathbf{g}) = (\tilde{\nabla} \mathbf{X}) \circ \mathbf{g}. \quad (4.8)$$

Преобразование Лежандра λ не коммутирует с дифференцированиями ∇ и $\tilde{\nabla}$. Вместо (4.8) мы имеем равенства

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}(\mathbf{Y} \circ \lambda) &= C(\tilde{\nabla}\mathbf{Y} \circ \lambda \otimes \tilde{\nabla}\tilde{\nabla}L), \\ \nabla(\mathbf{Y} \circ \lambda) &= \nabla\mathbf{Y} \circ \lambda + C(\tilde{\nabla}\mathbf{Y} \circ \lambda \otimes \nabla\tilde{\nabla}L),\end{aligned}\tag{4.9}$$

где C – операция свертки. В локальных координатах равенства (4.9) записываются так:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_q X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{k=1}^n \tilde{\nabla}_q \tilde{\nabla}_k L \cdot \tilde{\nabla}^k Y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \\ \nabla_q X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \nabla_q Y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{k=1}^n \nabla_q \tilde{\nabla}_k L \cdot \tilde{\nabla}^k Y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Аналогичным образом можно записать соотношения, обратные к (4.9):

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}(\mathbf{X} \circ \lambda^{-1}) &= C(\tilde{\nabla}\mathbf{X} \circ \lambda^{-1} \otimes \tilde{\nabla}\tilde{\nabla}H), \\ \nabla(\mathbf{X} \circ \lambda^{-1}) &= \nabla\mathbf{X} \circ \lambda^{-1} + C(\tilde{\nabla}\mathbf{X} \circ \lambda^{-1} \otimes \nabla\tilde{\nabla}H).\end{aligned}\tag{4.11}$$

В локальных координатах равенства (4.11) записываются так:

$$\tilde{\nabla}^k Y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{q=1}^n \tilde{\nabla}^k \tilde{\nabla}^q H \cdot \tilde{\nabla}_q X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r},\tag{4.12}$$

$$\nabla_k Y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \nabla_k X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{q=1}^n \nabla_k \tilde{\nabla}^q H \cdot \tilde{\nabla}_q X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.\tag{4.13}$$

При записи (4.10), (4.12) и (4.13) мы подразумеваем, что $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \circ \lambda$.

Рассмотрим функцию Лагранжа L . Ее $\mathbf{p}$ -представление задано формулой (4.6). Вычислим $\nabla_k l$ непосредственно при помощи формулы (4.6):

$$\nabla_k l = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \nabla_k \tilde{\nabla}^i H - \nabla_k H.\tag{4.14}$$

Затем применим формулу (4.13) и посчитаем эту производную вновь:

$$\nabla_k l = \nabla_k L + \sum_{q=1}^n \nabla_k \tilde{\nabla}^q H \cdot \tilde{\nabla}_q L.\tag{4.15}$$

Сравнив формулы (4.14) и (4.15) и приняв во внимание (4.7), получим

$$\nabla_k L = -\nabla_k H.\tag{4.16}$$

В бескоординатной форме равенство (4.16) имеет вид $\nabla L = -\nabla H \circ \lambda$.

5. ЛАГРАНЖЕВО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

Теперь все готово для того, чтобы записать уравнения (3.4) в $\mathbf{v}$ -представлении. Используя формулу (4.1), запишем первое из них как

$$\dot{x}^i = \frac{v^i}{\Omega}. \quad (5.1)$$

Расширенное скалярное поле Ω в $\mathbf{p}$ -представлении определяется формулой (2.17). В силу (4.1) и (4.7) его $\mathbf{v}$ -представление задается формулой

$$\Omega = \sum_{i=1}^n v^i \cdot \tilde{\nabla}_i L. \quad (5.2)$$

Для преобразования второго уравнения (3.4) применим формулы (4.7) и (4.16):

$$\nabla_t(\tilde{\nabla}_i L) = \frac{\nabla_i L}{\Omega}. \quad (5.3)$$

В совокупности уравнения (5.1) и (5.3) определяют представление Лагранжа для уравнений динамики волновых фронтов (3.4). Хотя они и записываются посредством функции Лагранжа, но не являются уравнениями Эйлера–Лагранжа из-за наличия в них знаменателя Ω .

6. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ НОРМАЛЬНЫЙ СДВИГ

Заметим, что вектор $\mathbf{v}$ с компонентами $v^1, \dots, v^n$ не является вектором фактической скорости в динамике, описываемой уравнениями (5.1) и (5.3). Обозначим вектор фактической скорости через $\mathbf{u}$. Тогда из уравнения (5.1) получим

$$u^i = \frac{v^i}{\Omega}. \quad (6.1)$$

Знаменатель Ω в (6.1) не является константой, он зависит от $x^1, \dots, x^n$ и от компонент вектора скорости $\mathbf{v}$. Поэтому уравнение (6.1) определяет нелинейное отображение

$$\mu: TM \rightarrow TM, \quad (6.2)$$

подобное преобразованию Лежандра λ . Если это отображение обратимо, то уравнения (5.1) и (5.3) можно преобразовать к ньютоновской форме:

$$\dot{x}^i = u^i, \quad \nabla_t u^i = F^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^n). \quad (6.3)$$

Компоненты вектора силы $\mathbf{F}$ в (6.3) выражаются через функцию Лагранжа L и ее производные. Мы не станем выводить формулу для F^i в общем случае. Вместо этого рассмотрим очень важный частный случай, когда L является послойно сферически-симметричным расширенным скалярным полем в римановом многообразии M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Расширенное тензорное поле $\mathbf{X}$ называется *послойно сферически-симметричным*, если его компоненты зависят только от модуля вектора скорости: $X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n, v)$, где $v = |\mathbf{v}|$. Это означает, что $X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ есть сферически-симметричная функция в пределах отдельных слоев касательного расслоения TM над каждой точкой $p \in M$.

Послойно сферически-симметричные тензорные поля рассматривались в работах [3]–[5]. Теперь предположим, что L есть послойно сферически-симметричное расширенное скалярное поле: $L = L(x^1, \dots, x^n, v)$. В этом случае из (5.2) вытекает, что Ω – тоже послойно сферически-симметричное расширенное скалярное поле:

$$\Omega = |\mathbf{v}| \cdot L'. \quad (6.4)$$

Здесь L' – частная производная функции L по ее последнему аргументу $v = |\mathbf{v}|$. Подставив (6.4) в равенство (6.1), получим

$$u^i = \frac{N^i}{L'}, \quad |\mathbf{u}| = \frac{1}{|L'|}. \quad (6.5)$$

Через N^i в (6.5) обозначены компоненты единичного вектора $\mathbf{N}$, направленного вдоль вектора скорости $\mathbf{v}$. Используя это обозначение, определим операторы ортогонального проектирования $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$:

$$Q_k^i = N^i N_k, \quad P_k^i = \delta_k^i - N^i N_k. \quad (6.6)$$

Первый из них – проектор на направление вектора $\mathbf{v}$, второй – на гиперплоскость, перпендикулярную к $\mathbf{v}$. Операторы проектирования $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$ с компонентами (6.6) дополняют друг к другу. Это значит, что

$$\mathbf{Q} + \mathbf{P} = 1, \quad \mathbf{Q} \circ \mathbf{P} = \mathbf{P} \circ \mathbf{Q} = 0.$$

Теперь рассмотрим уравнение (5.3). Для его левой части имеем

$$\nabla_t(\tilde{\nabla}_i L) = \sum_{k=1}^n \nabla_k \tilde{\nabla}_i L \cdot \dot{x}^k + \sum_{k=1}^n \tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_i L \cdot \nabla_t v^k. \quad (6.7)$$

Прямыми вычислениями для различных производных в (6.7) находим

$$\tilde{\nabla}_i L = L' \cdot \frac{v_i}{|\mathbf{v}|} = L' \cdot N_i, \quad (6.8)$$

$$\nabla_k \tilde{\nabla}_i L = \nabla_k L' \cdot N_i, \quad (6.9)$$

$$\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_i L = L'' \cdot Q_{ik} + \frac{L'}{|\mathbf{v}|} \cdot P_{ik}. \quad (6.10)$$

Подставляя производные (6.9) и (6.10) в формулу (6.7), получаем равенство

$$\nabla_t(\tilde{\nabla}_i L) = \sum_{k=1}^n \frac{\nabla_k L'}{L'} \cdot Q_{ik}^k + \sum_{k=1}^n \left(L'' \cdot Q_{ik} + \frac{L'}{|\mathbf{v}|} \cdot P_{ik} \right) \cdot \nabla_t v^k. \quad (6.11)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы связать $\nabla_t v^k$ в (6.11) с $\nabla_t u^k$. С этой целью применим оператор ∇_t к первому из равенств (6.5):

$$\nabla_t u^k = \sum_{s=1}^n \left(\frac{1}{|\mathbf{v}| \cdot L'} \cdot P_s^k - \frac{L''}{(L')^2} \cdot Q_s^k \right) \cdot \nabla_t v^s - \sum_{s=1}^n \frac{\nabla_s L'}{(L')^3} \cdot Q^{sk}. \quad (6.12)$$

Чтобы выразить $\nabla_t v^s$ через $\nabla_t u^k$, надо обратить матрицу D с компонентами

$$D_s^k = \frac{1}{|\mathbf{v}| \cdot L'} \cdot P_s^k - \frac{L''}{(L')^2} \cdot Q_s^k.$$

Она обратима тогда и только тогда, когда $L'' \neq 0$; условие $L' \neq 0$ выполняется автоматически. Действительно, $\Omega = |\mathbf{v}| \cdot L' \neq 0$, что вытекает из условия трансверсальности (2.18). Обратив матрицу D и применив D^{-1} к (6.12), получим следующее выражение для производной $\nabla_t v^k$:

$$\nabla_t v^k = \sum_{s=1}^n \left(|\mathbf{v}| \cdot L' \cdot P_s^k - \frac{(L')^2}{L''} \cdot Q_s^k \right) \cdot \nabla_t u^s - \sum_{s=1}^n \frac{\nabla_s L'}{L' \cdot L''} \cdot Q^{sk}. \quad (6.13)$$

Подставив (6.13) в правую часть формулы (6.11), получим

$$\nabla_t (\tilde{\nabla}_i L) = (L')^2 \sum_{k=1}^n (P_{ik} - Q_{ik}) \cdot \nabla_t u^k. \quad (6.14)$$

Далее подставим (6.14) в уравнение (5.3) и воспользуемся формулой (6.4) для Ω . Это приводит к уравнению

$$(L')^2 \sum_{k=1}^n (P_{ik} - Q_{ik}) \cdot \nabla_t u^k = \frac{\nabla_i L}{|\mathbf{v}| \cdot L'}, \quad (6.15)$$

которое можно решить в явном виде. Для $\nabla_t u^k$ это дает

$$\nabla_t u^k = \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i L}{|\mathbf{v}| \cdot (L')^3} \cdot (g^{ik} - 2N^i N^k). \quad (6.16)$$

Сравнивая (6.16) и (6.3), мы видим, что правая часть (6.16) представляет собой выражение для F^k . Формула для ковариантных компонент F_k более элегантна:

$$F_k = \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i L}{|\mathbf{v}| \cdot (L')^3} \cdot (\delta_k^i - 2N^i N_k). \quad (6.17)$$

Но все еще остается проблема, состоящая в том, что величины $\nabla_i L$, L' и $|\mathbf{v}|$ в правой части (6.17) заданы в $\mathbf{v}$ -представлении, в то время как компоненты вектора силы в (6.3) должны быть выражены через компоненты фактической скорости $\mathbf{u}$. Преобразуем (6.17) к $\mathbf{u}$ -представлению при помощи отображения (6.2).

Обозначим через h функцию Гамильтона H в $\mathbf{v}$ -представлении, т.е. положим $h = H \circ \lambda$. Для h верна формула, аналогичная (4.6) для l :

$$h = \sum_{i=1}^n v^i \cdot \tilde{\nabla}_i L - L = |\mathbf{v}| \cdot L' - L. \quad (6.18)$$

Продифференцировав (6.18), получим

$$\nabla_i h = v \cdot \nabla_i L' - \nabla_i L, \quad h' = v \cdot L''. \quad (6.19)$$

Пусть W — это $\mathbf{u}$ -представление для h . Обозначим через u модуль вектора фактической скорости $\mathbf{u}$. В силу (6.5) и (6.18) заключаем, что W является послойно сферически-симметричным расширенным скалярным полем в $\mathbf{u}$ -представлении, т.е. $W = W(x^1, \dots, x^n, u)$, где $u = |\mathbf{u}|$. Посчитаем производные функции W :

$$\begin{aligned} W' &= \frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = h' \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^{-1}, \\ \nabla_i W &= \frac{\partial W}{\partial x^i} = \nabla_i h - h' \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial u}{\partial v} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Вспомним, что u и v связаны вторым из равенств (6.5). Запишем его как $u = \varepsilon/L'$, где $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от знака производной L' , и получим

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\varepsilon \cdot L''}{(L')^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x^i} = -\frac{\varepsilon \cdot \nabla_i L'}{(L')^2}. \quad (6.21)$$

Используя (6.19) и (6.21), можно преобразовать (6.20) следующим образом:

$$W' = -\varepsilon \cdot |\mathbf{v}| \cdot (L')^2, \quad \nabla_i W = -\nabla_i L. \quad (6.22)$$

Если записать второе из равенств (6.5) как $|\mathbf{u}| = \varepsilon/L'$, то из (6.22) получим

$$|\mathbf{u}| \cdot \frac{\nabla_i W}{W'} = \frac{\nabla_i L}{|\mathbf{v}| \cdot (L')^3}. \quad (6.23)$$

Сравнив (6.23) с формулой (6.17) для компонент вектора силы $\mathbf{F}$, можно переписать последнюю в следующем виде:

$$F_k = -|\mathbf{u}| \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i W}{W'} \cdot (2N^i N_k - \delta_k^i). \quad (6.24)$$

Формула (6.24) полностью совместна с (6.3), ее правая часть должным образом преобразована к $\mathbf{u}$ -представлению.

Формула (6.24) задает силовое поле ньютоновской динамической системы (6.3), описывающей динамику волнового фронта для линейного волнового уравнения (1.4). Но

наиболее важным для нас является тот факт, что формула (6.24) указывает на связь явления движения волновых фронтов с теорией ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг гиперповерхностей. Эта теория была развита в серии работ [5]–[19], на основе которых были подготовлены диссертации [4] и [20]. Согласно результатам [4] и [5] силовое поле любой ньютоновской динамической системы, допускающей нормальный сдвиг гиперповерхностей в римановом многообразии размерности $n \geq 3$, задается формулой

$$F_k = \frac{h(W) \cdot N_k}{W'} - |\mathbf{u}| \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i W}{W'} \cdot (2N^i N_k - \delta_k^i), \quad (6.25)$$

где $W = W(x^1, \dots, x^n, |\mathbf{u}|)$ – произвольное послонно сферически-симметричное расширенное скалярное поле с $W' \neq 0$, а $h = h(w)$ – произвольная функция одной переменной.

7. ВЫВООДЫ

Сравнивая формулы (6.24) и (6.25), мы видим, что они совпадают при $h = 0$. Первое слагаемое в правой части (6.25) отвечает за процессы диссипации и накачки энергии. В отсутствие этих процессов, т.е. для случая $h = 0$, можно сделать следующие выводы:

1) консервативные ньютоновские динамические системы, допускающие нормальный сдвиг гиперповерхностей в римановых многообразиях размерности $n \geq 3$, совпадают с системами, описывающими динамику волновых фронтов в квазиклассическом пределе для волновых операторов с послонно сферически-симметричным символом H ;

2) эти системы не являются гамильтоновыми, но они очень близки к ним (см. уравнения (3.4));

3) эти системы обладают одним первым интегралом, который интерпретируется как энергия (или как функция Гамильтона в $\mathbf{p}$ -представлении).

Послонная сферическая симметрия H вытекает из послонной сферической симметрии функции Лагранжа L . Если учесть при этом, что H есть полином относительно компонент вектора $\mathbf{p}$, то мы придем к следующему классу линейных дифференциальных операторов:

$$H = \sum_{q=0}^m a_{(q)} \cdot (\Delta)^q,$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами для метрики $\mathbf{g}$ риманова многообразия M , а коэффициенты $a_{(q)} = a_{(q)}(x^1, \dots, x^n)$ – некоторые скалярные поля на многообразии M . Реальным физическим процессам отвечают случаи $m = 1$ и $m = 2$. Оператор $H = \Delta + a_{(0)}$ – это оператор Гельмгольца для волновых процессов в средах. Условие $a_{(0)} \neq \text{const}$ соответствует неоднородности среды, а выбор неевклидовой метрики $\mathbf{g}$ позволяет описать также и неизотропные среды. Квадрат оператора Лапласа–Бельтрами встречается в задачах теории упругости. Тот факт, что W является первым интегралом ньютоновской динамической системы с силовым полем (6.24), был уже известен (см. работу [5] или гл. VII в диссертации [4]), однако его интерпретация не была столь ясной. Проблема интерпретации неконсервативного члена $(h(W) \cdot N_k)/W'$ в формуле (6.25) (например, в

смысле теории волновых фронтов [1], [21]), остается пока открытой. Методы, изложенные в книге [22], могут оказаться полезными при ее рассмотрении.

Список литературы

- [1] *М. В. Федорук*. Уравнения с быстро осциллирующими решениями. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–56.
- [2] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
- [3] *R. A. Sharipov*. A note on Newtonian, Lagrangian, and Hamiltonian dynamical systems in Riemannian manifolds. math.DG/0107212.
- [4] *Р. А. Шарипов*. Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг. Дисс. докт. ф.-м. н. Готовится к защите; math.DG/0002202.
- [5] *Р. А. Шарипов*. Матем. сб. 2001. Т. 192. № 6. С. 105–144; math.DG/0006125.
- [6] *А. Ю. Болдин, Р. А. Шарипов*. Dynamical systems accepting the normal shift. Preprint № 0001-M of Bashkir State University, Ufa, April, 1993.
- [7] *А. Ю. Болдин, Р. А. Шарипов*. ТМФ. 1993. Т. 97. № 3. С. 386–395.
- [8] *А. Ю. Болдин, Р. А. Шарипов*. ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 264–269.
- [9] *А. Ю. Болдин, Р. А. Шарипов*. Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 2. С. 165–167.
- [10] *Р. А. Шарипов*. ТМФ. 1994. Т. 101. № 1. С. 85–93.
- [11] *А. Ю. Болдин, В. В. Дмитриева, С. С. Сафин, Р. А. Шарипов*. ТМФ. 1995. Т. 103. № 2. С. 256–266.
- [12] *А. Ю. Болдин, А. А. Бронников, В. В. Дмитриева, Р. А. Шарипов*. ТМФ. 1995. Т. 103. № 2. С. 267–275.
- [13] *А. Ю. Болдин*. On the self-similar solutions of normality equation in two-dimensional case. In: Dynamical systems accepting the normal shift. Ed. R. A. Sharipov. Ufa: Bash.GU, 1994. P. 31–39; patt-sol/9407002.
- [14] *Р. А. Шарипов*. ТМФ. 1995. Т. 103. № 2. С. 276–282.
- [15] *Р. А. Шарипов*. УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 105.
- [16] *Р. А. Шарипов*. Higher dynamical systems accepting the normal shift. In: Dynamical systems accepting the normal shift. Ed. R. A. Sharipov. Ufa: Bash.GU, 1994. P. 41–65.
- [17] *В. В. Дмитриева*. Об эквивалентности двух форм записи уравнений нормальности для динамических систем $\mathbb{R}^n$. В сб.: Интегрируемость в динамических системах. Ред. Л. А. Калякин. Уфа: Инст. Математики БНЦ УрО РАН, 1994. С. 5–16.
- [18] *А. А. Бронников, Р. А. Шарипов*. Axially symmetric dynamical systems accepting the normal shift in $\mathbb{R}^n$. В сб.: Интегрируемость в динамических системах. Ред. Л. А. Калякин. Уфа: Инст. Математики БНЦ УрО РАН, 1994. С. 62–69.
- [19] *А. Ю. Болдин, Р. А. Шарипов*. Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 37–62.
- [20] *А. Ю. Болдин*. Двумерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг. Дисс. канд. ф.-м. н. Готовится к защите; math.DG/0011134.
- [21] *В. И. Арнольд*. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996.
- [22] *L. Mangiarotti, G. Sardanashvily*. Gauge Mechanics. Singapore: World Scientific, 1998.

Поступила в редакцию 15.IX.2001 г.