Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Абаренкова, А. Г. Пронько, Температурный коррелятор в абсолютно анизотропном XXZ -магнетике Гейзенберга, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 2, 288–303

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 07:28:50

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ КОРРЕЛЯТОР В АБСОЛЮТНО АНИЗОТРОПНОМ XXZ -МАГНЕТИКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА¹⁾

Рассматривается одномерная XXZ -цепочка Гейзенберга спина $1/2$ при $\Delta = -\infty$, и вычисляется разновременная температурная корреляционная функция третьих компонент локальных спинов. В термодинамическом пределе для корреляционной функции получено выражение в терминах определителей Фредгольма линейных интегральных операторов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача вычисления корреляционных функций в интегрируемых квантовых моделях, изучаемых с помощью метода анзаца Бете, является одной из интересных и актуальных задач в теории квантовых интегрируемых систем [1]. Интенсивно исследуемая в этом направлении модель — одномерный XXZ -магнетик Гейзенберга спина $1/2$. Несмотря на существенный прогресс, достигнутый в решении этой задачи (см., например, монографии [1], [2], оригинальные работы [3], [4] и ссылки в них), для разновременных корреляционных функций при конечной температуре известны представления только при нулевом значении параметра анизотропии, $\Delta = 0$. Этот частный случай XXZ -цепочки является точкой свободных фермионов модели и известен как $XX0$ -цепочка Гейзенберга. Для $XX0$ -цепочки существуют представления корреляторов как для модели на конечной решетке [5], так и в термодинамическом пределе [6], когда они выражаются через определители Фредгольма линейных интегральных операторов специального вида — так называемых *интегрируемых* интегральных операторов [7]. Ценность представления корреляторов в терминах определителей Фредгольма заключается в возможности непосредственной формулировки ассоциированной с интегрируемыми интегральными операторами матричной задачи Римана–Гильберта и построения асимптотических представлений для корреляторов на больших расстояниях и временах [1], [8], [9].

¹⁾ Результаты статьи докладывались на Третьем международном семинаре ПОМИ–Флоренция по квантовым группам и интегрируемым системам, посвященном памяти А. Г. Изергина (С.-Петербург, 2–6 июля 2001 г.).

* Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: agp@pdmi.ras.ru

В настоящей работе мы рассматриваем другой частный случай XXZ -магнетика, а именно XXZ -магнетик при $\Delta = -\infty$, не являющийся точкой свободных фермионов модели. В этом случае также удастся получить явные представления для температурных корреляционных функций в термодинамическом пределе в терминах определителей Фредгольма интегрируемых интегральных операторов. Точнее, мы рассматриваем XXZ -магнетик в постоянном внешнем поле h в пределе $\Delta \rightarrow -\infty$ и $h \rightarrow \infty$ при фиксированном значении величины $h + 2\Delta$, что обеспечивает ограниченность гамильтониана снизу. В этом пределе XXZ -магнетик допускает естественную интерпретацию в терминах решеточной модели квантового непроницаемого бозе-газа частиц с радиусом, равным шагу решетки.

Основной задачей настоящей работы является вычисление парного температурного коррелятора третьих компонент локальных спинов. Заметим, что в модели $XX0$ -магнетика он вычисляется в явном виде [6], [10]. В рассматриваемом нами случае XXZ -магнетика при $\Delta = -\infty$ эта корреляционная функция точно выражается через определители Фредгольма линейных интегральных операторов, которые присутствуют в представлениях корреляторов в модели Хаббарда при бесконечно сильном взаимодействии [11]. С другой стороны, полученное нами представление имеет ту же структуру, что и корреляторы в фазовой модели, рассмотренной в работе [12].

Необходимо отметить, что эффективная модель, описывающая XXZ -магнетик при $\Delta = -\infty$, принадлежит к классу моделей, введенных Алкарацем и Бариевым [13] и являющихся обобщением модели XXZ -магнетика на случай *квазилокального* взаимодействия. Точнее, рассматриваемая нами модель в обозначениях работы [13] соответствует выбору дискретного параметра квазилокальности (радиуса квантовых бозе-частиц на решетке) $t = 1$ и параметра анизотропии (константы связи) $\Delta = 0$. Интересно отметить, что упоминавшаяся выше фазовая модель [12] (см. также [14]) тоже принадлежит к классу моделей, введенных в [13], и соответствует параметрам $\Delta = 0$ и $t = -1$. Этот факт отчасти объясняет причину совпадения структур корреляционных функций в фазовой модели и в модели XXZ -магнетика при $\Delta = -\infty$, исследуемой в настоящей работе.

План статьи следующий. Во втором разделе формулируется эффективная модель, в которую переходит XXZ -цепочка Гейзенберга в пределе $\Delta \rightarrow -\infty$, и описывается пространство состояний модели. В разделе 3 вычисляются различные матричные элементы в базисе собственных состояний эффективного гамильтониана, а именно, скалярное произведение, формфактор и парное нормированное среднее. Раздел 4 посвящен обсуждению термодинамики модели и выводу представления для корреляционной функции в термодинамическом пределе как при нулевой, так и при конечной температуре.

2. XXZ -ЦЕПОЧКА ГЕЙЗЕНБЕРГА ПРИ $\Delta = -\infty$

Динамика XXZ -цепочки Гейзенберга на периодической цепочке, состоящей из M узлов, во внешнем магнитном поле h задается гамильтонианом

$$H_{XXZ} = - \sum_{m=1}^M \left\{ \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+ + \sigma_{m+1}^- \sigma_m^+ + \frac{\Delta}{2} (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - 1) + \frac{h}{2} \sigma_m^z \right\}, \quad (2.1)$$

где $\sigma_m^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_m^x \pm i\sigma_m^y)$ и $\sigma_m^x, \sigma_m^y, \sigma_m^z$ — матрицы Паули, ассоциированные с m -м узлом цепочки. Операторы $\sigma_m^{x,y,z}$ действуют нетривиально в двумерном пространстве $\mathcal{H}_m$, пространство состояний $\mathcal{H}$ гамильтониана (2.1) 2^M -мерно, $\mathcal{H} = \bigotimes_{m=1}^M \mathcal{H}_m$. Периодические граничные условия означают, что $\sigma_{M+1}^a = \sigma_1^a$, $a = x, y, z$.

Парный температурный коррелятор третьих компонент локальных спинов модели на конечной цепочке определяется стандартным способом как температурное нормированное среднее

$$\langle \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \rangle^{(T,M)} = \frac{\text{Sp}_{\mathcal{H}} \{ e^{-\beta H_{X X Z}} \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \}}{\text{Sp}_{\mathcal{H}} \{ e^{-\beta H_{X X Z}} \}}, \quad a = x, y, z, \quad (2.2)$$

где $\beta = 1/T$ — обратная температура, а зависимость от времени введена каноническим образом:

$$\sigma_m^z(t) = e^{itH_{X X Z}} \sigma_m^z e^{-itH_{X X Z}}. \quad (2.3)$$

Задача заключается в вычислении температурного коррелятора (2.2) в термодинамическом пределе:

$$\langle \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \rangle^{(T)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \langle \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \rangle^{(T,M)}. \quad (2.4)$$

В настоящей работе эта задача решается в частном случае $\Delta = -\infty$.

Выведем эффективный гамильтониан $X X Z$ -цепочки Гейзенберга в пределе $\Delta \rightarrow -\infty$. Выберем для определенности в качестве порождающего состояния $|0\rangle$ ферромагнитное состояние со всеми спинами, направленными вверх:

$$|0\rangle = \bigotimes_{m=1}^M |0\rangle_m, \quad |0\rangle_m \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_m, \quad (2.5)$$

тогда пространство $\mathcal{H}$ порождается действием операторов σ_m^- на состояние $|0\rangle$. Введем операторы локальной плотности $\hat{q}_m = \frac{1}{2}(1 - \sigma_m^z)$, которые обладают свойствами

$$\hat{q}_m |0\rangle_m = 0, \quad \hat{q}_m |1\rangle_m = |1\rangle_m, \quad |1\rangle_m = \sigma_m^- |0\rangle_m. \quad (2.6)$$

Для перехода к пределу $\Delta \rightarrow -\infty$ в (2.1) положим

$$h = -2\Delta - \mu, \quad (2.7)$$

где параметр μ предполагается в дальнейшем не зависящим от Δ . С учетом (2.5) и (2.7) гамильтониан (2.1) приобретает вид $H_{X X Z} = \tilde{H}_{X X Z} + M(\Delta + \mu/2)$, где

$$\tilde{H}_{X X Z} = - \sum_{m=1}^M \{ \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+ + \sigma_{m+1}^- \sigma_m^+ + 2\Delta \hat{q}_m \hat{q}_{m+1} + \mu \hat{q}_m \}. \quad (2.8)$$

Гамильтониан (2.8) естественнее интерпретировать в терминах частиц, нежели спинов. Действительно, он описывает взаимодействие непроницаемых квантовых бозе-частиц на циклической решетке, которые, оказываясь в соседних узлах, взаимодействуют с энергией -2Δ ; положительная энергия взаимодействия соответствует отталкиванию. Непроницаемость означает, что две (и более) бозе-частицы не могут занимать один узел. В пределе $\Delta \rightarrow -\infty$ энергия отталкивания становится бесконечной, и бозе-частицы не могут занимать также и два соседних узла. В результате гамильтониан (2.8) при $\Delta = -\infty$ описывает квантовый решеточный бозе-газ непроницаемых частиц с единичным радиусом (точнее, с радиусом, равным шагу решетки). В силу этой интерпретации эффективный гамильтониан XXZ -цепочки Гейзенберга при $\Delta = -\infty$ может быть записан в виде

$$H = \Pi \tilde{H}_{XXZ} \Pi = -\Pi \left[\sum_{m=1}^M \{ \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+ + \sigma_{m+1}^- \sigma_m^+ + \mu \hat{q}_m \} \right] \Pi, \quad (2.9)$$

где Π – проектор

$$\Pi = \prod_{m=1}^M (1 - \hat{q}_m \hat{q}_{m+1}), \quad (2.10)$$

выделяющий из пространства состояний $\mathcal{H}$ гамильтониана (2.8) физическое подпространство $\mathcal{F}$ состояний с конечной энергией в пределе $\Delta \rightarrow -\infty$. Все состояния, лежащие в ортогональном подпространстве $\mathcal{H} \setminus \mathcal{F}$, имеют бесконечную положительную энергию в этом пределе и, следовательно, исключаются из физического пространства состояний модели при $\Delta = -\infty$.

Пространство $\mathcal{F}$ естественно представимо как сумма подпространств $\mathcal{F}_N$ с фиксированным собственным значением N оператора полного числа частиц $Q = \hat{q}_1 + \dots + \hat{q}_M$:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{[M/2]} \mathcal{F}_N, \quad (2.11)$$

где $[]$ означает целую часть числа. Подпространства $\mathcal{F}_N$ образованы векторами

$$\sigma_{n_1}^- \sigma_{n_2}^- \dots \sigma_{n_N}^- |0\rangle, \quad n_1, \dots, n_N \in D_N(n_1, \dots, n_N), \quad (2.12)$$

где область $D_N(n_1, \dots, n_N)$ значений целых чисел $n_1, \dots, n_N$ определяется условиями

$$D_N(n_1, \dots, n_N): \begin{cases} 1 \leq n_1 < n_2 - 1, \\ n_{j+1} - n_j \geq 2, \quad j = 2, \dots, N-1, \\ n_N \leq \min(M, n_1 + M - 2), \end{cases} \quad (2.13)$$

причем последнее из них фактически означает, что $n_N \neq M$ при $n_1 = 1$ в силу периодических граничных условий. Размерность подпространств $\mathcal{F}_N$ равна

$$\dim \mathcal{F}_N = \binom{M-N+1}{N} - \binom{M-N-1}{N-2} = M \frac{(M-N-1)!}{N! (M-2N)!}. \quad (2.14)$$

Собственные состояния гамильтониана (2.9) строятся путем перехода к пределу $\Delta \rightarrow -\infty$ в выражениях для собственных состояний XXZ -цепочки (см., например, [1],[15]). Собственное состояние гамильтониана (2.9) имеет вид

$$|\Psi_N(\{k\})\rangle = \sum_{D(n_1, \dots, n_N)} \chi_N(\{k\}|\{n\}) \sigma_{n_1}^- \dots \sigma_{n_N}^- |0\rangle, \quad (2.15)$$

где волновая функция $\chi_N(\{k\}|\{n\})$, параметризуемая набором импульсов $\{k\} = k_1, \dots, k_N$ и координат $\{n\} = n_1, \dots, n_N \in D_N(n_1, \dots, n_N)$, дается выражением

$$\chi_N(\{k\}|\{n\}) = \sum_{Q \in S_N} (-1)^Q \prod_{j=1}^N e^{ik_{Q_j}(n_j - j + 1)}. \quad (2.16)$$

Здесь $(-1)^Q$ означает четность перестановки $Q: 1, \dots, N \rightarrow Q_1, \dots, Q_N$ из симметрической группы S_N . Все импульсы в наборе $k_1, \dots, k_N$, параметризующие собственные состояния (2.12), различны и являются решениями системы уравнений Бете

$$e^{ik_j(M-N)} = (-1)^{N-1} e^{-i(k_1 + \dots + k_N)}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.17)$$

Собственное значение $E_N(\{k\})$ гамильтониана (2.6) на состояниях (2.12) равно

$$E_N(\{k\}) = - \sum_{a=1}^N (2 \cos k_a + \mu); \quad (2.18)$$

параметр μ играет роль химического потенциала.

Система уравнений Бете (2.17) решается явно, все ее решения вещественны. В силу полной антисимметрии состояний (2.15) относительно перестановок импульсов $k_1, \dots, k_N$ различные состояния соответствуют различным наборам $\{k\}$; наборы $\{k\}$ и $\{k'\}$ различны, если $\{k'\}$ не является какой-либо перестановкой набора $\{k\}$. Таким образом, перебор всех различных состояний (2.12) достигается перебором всех решений системы (2.14), удовлетворяющих условию $\xi \leq k_1 < \dots < k_N < 2\pi + \xi$, где ξ — некоторое вещественное число.

Опишем два эквивалентных способа параметризации независимых решений системы уравнений Бете (2.17). Перепишем ее в виде

$$k_j = \frac{2\pi}{M-N} \left(-\frac{N-1}{2} + \tilde{I}_j \right) - \frac{k_1 + \dots + k_N}{M-N}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.19)$$

где $\tilde{I}_j$ — некоторые целые числа. Удобно ввести квазиимпульсы $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_N$,

$$\tilde{k}_j = \frac{2\pi}{M-N} \left(-\frac{N-1}{2} + \tilde{I}_j \right), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.20)$$

тогда (2.19) принимает вид линейной системы уравнений, связывающей наборы $\{\tilde{k}\}$ и $\{k\}$. Первый способ параметризации основан на обращении этой системы уравнений, что дает решение для $\{k\}$ в терминах целых чисел $\{\tilde{I}\}$:

$$k_j = \tilde{k}_j - \frac{\tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_N}{M}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что независимые решения параметризуются наборами целых чисел $\{\tilde{I}\}$, которые лежат в области $\tilde{D}_N(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_N)$, определяемой условиями

$$\tilde{D}_N(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_N): \begin{cases} 1 \leq \tilde{I}_1 < \dots < \tilde{I}_N \leq M - N + 1, \\ I_N \neq I_1 + M - N. \end{cases} \quad (2.22)$$

Заметим, что область $\tilde{D}_N$ изоморфна области D_N (2.13); число решений, описываемых (2.22), равно размерности подпространства $\mathcal{F}_N$ (2.14). Изоморфизм областей следует из того факта, что целые числа $\tilde{n}_j = n_j - j + 1$, фигурирующие в показателях экспонент в выражении для волновой функции (2.16), лежат в области $\tilde{D}_N(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)$, определенной в (2.22), если $n_1, \dots, n_N \in D_N(n_1, \dots, n_N)$. Числа $\{\tilde{n}\}$ можно интерпретировать как квазикоординаты, сопряженные квазиимпульсам $\{\tilde{k}\}$, причем значения $\{\tilde{n}\}$ и $\{\tilde{I}\}$ лежат в области $\tilde{D}_N$. Это означает, что собственные состояния (2.15) образуют полный базис в подпространстве $\mathcal{F}_N$.

Второй способ параметризации независимых решений, который оказывается более удобным, например, для суммирования по промежуточным состояниям при вычислении нормированных средних значений, основан на условии квантования для полного импульса

$$k_1 + \dots + k_N = \frac{2\pi}{M}\ell \mod 2\pi, \quad \ell = 0, \dots, M - 1, \quad (2.23)$$

и непосредственно на формуле (2.19), которая в силу (2.23) означает, что импульсы $\{k\}$ равны

$$k_j = \frac{2\pi}{M - N} \left(-\frac{N - 1}{2} + I_j \right) - \frac{K_\ell}{M - N}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.24)$$

где $K_\ell \equiv (2\pi/M)\ell$, а все целые числа $I_1, \dots, I_N$ могут отличаться от $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_N$ в (2.19) на некоторое целое: $I_j = \tilde{I}_j + a$. Из (2.24) следует, что независимые решения параметризуются набором целых чисел $1 \leq I_1 < \dots < I_N \leq M - N$ и $\ell = 0, \dots, M - 1$, которые связаны условием

$$\sum_{j=1}^N I_j - \frac{N(N - 1)}{2} = \ell \mod (M - N). \quad (2.25)$$

Аналогичная параметризация использовалась при вычислении корреляторов фазовой модели [12], в которой уравнения Бете имеют аналогичный вид.

Таким образом, собственные состояния (2.15) образуют полную ортогональную систему векторов в подпространстве $\mathcal{F}_N$, и норма состояний (2.15) равна

$$\langle \Psi_N(k_1, \dots, k_N) | \Psi_N(k_1, \dots, k_N) \rangle = M(M - N)^{N-1}, \quad (2.26)$$

что будет доказано в следующем разделе.

В силу полноты базиса собственных функций все операторы, действующие в подпространстве $\mathcal{F}$, могут быть эквивалентно определены с помощью спектрального разложения. Проектор Π (2.10), играющий роль единичного оператора в $\mathcal{F}$, записывается в виде

$$\Pi = \sum_{N=0}^{[M/2]} \sum_{\{k\}} \frac{|\Psi_N(\{k\})\rangle \langle \Psi_N(\{k\})|}{M(N-M)^{N-1}}. \quad (2.27)$$

Соответственно эффективный гамильтониан XXZ -магнетика при $\Delta = -\infty$ может быть определен как

$$H = \sum_{N=0}^{[M/2]} \sum_{\{k\}} \frac{|\Psi_N(\{k\})\rangle E_N(\{k\}) \langle \Psi_N(\{k\})|}{M(N-M)^{N-1}}, \quad (2.28)$$

где энергия $E_N(\{k\})$ дается формулой (2.18). Суммирование по $\{k\}$ в (2.27) и (2.28) означает суммирование по независимым решениям уравнений Бете в N -частичном секторе.

Корреляционная функция (2.2) при $\Delta = -\infty$ принимает вид

$$\langle \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \rangle^{(T,M)} = \frac{\text{Sp}_{\mathcal{F}} \{ e^{-\beta H} \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \}}{\text{Sp}_{\mathcal{F}} \{ e^{-\beta H} \}}, \quad (2.29)$$

где зависимость от времени операторов $\sigma_m^z(t)$ дается формулой (2.3) с эффективным гамильтонианом H (2.9). Таким образом, задача вычисления коррелятора (2.2) XXZ -цепочки при $\Delta = -\infty$ сводится к вычислению нормированных средних значений (диагональных матричных элементов) парных операторов локальных спинов в базисе состояний (2.15).

3. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРОВ

В этом разделе вычисляются скалярное произведение, формфактор и нормированные средние значения операторов локальной плотности; получение последних эквивалентно нахождению нормированных средних значений третьих компонент локальных спинов.

Начнем с вычисления простейшего матричного элемента – скалярного произведения двух собственных состояний (2.15), для которого, очевидно, справедливо представление

$$\langle \Psi_N(\{p\}) | \Psi_N(\{k\}) \rangle = \sum_{D_N(n_1, \dots, n_N)} \chi_N^*(\{p\}|\{n\}) \chi_N(\{k\}|\{n\}), \quad (3.1)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Область $D_N(n_1, \dots, n_N)$ значений целых чисел $n_1, \dots, n_N$, по которым производится суммирование, определена условием (2.13). Учитывая явный вид волновой функции (2.16), изоморфизм областей $D_N(n_1, \dots$

$\dots, n_N)$ и $\tilde{D}_N(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)$ (см. (2.22)) и уравнения Бете (2.17), легко заметить, что область суммирования в (3.1) может быть последовательно изменена:

$$\sum_{D_N(n_1, \dots, n_N)} \rightarrow \sum_{\tilde{D}_N(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)} \rightarrow \sum_{1 \leq \tilde{n}_1 < \dots < \tilde{n}_N \leq M-N+1} \rightarrow \frac{1}{N!} \sum_{\tilde{n}_1=1}^{M-N+1} \dots \sum_{\tilde{n}_N=1}^{M-N+1}. \quad (3.2)$$

Это позволяет записать скалярное произведение как

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\{p\}) | \Psi_N(\{k\}) \rangle &= \frac{1}{N!} \sum_{\tilde{n}_1=1}^{M-N+1} \dots \sum_{\tilde{n}_N=1}^{M-N+1} \det_N \{e^{-ip_a \tilde{n}_b}\} \det_N \{e^{ik_a \tilde{n}_b}\} = \\ &= \sum_{Q \in S_N} (-1)^Q \prod_{j=1}^N \sum_{\tilde{n}_j=1}^{M-N+1} e^{i(k_j - p_{Q_j}) \tilde{n}_j} \end{aligned} \quad (3.3)$$

и выразить его через определитель $(N \times N)$ -матрицы A :

$$\langle \Psi_N(\{p\}) | \Psi_N(\{k\}) \rangle = e^{i(K-P)} \det_N A, \quad (3.4)$$

элементы которой равны

$$A_{ab} = \frac{e^{-i(K-P)} - 1}{e^{i(k_a - p_b)} - 1} + e^{-i(K-P)}. \quad (3.5)$$

Через K и P обозначены полные импульсы, $K = k_1 + \dots + k_N$, $P = p_1 + \dots + p_N$. При выводе формул (3.4) и (3.5) использовался тот факт, что $\{k\}$ и $\{p\}$ являются решениями уравнений Бете (2.17). Заметим, что из уравнений Бете следует, что $k_a \neq p_b$, $a, b = 1, \dots, N$, если $K \neq P \pmod{2\pi}$; все элементы матрицы A конечны для любых двух решений $\{k\}$ и $\{p\}$ уравнений Бете.

Рассмотрим значения, которые принимает правая часть (3.4). Из уравнений Бете следует, что при $K = P \pmod{2\pi}$ элементы матрицы A равны $A_{ab} = (M - N)\delta_{k_a, p_b} + 1$, следовательно,

$$\begin{aligned} \det_N A &= \delta_{K, P} \det_N A + (1 - \delta_{K, P}) \det_N A = \\ &= \delta_{K, P} \det_N ((M - N)J + E) + (1 - \delta_{K, P}) \det_N A, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $(N \times N)$ -матрицы J и E состоят из элементов

$$J_{ab} = \delta_{k_a, p_b}, \quad E_{ab} = 1. \quad (3.7)$$

Очевидно, что в силу трансляционной инвариантности модели (периодических граничных условий) скалярное произведение пропорционально $\delta_{K, P}$, а второе слагаемое в правой части (3.7), нарушающее трансляционную инвариантность, тождественно равно нулю:

$$(1 - \delta_{K, P}) \det_N A = 0. \quad (3.8)$$

Действительно, (3.8) является следствием более общего утверждения: для любых двух произвольных (не являющихся решениями уравнений Бете (2.17)) наборов чисел $\{k\}$ и $\{p\}$ таких, что $k_a \neq p_b \pmod{2\pi}$, $a, b = 1, \dots, N$, и $K \neq P \pmod{2\pi}$ ($K \equiv \sum k_a$ и $P \equiv \sum p_a$), ранг $(N \times N)$ -матрицы A , определенной выражением (3.5), равен $N - 1$.

Таким образом, для скалярного произведения окончательно получаем

$$\langle \Psi_N(\{p\}) | \Psi_N(\{k\}) \rangle = M(M - N)^{N-1} \det_N J, \quad (3.9)$$

откуда следуют ортогональность собственных состояний (2.15) и выражение для нормы (2.26).

Вычислим теперь формфактор оператора локальной плотности

$$F_{N,m}(\{p\}|\{k\}) = \langle \Psi_N(\{p\}) | \hat{q}_m | \Psi_N(\{k\}) \rangle. \quad (3.10)$$

Функция $F_{N,m}(\{p\}|\{k\})$ обладает свойством $F_{N,m}(\{p\}|\{k\}) = F_{N,m}^*(\{k\}|\{p\})$. В силу трансляционной инвариантности

$$F_{N,m}(\{p\}|\{k\}) = e^{im(K-P)} F_{N,M}(\{p\}|\{k\}). \quad (3.11)$$

Вычисление величины $F_{N,M}(\{p\}|\{k\})$ по аналогии с (3.1)–(3.3) приводит к представлению формфактора как суммы первых миноров матрицы A , определяемой выражением (3.5):

$$F_{N,M}(\{p\}|\{k\}) = \det_N(A + E) - \det_N A. \quad (3.12)$$

Линейность (3.12) по элементам матрицы E (3.7) в совокупности с тождеством (3.8) порождает двухпараметрическую свободу в выборе представления для формфактора, в частности справедливо эквивалентное представление

$$F_{N,M}(\{p\}|\{k\}) = M(M - N)^{N-1} \det_N J - e^{i(K-P)} \det_N B, \quad (3.13)$$

где матрица B состоит из элементов

$$B_{ab} = A_{ab} - e^{-i(K-P)} E_{ab} = \frac{e^{-i(K-P)} - 1}{e^{i(k_a - p_b)} - 1}. \quad (3.14)$$

Из (3.13) следует, что формфактор $F_{N,M}(\{p\}|\{k\})$ не равен нулю, если либо $K \neq P$, либо $K = P$ и $\{k\} = \{p\}$. Первый случай дает недиагональные элементы оператора локальной плотности, которые равны с точностью до множителя определителю матрицы B . Второй случай дает диагональные элементы, причем если $k_a = p_a$, $a = 1, \dots, N$, то $B_{ab} = (M - N)\delta_{ab}$ и

$$F_{N,M}(k_1, \dots, k_N | k_1, \dots, k_N) = N(M - N)^{N-1}, \quad (3.15)$$

что с учетом выражения для нормы (2.26) приводит к ожидаемому результату для нормированного среднего оператора $\hat{q}_m$:

$$\langle \hat{q}_m \rangle_N \equiv \frac{\langle \Psi_N(\{k\}) | \hat{q}_m | \Psi_N(\{k\}) \rangle}{\langle \Psi_N(\{k\}) | \Psi_N(\{k\}) \rangle} = \frac{N}{M}. \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь задачу вычисления нормированного среднего значения парного оператора третьих компонент локальных спинов. Эта задача эквивалентна вычислению нормированного среднего парного оператора плотности в силу очевидного соотношения

$$\langle \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \rangle_N = 1 - 4\langle \hat{q}_m \rangle_N + 4\langle \hat{q}_{m+1}(t) \hat{q}_1(0) \rangle_N, \quad (3.17)$$

где величина $\langle \hat{q}_m \rangle_N$ задана выражением (3.16).

Нормированное среднее $\langle \hat{q}_{m+1}(t) \hat{q}_1(0) \rangle_N$ в силу (2.27) представимо в виде суммы по промежуточным состояниям в N -частичном секторе:

$$\langle \hat{q}_{m+1}(t) \hat{q}_1(0) \rangle_N = \sum_{\{p\}} \frac{F_{N,m+1}(\{k\}|\{p\}) F_{N,1}(\{p\}|\{k\})}{M^2(M-N)^{2N-2}} e^{it E_N(\{k\}) - it E_N(\{p\})}, \quad (3.18)$$

где суммирование по $\{p\}$ означает суммирование по независимым решениям уравнений Бете (2.17). Энергия E_N дается формулой (2.18), а формфактор $F_{N,m}(\{p\}|\{k\})$ – формулами (3.11) и (3.13). Подставляя выражение для формфактора в (3.18), для нормированного среднего получаем

$$\langle \hat{q}_{m+1}(t) \hat{q}_1(0) \rangle_N = -1 + \frac{2N}{M} + \sum_{\{p\}} \frac{|\det_N B|^2}{M^2(M-N)^{2N-2}} e^{it E_N(\{k\}) - it E_N(\{p\}) + im(P-K)}. \quad (3.19)$$

Рассмотрим сумму по состояниям $\{p\}$ в выражении (3.19). Для ее вычисления удобно использовать второй способ параметризации решений уравнений Бете, описанный в предыдущем разделе (см. (2.24) и (2.25)). Аналогично (2.20) введем вспомогательные импульсы $\{\tilde{p}\}$:

$$\tilde{p}_j = \frac{2\pi}{M-N} \left(-\frac{N-1}{2} + I_j \right), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.20)$$

тогда

$$p_j = \tilde{p}_j - \frac{P_\ell}{M-N}, \quad P_\ell \equiv \frac{2\pi\ell}{M}. \quad (3.21)$$

Сумма по $\{p\}$ с учетом условий (2.25) записывается в виде

$$\sum_{\{p\}} = \frac{1}{M-N} \sum_{\tilde{p}_1 < \dots < \tilde{p}_N} \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{M-N-1} e^{is(p_1 + \dots + p_N - P_\ell)}, \quad (3.22)$$

где суммирование по $\tilde{p}_1 < \dots < \tilde{p}_N$ означает суммирование по наборам целых чисел $\{I\}$, $1 \leq I_1 < \dots < I_N \leq M-N$. Заметим, что поскольку выражение под знаком суммы в (3.19) является симметричной функцией относительно перестановок импульсов $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N$, обращающейся в нуль при $\tilde{p}_a = \tilde{p}_b$ ($a \neq b$), сумма по $\tilde{p}_1 < \dots < \tilde{p}_N$ может быть заменена на N -кратную сумму,

$$\sum_{\tilde{p}_1 < \dots < \tilde{p}_N} \rightarrow \frac{1}{N!} \sum_{\tilde{p}_1} \dots \sum_{\tilde{p}_N}. \quad (3.23)$$

Используя (3.22), (3.23) и внося суммы по $\tilde{p}$ в определитель по аналогии с (3.3), приходим к следующему представлению для нормированного среднего парного оператора плотности:

$$\langle \hat{q}_{m+1}(t) \hat{q}_1(0) \rangle_N = -1 + \frac{2N}{M} + \frac{M-N}{M^2} \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{M-N-1} e^{i(m-s)\Theta_\ell} \det_N S(s, t; \ell), \quad (3.24)$$

где $\Theta_\ell \equiv P_\ell - K$. Матрица $S(s, t; \ell)$ размерности $N \times N$ состоит из элементов

$$S_{ab} = e^{-i\tau(k_a) - i\tau(k_b)} \frac{\sin^2 \frac{\Theta_\ell}{2}}{(M-N)^2} \sum_{\tilde{p}} \frac{e^{2i\tau(p)}}{\sin\left(\frac{p-k_a}{2}\right) \sin\left(\frac{p-k_b}{2}\right)}, \quad (3.25)$$

где $\tau(k) \equiv t \cos k + sk/2$. Используя тождества

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\left(\frac{p-k_a}{2}\right) \sin\left(\frac{p-k_b}{2}\right)} &= \frac{1}{\sin\left(\frac{k_a-k_b}{2}\right)} \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{p-k_a}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{p-k_b}{2}\right) \right), \quad k_a \neq k_b, \\ \frac{1}{M-N} \sum_{\tilde{p}} \operatorname{ctg}\left(\frac{p-k}{2}\right) &= -\operatorname{ctg} \frac{\Theta_\ell}{2}, \quad \frac{1}{(M-N)^2} \sum_{\tilde{p}} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{p-k}{2}\right)} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta_\ell}{2}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

матрицу $S(s, t; \ell)$ можно привести к виду (см. приложения к работам [6], [16])

$$S = I + V, \quad (3.27)$$

где I – единичная матрица, а матрица V состоит из элементов

$$V_{ab} = \frac{e_+(k_a) e_-(k_b) - e_-(k_a) e_+(k_b)}{(M-N) \sin\left(\frac{k_a-k_b}{2}\right)}. \quad (3.28)$$

Диагональные элементы матрицы V определяются (3.28) по правилу Лопиталя при $k_b \rightarrow k_a$; функции $e_\pm(k) = e_\pm(k, s, t; \ell)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} e_-(k) &= e^{-i\tau(k)}, \quad e_+(k) = e(k) e_-(k), \\ e(k) &= \frac{\sin^2 \frac{\Theta_\ell}{2}}{M-N} \sum_{\tilde{p}} (e^{2i\tau(p)} - e^{2i\tau(k)}) \operatorname{ctg}\left(\frac{p-k}{2}\right) - \cos \frac{\Theta_\ell}{2} \sin \frac{\Theta_\ell}{2} e^{2i\tau(k)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Представление (3.24) будет использовано в следующем разделе для вывода корреляционной функции третьих компонент локальных спинов в термодинамическом пределе.

4. ТЕРМОДИНАМИКА МОДЕЛИ И КОРРЕЛЯТОР ТРЕТЬИХ КОМПОНЕНТ ЛОКАЛЬНЫХ СПИНОВ В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

Термодинамика XXZ -магнетика Гейзенберга при $\Delta = -\infty$ строится стандартным способом (см., например, [1]). Рассмотрим переход к термодинамическому пределу $M \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, плотность числа частиц $D = N/M$ фиксирована при нулевом полном импульсе $K = 0$. Заметим, что в нашей модели $D \leq 1/2$. Состояние термодинамического равновесия при конечной температуре $T = \beta^{-1}$ определяется решением нелинейных интегральных уравнений Янга-Янга [17], [1], которые существенно упрощаются в рассматриваемом нами случае:

$$\begin{aligned}\varepsilon(k) &= -2 \cos k - \mu + \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\pi}^{\pi} dk \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon(k)}), \\ 2\pi\rho(k)(1 + e^{\beta\varepsilon(k)}) &= 1 - \int_{-\pi}^{\pi} dk \rho(k),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $\varepsilon(k)$ – энергия возбуждения, а $\rho(k)$ – плотность распределения частиц. Решения уравнений (4.1) имеют вид

$$\varepsilon(k) = -2 \cos k - \mu + \mathcal{P}, \quad \rho(k) = \frac{1 - D}{2\pi(1 + e^{\beta\varepsilon(k)})},\tag{4.2}$$

где давление $\mathcal{P}$ и плотность D определяются выражениями

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\pi}^{\pi} dk \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon(k)}), \quad D = \int_{-\pi}^{\pi} dk \rho(k).\tag{4.3}$$

Для описания корреляционных функций удобно использовать фермиевский вес $\vartheta(k)$, который определяется как отношение плотности распределения частиц к плотности распределения вакансий: $\vartheta(k) = \rho(k)/\rho_{\text{tot}}(k)$. В нашей модели $\rho_{\text{tot}}(k) = (1 - D)/2\pi$, следовательно,

$$\vartheta(k) = \frac{1}{1 + e^{\beta\varepsilon(k)}}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \vartheta(k) = \frac{D}{1 - D}.\tag{4.4}$$

При нулевой температуре ($1/\beta = 0$) состояние термодинамического равновесия переходит в основное состояние модели, которое формируется при заполнении фермиевской зоны $-\Lambda < k < \Lambda$ ($\Lambda \leq \pi$) частицами с отрицательной энергией $\varepsilon_0(k)$. Значение Λ определяется из условия

$$\varepsilon_0(\pm\Lambda) = 0.\tag{4.5}$$

Давление и плотность при нулевой температуре равны

$$\mathcal{P}_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk \varepsilon_0(k), \quad D_0 = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk \rho_0(k),\tag{4.6}$$

где

$$\varepsilon_0(k) = -2 \cos k - \mu + \mathcal{P}_0, \quad \rho_0(k) = \frac{1 - D_0}{2\pi}.\tag{4.7}$$

Из уравнений (4.5) и (4.6) с учетом (4.7) получаем (см. также [13])

$$\mathcal{P}_0 = \frac{2}{\pi}(\sin \Lambda - \Lambda \cos \Lambda), \quad D_0 = \frac{\Lambda}{\Lambda + \pi}, \quad \frac{2}{\pi}(\sin \Lambda - (\Lambda + \pi) \cos \Lambda) = \mu. \quad (4.8)$$

Заметим, что давление $\mathcal{P}_0$, плотность D_0 и фермиевский импульс Λ являются функциями химического потенциала μ . Из уравнений (4.8) следует, что фермиевская зона существует, если $\mu \in (-2, 4)$; в этой области $\mathcal{P}_0$, D_0 и Λ являются монотонно возрастающими функциями μ . Предельные значения равны $\mathcal{P}_0 = D_0 = \Lambda = 0$ при $\mu = -2$ и $\mathcal{P}_0 = 2$, $D_0 = 1/2$, $\Lambda = \pi$ при $\mu = 4$. Полузаполненной фермиевской зоне $\Lambda = \pi/2$ соответствует значение $\mu = 2/\pi$, давление и плотность при этом равны $\mathcal{P}_0 = 2/\pi$ и $D_0 = 1/3$.

Рассмотрим коррелятор третьих компонент локальных спинов в термодинамическом пределе при нулевой температуре:

$$\langle \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \rangle = \frac{\langle \Omega | \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle}, \quad (4.9)$$

где $|\Omega\rangle$ – основное состояние. Коррелятор (4.9) имеет, очевидно, структуру

$$\langle \sigma_{m+1}^z(t) \sigma_1^z(0) \rangle = 1 - 4\langle \hat{q}_m \rangle + 4\langle \hat{q}_{m+1}(t) \hat{q}_1(0) \rangle. \quad (4.10)$$

Основное состояние $|\Omega\rangle$ строится как предел основного состояния $|\Omega_M(\Lambda)\rangle$ модели на M узлах при $M \rightarrow \infty$, $N = N(\Lambda) \rightarrow \infty$ и фиксированном значении Λ . Состояние $|\Omega_M(\Lambda)\rangle$ есть собственное состояние (2.15) с набором импульсов $\{k\}$, заполняющих все вакансии в интервале $[-\Lambda, \Lambda]$; число частиц (импульсов в наборе $\{k\}$) N определяется значением Λ . В термодинамическом пределе $M \rightarrow \infty$ разрешенные значения импульсов в наборе $\{k\}$ заполняют непрерывно интервал $[-\Lambda, \Lambda]$, причем число частиц в основном состоянии $N = \frac{\Lambda}{\Lambda + \pi} M$ стремится к бесконечности вместе с M .

Таким образом, в термодинамическом пределе при нулевой температуре определитель $(N \times N)$ -матрицы, фигурирующий в представлении (3.24), переходит в определитель Фредгольма линейного интегрального оператора, действующего на функции на отрезке $[-\Lambda, \Lambda]$ по правилу

$$(\hat{A}f)(k) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} A(k, k') f(k') dk', \quad (4.11)$$

где функция $A(k, k')$ есть ядро интегрального оператора $\hat{A}$. Сумма по разрешенным значениям $\tilde{p}$ в выражении (3.29) переходит в интеграл:

$$\frac{1}{M - N} \sum_{\tilde{p}} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dp. \quad (4.12)$$

В результате для корреляторов плотностей при нулевой температуре получаем выражения

$$\begin{aligned} \langle \hat{q}_m \rangle &= D_0, \\ \langle \hat{q}_{m+1}(t) \hat{q}_1(0) \rangle &= -1 + 2D_0 + \frac{1 - D_0}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\eta e^{i(m-s)\eta} \det(\hat{I} + \hat{V}(s, t; \eta)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где интегральный оператор $\widehat{V}(s, t; \eta)$ имеет ядро

$$V(k, k'|s, t; \eta) = \frac{E_+(k) E_-(k') - E_-(k) E_+(k')}{2 \sin\left(\frac{k-k'}{2}\right)}. \quad (4.14)$$

Функции $E_-(k) = E_-(k|s, t)$ и $E_+(k) = E_+(k|s, t; \eta)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} E_-(k) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i\tau(k)}, \quad E_+(k) = E(k) E_-(k), \\ E(k) &= \frac{1 - \cos \eta}{4\pi} \text{P.v.} \int_{-\pi}^{\pi} \text{ctg} \left(\frac{p-k}{2} \right) e^{2i\tau(p)} dp - \frac{\sin \eta}{2} e^{2i\tau(k)}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\tau(k) \equiv t \cos k + sk/2$.

Рассмотрим теперь коррелятор третьих компонент локальных спинов в термодинамическом пределе при конечной температуре; его структура аналогична выражению (4.10). Воспользуемся тем, что для интегрируемых систем переход от нулевой температуры к конечной осуществляется изменением меры интегрирования [1]:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} dk \vartheta(k), \quad (4.16)$$

где $\vartheta(k)$ – фермиевский вес (4.4). Представление для парного коррелятора локальной плотности при конечной температуре содержит определитель Фредгольма интегрального оператора, действующего на функции на отрезке $[-\pi, \pi]$ по правилу

$$(\hat{A}^{(T)} f)(k) = \int_{-\pi}^{\pi} A^{(T)}(k, k') f(k') dk', \quad (4.17)$$

где $A^{(T)}(k, k')$ есть ядро интегрального оператора $\hat{A}^{(T)}$, причем в силу выражения (4.16) $A^{(T)}(k, k') = A(k, k') \vartheta(k')$. Поскольку в представлении для коррелятора участвует лишь определитель, удобно использовать симметризованную форму ядра $A^{(T)}(k, k') = \sqrt{\vartheta(k)} A(k, k') \sqrt{\vartheta(k')}$.

Для корреляторов плотностей при конечной температуре получаем выражения

$$\begin{aligned} \langle \hat{q}_m \rangle^{(T)} &= D, \\ \langle \hat{q}_{m+1}(t) \hat{q}_1(0) \rangle^{(T)} &= -1 + 2D + \frac{1-D}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\eta e^{i(m-s)\eta} \det(\hat{I} + \widehat{V}^{(T)}(s, t; \eta)), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где ядро интегрального оператора $\widehat{V}^{(T)}(s, t; \eta)$ имеет вид

$$V^{(T)}(k, k'|s, t; \eta) = \frac{E_+^{(T)}(k) E_-^{(T)}(k') - E_-^{(T)}(k) E_+^{(T)}(k')}{2 \sin\left(\frac{k-k'}{2}\right)}. \quad (4.19)$$

Функции $E_-^{(T)}(k) = E_-^{(T)}(k|s, t)$ и $E_+^{(T)}(k) = E_+^{(T)}(k|s, t; \eta)$ задаются формулами

$$E_-^{(T)}(k) = \sqrt{\vartheta(k)} E_-(k), \quad E_+^{(T)}(k) = E(k) E_-^{(T)}(k), \quad (4.20)$$

где $E_-(k) = E_-(k, s, t)$ и $E(k) = E(k, s, t; \eta)$ определены равенствами (4.15).

Рассмотрим частный случай одновременного коррелятора при конечной температуре. При $t = 0$ имеем

$$\begin{aligned}\widehat{V}^{(T)}(s, 0; \eta) &= -(1 - e^{-i\eta \operatorname{sgn}(s)}) \widehat{U}^{(T)}(s), \\ U^{(T)}(k, k'|s) &= \sqrt{\vartheta(k)} \frac{\sin(|s| \frac{k-k'}{2})}{2\pi \sin(\frac{k-k'}{2})} \sqrt{\vartheta(k')}.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Одновременный коррелятор запишется в виде

$$\langle \hat{q}_{m+1} \hat{q}_1 \rangle^{(T)} = -1 + 2D + (1 - D) G^{(T)}(m), \quad (4.22)$$

где функция $G^{(T)}(m)$ равна

$$G^{(T)}(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^m \int_0^{2\pi} d\eta e^{i(m-s)\eta} \det(\hat{I} - (1 - e^{-i\eta}) \widehat{U}^{(T)}(s)), \quad m \geq 0. \quad (4.23)$$

Из выражений (4.23) и (4.4) получаем $G^{(T)}(0) = 1$, $G^{(T)}(1) = (1 - 2D)/(1 - D)$ и, следовательно,

$$\langle \hat{q}_m \hat{q}_m \rangle^{(T)} = D = \langle \hat{q}_m \rangle^{(T)}, \quad \langle \hat{q}_{m+1} \hat{q}_m \rangle^{(T)} = 0. \quad (4.24)$$

Для вычисления функции $G^{(T)}(m)$ при любом m заметим, что ранг оператора $\widehat{U}^{(T)}(s)$ равен s и определитель Фредгольма в формуле (4.23) равен определителю $(s \times s)$ -матрицы

$$\det(\hat{I} - (1 - e^{-i\eta}) \widehat{U}^{(T)}(s)) = \det_s(I - (1 - e^{-i\eta}) W^{(T)}), \quad (4.25)$$

где $(s \times s)$ -матрица $W^{(T)}$ состоит из элементов

$$W_{ab}^{(T)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \vartheta(k) e^{ik(a-b)}. \quad (4.26)$$

Подставив выражение (4.25) в (4.24), разложив определитель $(s \times s)$ -матрицы по формуле Фредгольма и вычислив интеграл по η , приходим к представлению

$$\begin{aligned}G^{(T)}(m) &= \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \det_{m-n}(I - z W^{(T)})|_{z=1} = \\ &= \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \det(\hat{I} - z \widehat{U}^{(T)}(m-n))|_{z=1}.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Аналогичное представление справедливо и при нулевой температуре. Соответствующие интегральный оператор $\widehat{U}(s)$ (действующий по правилу (4.11)) и элементы ассоциированной с ним $(s \times s)$ -матрицы W равны

$$U(k, k'|s) = \frac{\sin(|s| \frac{k-k'}{2})}{2\pi \sin(\frac{k-k'}{2})}, \quad W_{ab} = \frac{\sin \Lambda(a-b)}{\pi(a-b)}. \quad (4.28)$$

В заключение отметим, что интегральный оператор, входящий в представление (4.18) для температурного коррелятора третьих компонент локальных спинов в XXZ -цепочке Гейзенберга при $\Delta = -\infty$, возникает также в представлениях для корреляторов в одномерной модели Хаббарда в пределе бесконечно сильного взаимодействия [11]. Структура корреляционной функции (4.18), однако, аналогична структуре корреляционных функций в фазовой модели [12], что является отчасти следствием одинаковой формы уравнений Бете в этих двух моделях.

Благодарности. Авторы выражают признательность Н. М. Боголюбову за многочисленные ценные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-01045, гранта INTAS № 99-01705 и гранта CRDF RM1-2244.

Список литературы

- [1] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин. Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.
- [2] М. Jimbo, T. Miwa. Algebraic analysis of solvable lattice models. Providence, RI: AMS, 1995.
- [3] F. H. L. Essler, H. Frahm, A. G. Izergin, V. E. Korepin. Commun. Math. Phys. 1995. V. 174. P. 191–214.
- [4] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras. Nucl. Phys. B. 2000. V. 567 [FS]. P. 554–582.
- [5] F. Colomo, A. G. Izergin, V. Tognetti. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 361–369.
- [6] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti. Theor. Math. Phys. 1993. V. 94. P. 11–38.
- [7] A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov. The quantum correlation function as the tau-function of classical differential equations. In: Important Development in Soliton Theory. Springer Ser. Nonlinear Dyn. Eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov. Berlin: Springer, 1993. P. 407–417.
- [8] А. Г. Изергин, А. Р. Итс, В. Е. Корепин, Н. А. Славнов. Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. С. 138–151.
- [9] Y. Fujii, M. Wadati. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 1351–1361.
- [10] Th. Niemeijer. Physica. 1967. V. 36. P. 377–419.
- [11] A. G. Izergin, A. G. Pronko, N. I. Abarenkova. Phys. Lett. A. 1998. V. 245. P. 537–547.
- [12] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine. Nucl. Phys. B. 1998. V. 516 [FS]. P. 501–528.
- [13] F. C. Alcaraz, R. Z. Bariev. An exactly solvable constrained XXZ chain. In: Proceedings of the conference: Statistical Physics on the Eve of the Twenty-First Century, 2000; cond-mat/9904042.
- [14] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanin, A. G. Pronko, J. Timonen. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 4439–4442.
- [15] М. Годен. Волновая функция Бете. М.: Мир, 1987.
- [16] A. G. Izergin, A. G. Pronko. Nucl. Phys. B. 1998. V. 520 [FS]. P. 594–632.
- [17] C. N. Yang, C. P. Yang. J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 1115–1122.

Поступила в редакцию 14.XI.2001 г.