Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, К. В. Панкрашкин, Асимптотика нижних зон
Ландау в сильном магнитном поле, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 2, 304–331

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:27:17

© 2002 г. Й. Брюнинг*, С. Ю. Доброхотов†, К. В. Панкрашкин‡

АСИМПТОТИКА НИЖНИХ ЗОН ЛАНДАУ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В квазиклассическом приближении изучается асимптотика нижней части спектра двумерного магнитного оператора Шредингера с периодическим потенциалом в сильном однородном магнитном поле. Методы усреднения позволяют свести соответствующую классическую задачу к одномерной задаче на торе; таким образом устанавливается “почти-интегрируемость” исходной задачи. Использование элементарных следствий топологической теории гамильтоновых систем позволяет провести классификацию почти-инвариантных многообразий классического гамильтониана. Многообразия, соответствующие нижней части спектра, оказываются замкнутыми или незамкнутыми кривыми и точками; их геометрические и топологические характеристики определяют асимптотику частей спектра (спектральные серии), построение которой проводится методами квазиклассического приближения с комплексными фазами. Обсуждается связь полученных асимптотик с магнито-блоховскими условиями и асимптотикой зонного спектра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение квантовой заряженной частицы в однородном магнитном и периодическом электрическом полях описывается гамильтонианом $\hat{H}_{B,w}$ [1],

$$\hat{H}_{B,w} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{eA(z)}{c} \right)^2 + w(z_1, z_2),$$

действующим в $L^2(\mathbb{R}_z^2)$, $z = (z_1, z_2)$, где $A(z) = (-Bz_2, 0)$ – векторный потенциал магнитного поля (мы используем так называемую калибровку Ландау), B – напряженность магнитного поля, w – электрический потенциал. Функция w периодична относительно некоторой решетки Γ , натянутой на два линейно независимых вектора $l_1 = (l_{11}, l_{12})$ и $l_2 = (l_{21}, l_{22})$. Так как гамильтониан $\hat{H}_{B,w}$ инвариантен относительно калибровочных преобразований, мы можем считать без потери общности $l_{12} = 0$. Также без

*Institut für Mathematik, Humboldt Universität zu Berlin, Berlin, Deutschland.

E-mail: bruening@mathematik.hu-berlin.de

†Институт проблем механики РАН, Москва, Россия. E-mail: dobr@ipmnet.ru

‡Institut für Mathematik, Humboldt Universität zu Berlin, Berlin, Deutschland; Институт проблем механики РАН, Москва, Россия. E-mail: const@mathematik.hu-berlin.de

потери общности мы предполагаем $B > 0$. Вводя новые координаты $x = 2\pi z/L_0$, где $L_0 = l_{11}$ есть так называемый *характерный размер* решетки, мы можем переписать гамильтониан в виде

$$\hat{H}_{B,w} = \frac{(eBL_0)^2}{4\pi^2 mc^2} \hat{H}, \quad \hat{H} = \frac{1}{2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 + \varepsilon v(x_1, x_2),$$

здесь

$$h = (2\pi)^2 \left(\frac{l_M}{L_0} \right)^2, \quad \varepsilon = h \frac{W}{\hbar \omega_c}, \quad l_M = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}},$$

$$\omega_c = \frac{|eB|}{cm}, \quad W = \max |w|, \quad v(x) = \frac{1}{W} w \left(\frac{L_0 x}{2\pi} \right),$$

где l_M — магнитная длина и ω_c — циклотронная частота. Спектры $\hat{H}_{B,w}$ и $\hat{H}$ связаны соотношением

$$\sigma(\hat{H}_{B,w}) = \frac{(eBL_0)^2}{(2\pi c)^2 m} \sigma(\hat{H}).$$

Мы изучаем асимптотическое поведение спектра $\hat{H}_{B,w}$ в предположении малости параметров h и ε . Малость h означает, что магнитная длина мала по сравнению с характерным размером решетки; при этом условии ε мало, если потенциальная энергия решетки W мала относительно циклотронной энергии или сравнима с ней. Подобная ситуация реализуется в сверхрешетках, массивах квантовых точек и антиточек [2]. Предположение относительно малости параметров h и ε существенно. Другие возможные ситуации, приводящие к другим результатам, рассматривались, например, в работах [3]–[5].

Функция v предполагается вещественно-аналитической в $\mathbb{R}^2$ и периодической относительно двух линейно независимых векторов $a_1 = (2\pi/L_0)l_1$ и $a_2 = (2\pi/L_0)l_2$, т. е. $a_1 = (2\pi, 0)$, $a_2 = (a_{21}, a_{22})$, $a_{22} \neq 0$.

Хорошо известно [1], что при $v = 0$ спектр $\hat{H}$ состоит из собственных значений бесконечной кратности (*уровней Ландау*) $E_\mu = (\mu + 1/2)h$, где $\mu \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — номер уровня. Появление потенциала v приводит к “размыванию” этих уровней в некоторые множества, называемые *зонами Ландау*. Также известно, что если число $\eta = a_{22}/h$ (поток магнитного поля) рационально, то спектр $\hat{H}$ имеет зонную структуру и не содержит сингулярной компоненты [6].

Основываясь на фундаментальном принципе соответствия между классической и квантовой механикой, можно ожидать, что асимптотические свойства оператора $\hat{H}$ при малых h допускают описание в терминах соответствующей классической динамической системы, задаваемой в данном случае классическим гамильтонианом H ,

$$H(p, x, \varepsilon) = \frac{1}{2}(p_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \varepsilon v(x_1, x_2).$$

Для задач с дискретным спектром такая связь давно известна, а именно знание некоторого семейства инвариантных многообразий классического гамильтониана позволяет описать асимптотику спектра квантового гамильтониана вблизи соответствующих уровней энергии с помощью правил квантования Бора–Зоммерфельда [7].

Для оператора $\hat{H}$ применить аналогичный подход напрямую не удастся, поскольку, во-первых, его спектр не является дискретным (вообще, квазиклассическое приближение сравнительно редко используется в задачах с непрерывным спектром), а во-вторых, гамильтонова система для H , по-видимому, неинтегрируема и мы не можем найти требуемые инвариантные многообразия в явном виде.

Присутствие малого параметра ε позволяет преодолеть по крайней мере вторую из этих трудностей. В новых канонических координатах $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ гамильтониан H принимает вид

$$H = \mathcal{H}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \varepsilon) + e^{-C/\varepsilon} \mathcal{G}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \varepsilon), \quad \mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2)$$

(см. раздел 2), и соответствующая гамильтонова система сводится с точностью $e^{-C/\varepsilon}$ к системе с одной степенью свободы на торе и, таким образом, является “почти-интегрируемой”. Для почти каждого фиксированного $\mathcal{I}_1$ гамильтониан H является функцией Морса на этом торе. Траектории полученной одномерной системы классифицируются с помощью графа Рибба [8] для $\mathcal{H}$, и точки каждого ребра графа Рибба параметризуются переменной $\mathcal{I}_2$ (см. разделы 3, 4), так что $\mathcal{H}$ является функцией только $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$. При изменении $\mathcal{I}_1$ в своей области определения движущийся граф образует некоторую поверхность (“поверхность Рибба”); эта поверхность дает глобальную классификацию классического движения [9], [10], а “квантование” этой поверхности (т.е. выбор некоторого дискретного подмножества значений переменных $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$) приводит к общему описанию асимптотики спектра. При этом возникает картина, сходная с изображенной на рис. 1 (см. более подробное изложение в [10]). На нем изображена проекция “поверхности Рибба” на плоскость $(E, \mathcal{I}_1)$. Сечение этой поверхности плоскостью $\mathcal{I}_1 = \text{const}$ совпадает с графом Рибба функции $\mathcal{H}$. Переменная $\mathcal{I}_1$ принимает значения $(1/2 + \mu)h$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{I}_1 \geq \alpha > 0$ при $h \rightarrow 0$, переменная $\mathcal{I}_2$ принимает значения $(1/2 + \nu)h$, $\nu \in \mathbb{Z}$, для концевых ребер и все возможные значения для внутренних ребер. Объединение значений $\mathcal{H}$ во всех этих точках дает асимптотику спектра (см. раздел 5).

В настоящей статье мы концентрируем внимание на нижних зонах Ландау, имеющих номера $\mu = O(1)$, в отличие от верхних зон Ландау, имеющих номера $\mu = O(1/h)$ (соответствующая область выделена на рис. 1). Это вызвано несколькими причинами. Изучение нижних зон в контексте нашей задачи приводит к квазиклассическим асимптотикам с комплексными фазами в отличие от “классического” метода вещественного канонического оператора, используемого в [9], [10] (мы объясним разницу ниже). Кроме того, как будет показано далее, нижние зоны Ландау допускают асимптотическое описание с помощью более простых формул, чем верхние (см. раздел 5). Формально они могут быть получены из соответствующих формул для высокоэнергетической части спектра переходом к пределу $\mathcal{I}_1 \rightarrow 0$, однако формулы для асимптотических собственных функций различаются. Изучение нижних зон Ландау также играет важную роль в исследовании полупроводниковых структур [11].

Используя полученные формулы для асимптотических (относительно h и ε) собственных значений и асимптотических собственных функций, по аналогии с представлением, которое, по-видимому, естественно называть представлением Лифшица–Гельфанда–

Рис. 1. Глобальное описание спектра.

Зака (см. ниже формулу (22)) [12] можно построить асимптотические собственные функции, удовлетворяющие магнито-блоховским условиям [13], [14] в случае рационального потока. Такой подход позволяет дать на эвристическом уровне асимптотику зонного спектра оператора $\hat{H}$ (раздел 6).

2. ОСРЕДНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ГАМИЛЬТониАНА

2.1. Осредненный гамильтониан. Введем новые канонические переменные, обобщенные импульсы I_1, y_1 (или P, y_1) и обобщенные координаты φ_1, y_2 (или Q, y_2), следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1 &= -y_2, & p_2 &= -Q, & x_1 &= Q + y_1, & x_2 &= P + y_2, \\ Q &= \sqrt{2I_1} \sin \varphi_1, & P &= \sqrt{2I_1} \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Гамильтониан H в этих координатах имеет вид

$$H = I_1 + \varepsilon v \left(\sqrt{2I_1} \sin \varphi_1 + y_1, \sqrt{2I_1} \cos \varphi_1 + y_2 \right) = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) + \varepsilon v(Q + y_1, P + y_2).$$

Переменные P, Q (или I_1, φ_1) соответствуют циклотронному движению вокруг дрейфующего центра, описываемого переменными y_1, y_2 [15], [16].

Идея методов осреднения состоит в исключении из выражения для H фазы φ_1 , по крайней мере, с некоторой точностью. Для данного гамильтониана такая процедура проводилась ранее (например, в [16]), но, как правило, в других переменных. Использование для этого переменных P, Q, y значительно упрощает формулы.

Вообще говоря, классические методы осреднения обычно проводятся в области $I_1 > \kappa > 0$ (т.е. в области аналитичности). Однако для рассматриваемой задачи окрестность границы $I_1 = 0$ наиболее интересна. Строгая процедура осреднения для задач такого типа появилась в печати совсем недавно [17].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любого $\kappa > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $I_1 \leq \kappa$ существует каноническая замена переменных

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{P} + \varepsilon U_1(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \varepsilon), & Q &= \mathcal{Q} + \varepsilon U_2(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \varepsilon), \\ y_1 &= \mathcal{Y}_1 + \varepsilon U_3(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \varepsilon), & y_2 &= \mathcal{Y}_2 + \varepsilon U_4(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

при выполнении которой гамильтониан приобретает вид

$$H = \mathcal{H}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \varepsilon) + e^{-C/\varepsilon} \mathcal{G}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \varepsilon), \quad (3)$$

где

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}, \varepsilon) = \mathcal{I}_1 + \varepsilon J_0(\sqrt{-2\mathcal{I}_1 \Delta \mathcal{Y}}) v(\mathcal{Y}) + O(\varepsilon^2) \quad (4)$$

при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Здесь J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, $U_{1,2,3,4}$, $\mathcal{G}$ – вещественно-аналитические функции $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Y}_{1,2}$, $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2)/2$, $\mathcal{H}$ – вещественно-аналитическая функция $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{Y}_{1,2}$, $|\mathcal{G}| + |\nabla_{\mathcal{Y}} \mathcal{G}| \leq G$, C , G – некоторые положительные постоянные; все функции $U_{1,2,3,4}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ периодичны по $\mathcal{Y}$ с периодами a_1 и a_2 .

Полное доказательство можно найти в работах [17]; оно использует метод [18]. Здесь мы опишем только саму процедуру осреднения без оценок.

2.2. Процедура осреднения. Требуемая замена переменных строится в виде композиции последовательно определяемых преобразований $(P^m, Q^m, y^m) \mapsto (P^{m+1}, Q^{m+1}, y^{m+1})$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $(P^0, Q^0, y^0) = (P, Q, y)$, с помощью производящей функции S^m [19]. Пусть на m -м шаге гамильтониан H имеет вид

$$H(P, Q, y, \varepsilon) = H^m(I_1^m, y^m, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} g^m(P^m, Q^m, y^m, \varepsilon),$$

где

$$I_1^m = \frac{1}{2}((P^m)^2 + (Q^m)^2).$$

Обозначим

$$\bar{g}^m(I, y, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} g^m(\sqrt{2I} \cos \varphi, \sqrt{2I} \sin \varphi, y, \varepsilon) d\varphi$$

и положим

$$\tilde{g}^m(P, Q, y, \varepsilon) = \bar{g}^m\left(\frac{1}{2}(P^2 + Q^2), y, \varepsilon\right) - g^m(P, Q, y, \varepsilon).$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} \sigma^m(P, Q, y, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\varphi \tilde{g}^m(\sqrt{2I} \cos \psi, \sqrt{2I} \sin \psi, y, \varepsilon) d\psi + \right. \\ &\quad \left. + \int_\pi^\varphi \tilde{g}^m(\sqrt{2I} \cos \psi, \sqrt{2I} \sin \psi, y, \varepsilon) d\psi \right) \Big|_{\substack{P=\sqrt{2I} \cos \varphi, \\ Q=\sqrt{2I} \sin \varphi}} \end{aligned} \quad (5)$$

и определим *производящую функцию*

$$S^m(P, Q, y, \varepsilon) = PQ + y_1 y_2 + \varepsilon^{m+1} \sigma^m(P, Q, y, \varepsilon).$$

Разрешая систему

$$\begin{aligned} P^m &= \frac{\partial S^m}{\partial Q}(P^{m+1}, Q^m, y_1^{m+1}, y_2^m, \varepsilon), & Q^{m+1} &= \frac{\partial S^m}{\partial P}(P^{m+1}, Q^m, y_1^{m+1}, y_2^m, \varepsilon), \\ y_1^m &= \frac{\partial S^m}{\partial y_2}(P^{m+1}, Q^m, y_1^{m+1}, y_2^m, \varepsilon), & y_2^{m+1} &= \frac{\partial S^m}{\partial y_1}(P^{m+1}, Q^m, y_1^{m+1}, y_2^m, \varepsilon) \end{aligned} \quad (6)$$

относительно $P^{m+1}, Q^{m+1}, y^{m+1}$, для достаточно малых ε получаем каноническую замену переменных вида (2), сводящую гамильтониан H к виду

$$H(P, Q, y, \varepsilon) = H^{m+1}(I_1^{m+1}, y^{m+1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m+2} g^{m+1}(P^{m+1}, Q^{m+1}, y^{m+1}, \varepsilon),$$

где

$$H^{m+1}(I_1^{m+1}, y^{m+1}, \varepsilon) = H^m(I_1^{m+1}, y^{m+1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \bar{g}^m(I_1^{m+1}, y^{m+1}, \varepsilon).$$

Тонкие оценки [17], аналогичные [18], показывают, что такая процедура в действительности дает необходимую экспоненциально малую погрешность для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.

Важно заметить, что именно специальный вид выражения (5) обеспечивает аналитичность полученного гамильтониана и соответствующей замены переменных.

2.3. Осреднение с точностью $O(\varepsilon^2)$. Проведем для ясности осреднение с точностью $O(\varepsilon^2)$, т.е. приведем гамильтониан к виду

$$H = \bar{H}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}, \varepsilon) + \varepsilon^2 g(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Y}, \varepsilon)$$

с помощью замены переменных вида (2). Очевидно, это соответствует первому шагу описанной выше процедуры. Осредненный гамильтониан задается выражением

$$\bar{H}(\mathcal{I}_1, y, \varepsilon) = \mathcal{I}_1 + \varepsilon \mathcal{V}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}), \quad (7)$$

где

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\sqrt{2\mathcal{I}_1} \sin \varphi + \mathcal{Y}_1, \sqrt{2\mathcal{I}_1} \cos \varphi + \mathcal{Y}_2) d\varphi v(\mathcal{Y}). \quad (8)$$

Равенство (8) может быть также переписано в виде $\mathcal{V}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}) = J_0(\sqrt{-2\mathcal{I}_1 \Delta \mathcal{Y}}) v(\mathcal{Y})$. Оценка (4) теперь очевидна. Свойства бесселевых функций дают оценку

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}) = v(\mathcal{Y}) + \frac{1}{2} \mathcal{I}_1 \Delta v(\mathcal{Y}) + O(\mathcal{I}_1^2) \quad \text{при} \quad \mathcal{I}_1 \rightarrow 0.$$

Соответствующая замена переменных определяется формулой (6), где

$$(P^m, Q^m, y^m) = (P, Q, y), \quad (P^{m+1}, Q^{m+1}, y^{m+1}) = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Y})$$

и

$$\begin{aligned} S^m(P, Q, y, \varepsilon) &= PQ + y_1 y_2 + \frac{1}{2} \varepsilon \left(\int_0^\varphi \tilde{v}(\sqrt{2I} \cos \psi, \sqrt{2I} \sin \psi, y) d\psi + \right. \\ &\quad \left. + \int_\pi^\varphi \tilde{v}(\sqrt{2I} \cos \psi, \sqrt{2I} \sin \psi, y) d\psi \right) \Big|_{\substack{P=\sqrt{2I} \cos \varphi, \\ Q=\sqrt{2I} \sin \varphi}} \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\tilde{v}(P, Q, y) = \mathcal{V}\left(\frac{1}{2}(P^2 + Q^2), y\right) - v(Q + y_1, P + y_2).$$

2.4. Гамильтонова система для осредненного гамильтониана. Очевидно, гамильтонова система для $\mathcal{H}$ интегрируема, и ее инвариантные многообразия могут быть описаны как

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1 = \text{const} \geq 0, \\ \mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\mathcal{I}_1, \tau, \varepsilon), \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где $\mathcal{Y}(\mathcal{I}_1, \tau, \varepsilon)$ – решения системы

$$\frac{d\mathcal{Y}}{d\tau} = J \nabla_{\mathcal{Y}} \mathcal{H}(\mathcal{I}_1, \mathcal{Y}, \varepsilon), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

3. ПОЧТИ-ИНВАРИАНТНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Как видно из вышесказанного, классическая энергия системы допускает оценку

$$H = \mathcal{I}_1 + O(\varepsilon).$$

Для исследования нижней части спектра мы полагаем $\mathcal{I}_1 = 0$.

Соответствующие инвариантные многообразия определяются равенствами

$$\mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{Q} = 0, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0(\tau, \varepsilon), \quad (11)$$

где $\mathcal{Y}^0(\tau, \varepsilon) = \mathcal{Y}(0, \tau, \varepsilon)$ (см. (10)) – это точки и кривые. Подставляя (11) в (2) и (1), мы получаем семейство кривых и точек в исходном пространстве (p, x) .

Введем полезное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кривая $\gamma^1(\varepsilon) = \{p = P(t, \varepsilon), x = X(t, \varepsilon), t \in \mathbb{R}\}$ называется *почти-инвариантной с точностью $O(e^{-C/\varepsilon})$ кривой гамильтониана $H(p, x, \varepsilon)$* , если $H|_{\gamma^1(\varepsilon)} = \text{const} \bmod O(e^{-C/\varepsilon})$ и функция $(P(t, \varepsilon), X(t, \varepsilon))$ удовлетворяет с точностью $O(e^{-C/\varepsilon})$ гамильтоновой системе для H равномерно по $t \in \mathbb{R}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{Y}(0, t, \varepsilon)$ – решение системы (10) для $\mathcal{I}_1 = 0$, отличное от постоянной, тогда кривые, задаваемые (11), (2) и (1), есть почти-инвариантные с точностью $O(e^{-C/\varepsilon})$ кривые гамильтониана H .

Перейдем к описанию точек покоя $\mathcal{H}$. Заметим сначала, что если $X = (X_1, X_2)$ – критическая точка функции v , то $(-X_2, 0, X_1, X_2)$ – точка покоя гамильтоновой системы для H .

Теперь рассмотрим постоянные решения системы (10) для $\mathcal{I}_1 = 0$. Соответствующие траектории в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^4$ есть точки. Если $\gamma^0(\varepsilon)$ – такая точка, то мы имеем, по крайней мере,

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\gamma^0(\varepsilon)} = O(e^{-C/\varepsilon}), \quad \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_{\gamma^0(\varepsilon)} = O(e^{-C/\varepsilon}).$$

Будем предполагать, что v является *функцией Морса* (это означает, что все ее критические точки невырождены). Тогда можно показать, что все точки $\gamma^0(\varepsilon)$ лежат в $O(e^{-C/\varepsilon})$ -окрестности множества точек покоя гамильтониана H , описанных выше, поэтому мы будем рассматривать только эти “точные” точки покоя.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Дадим классификацию почти-инвариантных кривых, построенных в предыдущем разделе.

Зафиксируем $\mathcal{I}_1 \geq 0$. В силу периодичности $\mathcal{H}$ относительно $\mathcal{Y}$ система (10) может быть рассмотрена как гамильтонова система на торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / (a_1, a_2)$. Такой подход сразу дает классификацию ее траекторий [8], [20].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Гамильтонова система (10) на торе $\mathbb{T}^2$ имеет следующие типы траекторий:*

- 1) критические точки функции $\mathcal{H}$,
- 2) стягиваемые (гомотопные точке) гладкие замкнутые кривые на $\mathbb{T}^2$,
- 3) нестягиваемые (негомотопные точке) гладкие замкнутые кривые на $\mathbb{T}^2$,
- 4) сепаратрисы.

Очевидно, есть соответствие между траекториями рассмотренной гамильтоновой системы на торе и на плоскости $\mathbb{R}_\mathcal{Y}^2$: стягиваемые кривые на торе порождают замкнутые кривые на плоскости, нестягиваемые кривые на торе соответствуют незамкнутым траекториям в $\mathbb{R}_\mathcal{Y}^2$. Каждая траектория лежит на некотором множестве уровня функции $\mathcal{H}$.

Так как все траектории на плоскости имеют периодические прообразы на торе, для каждой такой траектории $\mathcal{Y}$ найдется двумерный вектор $d(\mathcal{Y}) = (d_1, d_2)$ со взаимно простыми целочисленными компонентами d_1, d_2 такой, что

$$\mathcal{Y}(\tau + T) = \mathcal{Y}(\tau) + d \cdot a, \quad (12)$$

где $d \cdot a = d_1 a_1 + d_2 a_2$ и T – период соответствующей траектории на торе (см. рис. 2). Для замкнутых траекторий на плоскости мы имеем, очевидно, $d = 0$. Вектор d назовем *вектором дрейфа* (ср. [3]). Отношение d_1 / d_2 называется *числом вращения* [8]. Легко видеть, что для заданного $\mathcal{I}_1$ могут существовать только два ненулевых вектора дрейфа с противоположными направлениями.

Рис. 2. Вектор дрейфа и действие для незамкнутых (1) и замкнутых (2) траекторий.

Наглядная классификация траекторий на торе может быть дана с помощью *графа Роба* функции $\mathcal{H}$. Граф Роба строится следующим образом. Каждая связная компонента множества уровня $\mathcal{H} = E$ на торе соответствует точке ребра графа. При пробегании E значений из $[\min \mathcal{H}, \max \mathcal{H}]$ мы получаем ребра, объединение которых и дает целый граф. Примеры построения графа Роба приведены на рис. 3 и 4.

Рис. 3. Кривые уровня и граф Роба функции $A \cos x_1 + B \cos x_2$.

Рис. 4. Кривые уровня и граф Роба функции $A \cos x_1 + B \cos x_2 + C \cos(x_1 + x_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разумеется, функцию $\mathcal{H}$ можно рассматривать как функцию на любом торе $\mathbb{T}_{n_1, n_2}^2 = \mathbb{R}^2 / (n_1 a_1, n_2 a_2)$. Это приводит к графу Роба с более сложной структурой. Мы обсудим эту возможность позже.

Каждая точка графа соответствует траектории гамильтониана $\mathcal{H}$ на торе и набору траекторий на плоскости.

Удобно параметризовать точки графа Роба с помощью переменной действия $\mathcal{I}_2$ (см. [8]):

$$\mathcal{I}_2(\mathcal{V}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma+T} \mathcal{Y}_1(\mathcal{I}_1, \tau, \varepsilon) d\mathcal{Y}_2(\mathcal{I}_1, \tau, \varepsilon) - \frac{\mathcal{Y}_2(\mathcal{I}_1, \sigma, \varepsilon)(d \cdot a)_1}{2\pi} - \frac{(d \cdot a)_1(d \cdot a)_2}{4\pi},$$

где $\mathcal{Y}(\mathcal{I}_1, \tau, \varepsilon)$ – соответствующая траектория на плоскости, T – период соответствующей траектории на торе, d – соответствующий вектор дрейфа.

Переменная $\mathcal{I}_2$ допускает простую геометрическую интерпретацию. Для замкнутых траекторий на плоскости она хорошо известна (см., например, [8], [19]): $2\pi\mathcal{I}_2$ есть ориентированная площадь области, ограниченной траекторией (см. рис. 2). Интерпретация для незамкнутых траекторий несколько отличается. Пусть $\mathcal{Y}(\mathcal{I}_1, \tau, \varepsilon)$ – такая незамкнутая кривая с вектором дрейфа d , и L_d – прямая, заданная как $L_d = \{\tau d \cdot a, \tau \in \mathbb{R}\}$. Зафиксируем некоторые точки $\mathcal{Y}(\mathcal{I}_1, \sigma, \varepsilon)$ и $\mathcal{Y}(\mathcal{I}_1, \sigma + T, \varepsilon)$ и спроектируем их на L_d . Тогда $2\pi\mathcal{I}_2$ есть ориентированная площадь полученной криволинейной трапеции (см. рис. 2). Легко видеть, что определение $\mathcal{I}_2$ для незамкнутых кривых зависит от их конкретного представления (т.е. от параллельного переноса на плоскости). Тем не менее $\mathcal{I}_2$ определяется однозначно с точностью до $(|d_1| + |d_2|)a_{22}$ и произвол выбора не играет существенной роли для дальнейшего. На каждом ребре графа Рибамангильтониана $\mathcal{H}$ является функцией $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \varepsilon)$.

Очевидно, если $\mathcal{Y}$ – некоторое решение гамильтоновой системы для $\mathcal{H}$, то функция $\mathcal{Y} + m \cdot a$, где $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$, $m \cdot a = m_1 a_1 + m_2 a_2$, также является решением той же системы. Введем нумерацию в семействе всех таких решений и соответствующих траекторий на плоскости $\mathbb{R}^2$. Замкнутые траектории и точки нумеруются мультииндексом $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2$ следующим образом. Зафиксируем некоторое решение $\mathcal{Y}$ и дадим ему номер $(0, 0)$, тогда траектория с номером l задается как $\mathcal{Y} + l \cdot a$ (см. рис. 5). Мы дополнительно предполагаем, что семейство $\mathcal{Y}$ непрерывно зависит от $\mathcal{I}_2$. Этот способ нумерации нельзя использовать для незамкнутых траекторий из-за равенства (12). Пусть $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{Z}^2$ – вектор, сопряженный к d , т.е. $d_1 f_1 + d_2 f_2 = 1$ (очевидно, выбор вектора f содержит определенный произвол). Незамкнутые траектории нумеруются теперь следующим образом: зафиксируем некоторую траекторию $\mathcal{Y}$ с номером 0, тогда траектория с номером $k \in \mathbb{Z}$ задается $\mathcal{Y} - k(Jf) \cdot a$ (см. рис. 6). Мы также предполагаем, что семейство $\mathcal{Y}$ зависит от $\mathcal{I}_2$ непрерывным образом.

Рис. 5. Нумерация замкнутых траекторий.

Вернемся к точкам покоя и почти-инвариантным кривым, построенным в предыдущем разделе. Их нумерация унаследована от нумерации траекторий гамильтониана $\mathcal{H}$. Если замкнутая кривая γ_0^{1c} (точка γ_0^0) задается как

$$p_{1,2} = P_{1,2}^0(\tau), \quad x_{1,2} = X_{1,2}^0(\tau), \quad (13)$$

Рис. 6. Нумерация незамкнутых траекторий.

то кривая γ_l^{1c} (точка γ_l^0) с номером $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2$ задается как

$$p_1 = P_1^0(\tau) - (l \cdot a)_2, \quad p_2 = P_2^0(\tau), \quad x_{1,2} = X_{1,2}^0(\tau) + (l \cdot a)_{1,2}.$$

Если незамкнутая кривая γ_0^{1o} задается с помощью (13), то соответствующая кривая γ_k^{1o} с номером $k \in \mathbb{Z}$ задается как

$$p_1 = P_1^0(\tau) + (k(Jf) \cdot a)_2, \quad p_2 = P_2^0(\tau), \quad x_{1,2} = X_{1,2}^0(\tau) - (k(Jf) \cdot a)_{1,2}.$$

5. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ

5.1. Эвристические соображения. Привлекательным является соображение найти формулы для асимптотики нижних зон Ландау как предел соответствующих формул для высших частей спектра [9]. Опишем их для ясности. Для простоты мы опускаем некоторые детали, несущественные в данный момент.

Проквантуем действие $\mathcal{I}_1$,

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1^\mu = \left(\frac{1}{2} + \mu \right) h, \quad \mu \sim O\left(\frac{1}{h}\right), \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,$$

и выберем подмножество траекторий гамильтониана $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^\mu, \cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2^\nu = \left(\frac{1}{2} + \nu \right) h, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Множество точек $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^\mu, \mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon)$ для замкнутых траекторий и $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^\mu, \mathcal{I}_2, \varepsilon)$ для незамкнутых дает асимптотику μ -й зоны Ландау с точностью $O(h^2) + O(e^{-C/\varepsilon})$.

Строго говоря, эти рассуждения могут быть применены лишь для приближения высших частей спектра $\hat{H}$. Однако, как мы увидим ниже, соответствующие асимптотические собственные значения для нижних зон Ландау выглядят следующим образом:

$$E = \mathcal{H}(0, \mathcal{I}_2, \varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{I}_1}(0, \mathcal{I}_2, \varepsilon) \mathcal{I}_1^\mu + O(h^2), \quad (14)$$

где $\mathcal{I}_2$ проквантовано так же. Легко видеть, что выражение (14) есть тейлоровское разложение формул для высших зон вблизи точки $\mathcal{I}_1 = 0$, т.е. мы имеем “равномерный переход” в формулах для асимптотических собственных значений.

Заметим, что формулы для асимптотических собственных функций не допускают такого перехода к пределу, поэтому для строгого обоснования формул (14) требуется применение методов квазиклассического приближения с комплексными фазами (известных также как комплексный метод ВКБ или теория комплексного ростка Маслова). Описание этого метода можно найти в книге [21], явные формулы для асимптотик даны также в работах [22]–[24].

Зафиксируем некоторые положительные числа K и L . Ниже описываются свойства асимптотических собственных чисел и асимптотических собственных функций оператора $\hat{H}$ с точностью $O(h^L) + O(\varepsilon^K)$. Более подробные формулы содержатся в приложениях А и Б.

5.2. Спектральные серии, отвечающие точкам. Процедура сопоставления спектральных серий точкам покоя классического гамильтониана, которая является частным случаем комплексного оператора Маслова, известна как *метод осцилляторного приближения*. Только точки, соответствующие точкам экстремума потенциала v , могут быть использованы для такого сопоставления.

Осцилляторное приближение дает следующее выражение для асимптотических собственных значений оператора $\hat{H}$:

$$E_{\mu,\nu}^0 = H|_{\gamma_l^0} + h \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{I}_1} \Big|_{\gamma_l^0} + h \left(\frac{1}{2} + \nu \right) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{I}_2} \Big|_{\gamma_l^0} + O(h^2), \quad \mu, \nu = O(1) \in \mathbb{Z}_+.$$

Мы даем обоснование этой формулы в приложении А.

Каждому из таких собственных значений сопоставим набор асимптотических собственных функций $\psi_l^{0,\mu,\nu}$, определяемых также методом осцилляторного приближения и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\|\psi_l^{0,\mu,\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)} \geq c > 0$ при $h \rightarrow 0$,
- 2) $\|(\hat{H} - E_{\mu,\nu}^0)\psi_l^{0,\mu,\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)} = O(h^L)$,
- 3) $\psi_l^{0,\mu,\nu}$ имеют компактные носители и локализованы вблизи проекций соответствующих точек (P_l, X_l) на плоскость $\mathbb{R}_x^2$, т.е. $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_l^{0,\mu,\nu}(x, \varepsilon, h) = 0$ для всех $x \neq X_l$.

Более подробное построение этих функций дано в приложениях А и Б. Сейчас мы только заметим, что все функции $\psi_l^{0,\mu,\nu}$ могут быть выражены через единственную функцию $\psi_0^{0,\mu,\nu}$ по формуле

$$\psi_l^{0,\mu,\nu}(x, \varepsilon, h) = \psi_0^{0,\mu,\nu}(x - l \cdot a, \varepsilon, h) e^{-\frac{i}{h} a_{22} l_2 x_1}. \quad (15)$$

Воспользуемся теперь известным неравенством

$$\text{dist}(E, \sigma(A)) \leq \frac{\|(A - E)f\|}{\|f\|}, \quad (16)$$

которое выполнено для любого самосопряженного оператора A , действующего в произвольном гильбертовом пространстве (см., например, [7]). Это дает оценку

$$\text{dist}(E_{\mu,\nu}^0, \sigma(\hat{H})) = O(h^L).$$

5.3. Спектральные серии, отвечающие почти-инвариантным замкнутым кривым. Обозначим через $\Gamma^{1c}(\varepsilon, h)$ множество кривых γ_l^{1c} , удовлетворяющих условию квантования

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2^\nu = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) h, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_1 \leq |h\nu| \leq \alpha_2 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (17)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для каждой кривой γ_l^{1c} из множества $\Gamma^{1c}(\varepsilon, h)$ существует набор функций $\psi_l^{1c, \mu}(x, \mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h) \in L^2(\mathbb{R}_x^2)$ и чисел (асимптотических собственных значений)

$$E_\mu^{1c}(\mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h) = \mathcal{H}|_{\gamma_l^{1c}} + h \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{I}_1} \Big|_{\gamma_l^{1c}} + O(h^2), \quad \mu \in \mathbb{Z}_+, \quad \mu = O(1), \quad l \in \mathbb{Z}^2, \quad (17a)$$

определяемых методом комплексного канонического оператора, таких, что

- 1) $\|(H - E_\mu^{1c})\psi_l^{1c, \mu}\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)} = O(h^L) + O(\varepsilon^K),$
- 2) $\|\psi_l^{1c, \mu}\|_{L^2(\mathbb{R}_x^2)} \geq c > 0$ при $h \rightarrow 0$.

Функции $\psi_l^{1c, \mu}$ имеют компактные носители и асимптотически локализованы вблизи проекций $\pi_x \gamma_l^{1c}$ соответствующих кривых γ_l^{1c} на плоскость $\mathbb{R}_x^2$, т.е. $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_l^{1c, \mu}(x, \mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h) = 0$ для всех $x \notin \pi_x \gamma_l^{1c}$.

Утверждение 4 прямо вытекает из определения и свойств канонического оператора. В приложении А приведен вывод формулы (17a) для асимптотических собственных значений.

Как и в предыдущем подразделе, мы получаем оценку

$$\text{dist}(E_\mu^{1c}(\mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h), \sigma(\hat{H})) = O(h^L) + O(\varepsilon^K).$$

Из построения канонического оператора также следует, что все функции $\psi_l^{1c, \mu}(x, \mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h)$ могут быть выражены через $\psi_0^{1c, \mu}(x, \mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h)$ по формуле

$$\psi_l^{1c, \mu}(x, \mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h) = \psi_0^{1c, \mu}(x - l \cdot a, \mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h) e^{-\frac{i}{h} a_{22} l_2 x_1}. \quad (18)$$

5.4. Спектральные серии, отвечающие почти-инвариантным незамкнутым кривым. Теперь рассмотрим множество $\Gamma^{1o}(\varepsilon)$ незамкнутых почти-инвариантных траекторий H .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Для любой кривой $\gamma^{1o} \in \Gamma^{1o}(\varepsilon)$ существует набор функций $\psi_k^{1o, \mu}(x, \mathcal{I}_2, \varepsilon, h)$ и чисел (асимптотических собственных значений)

$$E_\mu^{1o}(\mathcal{I}_2, \varepsilon, h) = \mathcal{H}|_{\gamma_k^{1o}} + h \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{I}_1} \Big|_{\gamma_k^{1o}} + O(h^2), \quad \mu \in \mathbb{Z}_+, \quad \mu = O(1),$$

определяемых методом комплексного канонического оператора и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\|(H - E_\mu^{1o})\psi_k^{1o,\mu}\|_{L^2(\Pi_d)} = O(h^L) + O(\varepsilon^K)$;
- 2) $\|\psi_k^{1o}\|_{L^2(\Pi_d)} \geq c > 0$ при $h \rightarrow 0$;
- 3) $\psi_k^{1o,\mu}(x + d \cdot a, \mathcal{I}_2, \varepsilon, h) = e^{\frac{i}{h}(2\pi\mathcal{I}_2 - (d \cdot a)_2 x_1 - \frac{1}{2}(d \cdot a)_1 (d \cdot a)_2)} \psi_k^{1o,\mu}(x, \mathcal{I}_2, \varepsilon, h)$.

Здесь d – вектор дрейфа соответствующей траектории и

$$\Pi_d = \{\tau_1(d \cdot a) + \tau_2 J(d \cdot a) : \tau_1 \in [-1, 1], \tau_2 \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Условие 3 означает, что $\psi_k^{1o,\mu}$ не принадлежит $L^2(\mathbb{R}^2)$, и мы не можем использовать неравенство (16) непосредственно. Поступим следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть число E_μ^{1o} и функция $\psi_k^{1o,\mu}$ удовлетворяют условиям 1–3, тогда

$$\text{dist}(E_\mu^{1o}, \sigma(\hat{H})) = O(h^L) + O(\varepsilon^K).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости $\Psi = \psi_k^{1o,\mu}$, $E = E_\mu^{1o}$. Введем новые координаты y_1, y_2 :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{d \cdot a}{|d \cdot a|}.$$

В этих координатах Ψ удовлетворяет условию

$$\Psi(y_1 + |d \cdot a|, y_2) = \exp \left\{ i \left(2\pi\mathcal{I}_2 - (d \cdot a)_2(\alpha y_1 - \beta y_2) + \frac{1}{2}(d \cdot a)_1(d \cdot a)_2 \right) \right\} \Psi(y_1, y_2),$$

а оператор $\hat{H}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{1}{2}h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) - ih(\beta y_1 + \alpha y_2) \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y_1} - \beta \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \\ & + \frac{1}{2}(\beta y_1 + \alpha y_2)^2 + \varepsilon w(y_1, y_2), \end{aligned}$$

где $w(y_1, y_2) = v(\alpha y_1 - \beta y_2, \beta y_1 + \alpha y_2)$.

Положим

$$S(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(-\alpha\beta y_1^2 + \alpha\beta y_2^2 + 2\beta^2 y_1 y_2)$$

и введем оператор $U = e^{iS/h}$. Этот оператор унитарен, поэтому спектры операторов $\hat{H}$ и $\tilde{H} = U^{-1}\hat{H}U$ совпадают. Заметим, что оператор $\tilde{H}$ имеет вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left(-ih \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-ih \frac{\partial}{\partial y_2} \right)^2 + \varepsilon w(y_1, y_2).$$

Заметим также, что функция $\Phi = U^{-1}\Psi = e^{-iS/h}\Psi$ удовлетворяет условию

$$\Phi(y_1 + |d \cdot a|, y_2) = e^{2\pi \frac{i}{h} \mathcal{I}_2} \Phi(y_1, y_2). \quad (19)$$

Положим $\tilde{\Pi} = \{(y_1, y_2) : -|d \cdot a| \leq y_1 \leq |d \cdot a|\}$, $\tilde{\Pi}_m = \{(y_1, y_2) : -|d \cdot a|m \leq y_1 \leq |d \cdot a|m\}$. Выберем гладкую функцию $e(z)$, $0 \leq |e| \leq 1$, такую, что $e(z) = 0$ при $z \notin (-2|d \cdot a|, 2|d \cdot a|)$, $e(z) = 1$ при $z \in (-|d \cdot a|, |d \cdot a|)$, и введем постоянную c_1 такую, что $|e| + |e'| + |e''| \leq c_1$. Обозначим $e_m(y_1, y_2) = e(y_1/m)$.

Заметим, что равенство $\|f\|_{\tilde{\Pi}_m} = \sqrt{m} \|f\|_{L^2(\tilde{\Pi})}$ справедливо для любой функции f , удовлетворяющей условию (19), в частности, для функции $\phi = (\tilde{H} - E)\Phi$.

Теперь мы имеем следующую цепочку равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} \sqrt{m} \operatorname{dist}(\sigma(\tilde{H}), E) \|\Phi\|_{L^2(\tilde{\Pi})} &\leq \operatorname{dist}(\sigma(\tilde{H}), E) \|e_m \Phi\| \leq \|(\tilde{H} - E)(e_m \Phi)\| = \\ &= \left\| e_m \phi - \frac{h^2}{2} \Delta e_m \Phi - h^2 \nabla e \nabla \Phi - i h x_2 \frac{\partial e_m}{\partial x_1} \right\| \leq \\ &\leq \|e_m \phi\| + \frac{h^2}{2} \|\Delta e_m \Phi\| + h^2 \|\nabla e \nabla \Phi\| + h \left\| x_2 \frac{\partial e}{\partial x_1} \Phi \right\| \leq \\ &\leq c_1 \sqrt{2m} \|\phi\|_{L^2(\tilde{\Pi})} + \frac{h^2 c_1 \sqrt{m}}{2m^2} \|\Phi\|_{L^2(\tilde{\Pi})} + \frac{h^2 c_1 \sqrt{m}}{m} \|\nabla \Phi\|_{L^2(\tilde{\Pi})} + \\ &\quad + \frac{h c_1 \sqrt{m}}{m} \|x_2 \Phi\|_{L^2(\tilde{\Pi})}. \end{aligned}$$

Сохраним первый и последний члены этой цепочки, поделим их на $\sqrt{m}$ и устремим m к ∞ , тогда мы получим

$$\operatorname{dist}(\sigma(\tilde{H}), E) \|\Phi\|_{L^2(\tilde{\Pi})} \leq \|(\tilde{H} - E)\Phi\|_{L^2(\tilde{\Pi})}.$$

Из условия $\|\Phi\|_{L^2(\tilde{\Pi})} \geq c > 0$ при $h \rightarrow 0$ следует, что

$$\operatorname{dist}(\sigma(\tilde{H}), E) = O(h^L) + O(\varepsilon^K).$$

Как и в случае финитного движения, все функции $\psi_k^{1o, \mu}$ имеют локально-компактные носители и локализованы вблизи проекций соответствующих траекторий на плоскость $\mathbb{R}_x^2$. Все они могут быть выражены через единственную функцию $\psi_0^{1o, \mu}$ по формуле

$$\psi_k^{1o, \mu}(x) = \psi_0^{1o, \mu}(x + k(Jf) \cdot a) e^{\frac{ik}{h} f_1 a_{22} x_1}. \quad (20)$$

5.5. Общая структура спектра. Описанная выше процедура построения асимптотических собственных значений приводит к выбору дискретного подмножества точек на каждом ребре графа Роба, соответствующем финитному движению, и включению в спектр всех ребер, соответствующих инфинитному движению, целиком.

Таким образом, мы имеем наборы чисел $E_{\mu, \nu}^0$, $E_{\mu}^{1c}(\mathcal{I}_2^{\nu})$ и $E_{\mu}^{1o}(\mathcal{I}_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для фиксированного $\mu \in \mathbb{Z}_+$ назовем объединение Σ_μ значений $E_{\mu,\nu}^0, E_{\mu}^{1c}(\mathcal{I}_2^\nu)$ и $E_{\mu}^{1o}(\mathcal{I}_2)$ квазиклассической асимптотикой μ -й зоны Ландау.

Как следует из предшествующего изложения, квазиклассическая асимптотика зоны Ландау имеет следующую структуру. Рассмотрим граф Рибо функции $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^\mu, \cdot)$ для фиксированного μ . Проквантуем переменную $\mathcal{I}_2$ на ребрах, соответствующих финитному движению, по правилу (17), т.е. рассмотрим все эти значения как допустимые; заметим, что хотя эта формула верна при всех μ , ее обоснование проводится разными методами: при $\mu = O(1)$ используется метод осцилляторного приближения (см. раздел 5.2), а при $\mu = O(1/h)$ – метод комплексного ростка для замкнутых кривых (см. утверждение 4). На ребрах, отвечающих инфинитному движению, переменная $\mathcal{I}_2$ не квантуется, все значения допустимы (обоснование дается методом комплексного ростка для незамкнутых кривых, см. утверждение 5). Теперь множество значений $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^\mu, \mathcal{I}_2, \varepsilon)$ во всех допустимых точках совпадает с точностью $O(h^2)$ с квазиклассической асимптотикой μ -й зоны Ландау. Таким образом, эта квазиклассическая асимптотика определяется графом Рибо функции $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^\mu, \cdot)$. Заметим, что в силу малости h структура всех этих графов совпадает со структурой графа Рибо функции $\mathcal{H}(0, \cdot)$, поэтому и квазиклассические асимптотики имеют (с точностью $O(h^2)$) одну и ту же структуру (см. рис. 7).

Рис. 7. Структура квазиклассических асимптотик для нижних зон Ландау.

Строго говоря, мы можем только утверждать, что в $(O(h^L) + O(\varepsilon^K))$ -окрестности Σ_μ есть точки спектра $\hat{H}$. Тем не менее, по-видимому, это наиболее полный результат, который можно получить с использованием применяемых выше асимптотических методов, основанных на наиболее простой *аддитивной* (по параметру h) асимптотике, не

принимающей во внимание *туннельные эффекты*. Важно отметить, что приведенные рассуждения верны как для рациональных, так и для иррациональных значений потока магнитного поля.

6. ЗОННАЯ СТРУКТУРА СПЕКТРА. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

6.1. Блоховские условия. Число $\eta = a_{22}/h$ имеет смысл *числа квантов потока магнитного поля через элементарную ячейку* (и иногда называется просто *поток*). Известно, что если число η рационально, $\eta = N/M$, где N, M – взаимно простые целые числа, то спектр $\widehat{H}$ имеет зонную структуру. Удобно параметризовать точки внутри зоны *квазиимпульсом* $q = (q_1, q_2) \in [0, 1/M) \times [0, 1)$, $E = E_n(q, \varepsilon, h)$, где n – номер соответствующей зоны. Также для любой зоны существует набор *блоховских функций* $\Psi_n^j(x, q, \varepsilon, h)$, $j = \overline{0, M-1}$. Для фиксированного q эти функции есть обобщенные собственные функции $\widehat{H}$, соответствующие спектральному значению $E_n(q, \varepsilon, h)$. Они также удовлетворяют следующим (*магнито-блоховским*) условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_n^j(x + a_1, q, \varepsilon, h) &= \Psi_n^j(x, q, \varepsilon, h) e^{-2\pi i(q_1 - \eta j)}, & j &= \overline{0, M-1}, \\ \Psi_n^j(x + a_2, q, \varepsilon, h) &= \Psi_n^{j+1}(x, q, \varepsilon, h) e^{-i\eta(x_1 + \frac{1}{2}a_{21})}, & j &= \overline{0, M-2}, \\ \Psi_n^{M-1}(x + a_2, q, \varepsilon, h) &= \Psi_n^0(x, q, \varepsilon, h) e^{-i\eta(x_1 + \frac{1}{2}a_{21}) - 2\pi i q_2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Попытаемся построить семейство функций, удовлетворяющих условиям (21), используя асимптотические собственные функции, полученные в разделе 5. Наши последующие рассуждения зависят от структуры графа Рибба функции $\mathcal{H}$, и мы ограничимся простейшим случаем, когда $\mathcal{H}(0, \cdot)$ – минимальная функция Морса, т.е. имеет один минимум и один максимум в элементарной ячейке. Соответствующий граф показан на рис. 3.

6.2. Финитное движение. Рассмотрим сначала ребра графа Рибба, соответствующие финитному классическому движению. По аналогии с “представлением Лифшица–Гельфанда–Зака” функции, удовлетворяющие блоховским условиям, будем искать в виде

$$\Psi^j(x, q, \varepsilon, h) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} C_l^j(q, h) \psi_l(x, \varepsilon, h), \quad (22)$$

где ψ_l обозначает $\psi_l^{0, \mu, \nu}(x, \varepsilon, h)$ или $\psi_l^{1c, \mu}(x, \mathcal{I}_2^\nu, \varepsilon, h)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Для каждого μ и ν существуют M^2 линейно независимых функций вида (22), образующих M наборов, удовлетворяющих условиям (21). Функция $\Psi_n^{s, j}$ (j -й член s -го набора) может быть задана коэффициентами $C_l^{s, j}(q)$ следующего вида:

$$C_{l_1, l_2}^{s, j}(q, h) = \begin{cases} \exp \left\{ -2\pi i(q_1 l_1 + q_2 n) + 2\pi i \eta l_1 j - \frac{i \eta l_2 a_{21}}{2} \right\} \\ \quad \text{при } l_2 + j - s + nM = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты опускаем зависимость всех функций от h и ε . Используя равенства (15) и (18), получаем

$$\Psi^j = \sum_{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2} C_{l_1, l_2}^j(q) \psi_0(x - l_1 a_1 - l_2 a_2) e^{-\frac{i}{h} a_{22} l_2 x_1}.$$

Так как асимптотические носители ψ_l не пересекаются, блоховские условия (21) дают

$$\begin{cases} C_{l_1+1, l_2}^j(q) = C_{l_1, l_2}^j(q) e^{-2\pi i(q_1 - j\eta)}, & j = \overline{0, M-1}, \\ C_{l_1, l_2+1}^j = C_{l_1, l_2}^{j+1} e^{-i\frac{\eta}{2} a_{21}}, & j = \overline{0, M-2}, \\ C_{l_1, l_2+1}^{M-1} = C_{l_1, l_2}^0 e^{-\frac{i\eta}{2} a_{21} - 2\pi i q_2}. \end{cases} \quad (24)$$

Мы видим, что все числа C_{l_1, l_2}^j определяются произвольно выбранными числами $C_{0,0}^j$, $j = \overline{0, M-1}$. Таким образом, существуют не более чем M^2 линейно независимых решений. Если мы положим для s -го решения $C_{0,0}^{s,j} = \delta_{sj}$, $s = \overline{0, M-1}$, то придем к формулам (23). Покажем, что эти решения действительно линейно независимы. Для этого достаточно доказать линейную независимость M^2 векторов

$$A^{s,j} = (C_{l_1, l_2}^{s,j})_{l_1, l_2 = \overline{0, M-1}}, \quad s, j = \overline{0, M-1}.$$

Матрица Грамма данной системы векторов $G_{(s_1, j_1), (s_2, j_2)} = \langle A^{s_1, j_1} | A^{s_2, j_2} \rangle$ легко вычисляется:

$$G_{(s_1, j_1), (s_2, j_2)} = \begin{cases} M, & \text{если } s_1 = s_2 \text{ и } j_1 = j_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку эта матрица невырождена, линейная независимость доказана.

Утверждение 7 указывает на то, что для любой точки квантования $E_{\mu, \nu}^0$ и $E_{\mu}^{1c}(I_2^\nu)$ в некоторой ее экспоненциально малой (вместе с h) окрестности содержатся M экспоненциально малых спектральных зон. Наше приближение не может дать строгого обоснования, это требует применения других, более тонких методов, основанных на мультипликативных асимптотиках и учете эффектов туннелирования. Тем не менее представляется возможным дать дополнительные аргументы.

Если мы увеличим элементарную ячейку по правилу $a_1 \rightarrow M a_1$, то придем к случаю целого потока, когда существует только одна блоховская функция для каждой зоны. На каждом множестве уровня $\mathcal{H}$, соответствующем финитному движению, расположены M связанных компонент, т.е. соответствующий граф Роба имеет M концевых ребер с каждой стороны и для каждого из этих ребер можно построить некоторые функции, удовлетворяющие блоховским условиям, используя приведенные выше рассуждения. Очевидно, что все эти функции будут линейно независимы. В известных задачах (например, в задаче о двойной яме) подобная ситуация действительно соответствует существованию M асимптотических собственных значений с экспоненциально малым расстоянием между ними.

Из формул (24) вытекает также, что на пространстве построенных асимптотических собственных функций реализуется представление группы магнитных трансляций для

потока N/M . Поскольку неприводимые представления этой группы M -мерны [13], то малое изменение параметров ведет к распаду собственного числа на M чисел [6].

Представление группы магнитных трансляций, реализуемое с помощью формул (24), интересно рассмотреть в контексте так называемой *двойственности Лангбайна* [25], [26]. С одной стороны, оно является подпредставлением стандартного представления этой группы, диктующего разбиение зоны Ландау на N магнитных подзон [6] (см. ниже). С другой стороны, оно аналогично представлению группы магнитных трансляций в дискретном пространстве [27], где его разложение на неприводимые представления диктует распад зоны на M магнитных минизон.

6.3. Инфинитное движение. Теперь построим функции, удовлетворяющие блоховским условиям, соответствующие ребрам графа Роба с инфинитным движением.

Каждое множество уровня $\mathcal{H}$ состоит из двух семейств незамкнутых траекторий, и их векторы дрейфа имеют взаимно обратные направления; обозначим эти векторы через $\pm d$. Соответствующие асимптотические собственные функции обозначим $\psi_k^{1o,\mu,\pm}(x, \mathcal{I}_2^\pm, \varepsilon, h)$. Будем использовать явную зависимость переменной действия $\mathcal{I}_2^\pm$ от номера k (т.е. действия, соответствующие траекториям с номером k , есть $\mathcal{I}_2^\pm + ka_{22}$).

Для простоты будем предполагать, что $d = (1, 0)$ (если это не так, можно повернуть координаты калибровочным преобразованием, эта процедура уже применялась в доказательстве утверждения 6), тогда соответствующие сопряженные векторы есть $\pm f = (\pm 1, 0)$.

Из условия 3 (см. утверждение 5) и равенства (20) следует, что функции $\psi_k^{1o,\mu,\pm}(x, \mathcal{I}_2, \varepsilon, h)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \psi_k^{1o,\mu,\pm}(x + a_1, \mathcal{I}_2^\pm + ka_{22}, \varepsilon, h) &= \psi_k^{1o,\mu,\pm}(x, \mathcal{I}_2^\pm + ka_{22}, \varepsilon, h) e^{\pm \frac{2\pi i}{h}(\mathcal{I}_2^\pm + ka_{22})}, \\ \psi_k^{1o,\mu,\pm}(x + a_2, \mathcal{I}_2^\pm + ka_{22}, \varepsilon, h) &= \psi_{k\pm 1}^{1o,\mu,\pm}(x, \mathcal{I}_2^\pm + ka_{22}, \varepsilon, h) e^{-i\eta x_1 \pm i\eta ka_{21}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Опуская зависимость от μ , функции, удовлетворяющие блоховским условиям, будем опять искать в виде

$$\Psi^{j,\pm}(x, q, \varepsilon, h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k^{j,\pm}(q, h) \psi_k^{1o,\pm}(x, \mathcal{I}_2^\pm + ka_{22}, \varepsilon, h). \quad (26)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Функции $\Psi^{j,\pm}$, задаваемые формулой (26), удовлетворяют блоховским условиям только при*

$$\mathcal{I}_2^\pm = \mp h \left(q_1 + \frac{n^\pm}{M} \right). \quad (27)$$

Коэффициенты в (26) могут быть выбраны как

$$C_k^{j,\pm} = \begin{cases} \exp \left\{ \pm i\eta \left(k|k-1| \mp \frac{|k|}{2} \right) a_{21} + 2\pi i n q_2 \right\} & \text{при } k+j = nM, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (26) и (25) в (21). Так как асимптотические носители ψ_k^{1o} не пересекаются, мы приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} C_k^{j,\pm}(q, h)e^{\pm 2\pi i(\mathcal{I}_2^\pm + ka_{22})/h} &= C_k^{j,\pm}(q, h)e^{-2\pi i(q_1 - \eta j)}, & j = \overline{0, M-1}, \\ C_{k\mp 1}^{j,\pm}(q, h)e^{-i\eta x_1 \pm i\eta(k\mp 1)a_{21}} &= C_k^{j+1,\pm}(q, h)e^{-i\eta(x_1 + a_{21}/2)}, & j = \overline{0, M-2}, \\ C_{k\mp 1}^{M-1,\pm}(q, h)e^{-i\eta x_1 \pm i\eta(k\mp 1)a_{21}} &= C_k^{0,\pm}(q, h)e^{-i\eta(x_1 + a_{21}/2) - 2\pi i q_2}. \end{aligned}$$

Из первого равенства получаем

$$\mathcal{I}_2^\pm + ka_{22} = h(m^\pm \mp q_1 \pm \eta(j-1)),$$

откуда следует условие (27). Дополнительно мы имеем следующие условия для коэффициентов $C_k^{j,\pm}$:

$$\begin{aligned} C_{k\pm 1}^{(j+1) \bmod M, \pm}(q, h) &= \sigma_j(q) C_k^{j,\pm}(q, h) e^{\pm \frac{ia_{21}}{2}(k\pm 1)}, \\ j = \overline{0, M-1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_0, \dots, \sigma_{M-2}(q) &= 1, \quad \sigma_{M-1}(q) = e^{2\pi i q_2}. \end{aligned}$$

Все эти коэффициенты однозначно выражаются через $C_0^{j,\pm}$, и, следовательно, мы имеем не более M семейств $\Psi^{s,j,\pm}$, определяемых через $C_0^{s,j,\pm} = \delta_{sj}$, и коэффициенты $C_k^{s,j}$ определяются по формулам (28) с j , замененным на $j-s$. Легко видеть, что равенства $\Psi_{(s+1) \bmod M}^{(j+1) \bmod M} = \Psi_s^j$ справедливы для любых s и j , и это означает, что наборы Ψ_s^j , $j = \overline{0, M-1}$, получаются друг из друга перенумерацией. Таким образом, мы имеем лишь один набор функций, удовлетворяющих блоховским условиям.

Зависимость $\mathcal{I}_2^\pm$ от q_1 [23] влечет следующие соотношения между энергией и квази-импульсами (эвристические законы дисперсии):

$$E = E^\pm(q_1, h) = \mathcal{H}(0, \mathcal{I}_2^\pm(q_1, h))$$

(зависимость от q_2 отсутствует с точностью $O(h^L) + O(\varepsilon^K)$). В некоторых “критических” точках q_1^* мы имеем $E^+(q_1^*, h) = E^-(q_1^*, h)$ (см. рис. 8). Мы полагаем, что в экспоненциально малых окрестностях по h этих точек расположены лакуны, которые также экспоненциально малы по h . Точнее, можно ожидать, что вблизи “критических” точек есть в действительности точки из разных зон и соответствующие блоховские функции имеют асимптотику, описываемую некоторой нетривиальной линейной комбинацией функций $\Psi^{j,\pm}$. В этом случае истинные законы дисперсии имеют вид, показанный на рис. 9. Строгое доказательство этих фактов должно опираться на исследование эффектов туннелирования [20].

Можно показать, что при $d \neq (1, 0)$ все коэффициенты $C_k^{j,\pm} \neq 0$. Можно также ожидать, что дисперсионные соотношения $E(q, h)$ с некоторой точностью будут функциями линейной комбинации q_1 и q_2 .

6.4. Выводы. Основываясь на изложенных выше эвристических рассуждениях, дадим общее описание асимптотики зонного спектра.

Рис. 8. Эвристические законы дисперсии.

Рис. 9. Истинные законы дисперсии (гипотеза).

Существуют различные асимптотики спектра $\hat{H}$ на различных ребрах графа Рибба. В простейшем случае на ребрах, соответствующих финитному движению, мы имеем экспоненциально малые зоны. Эти зоны сгруппированы по M (M – знаменатель потока), и расстояние между зонами одной группы также экспоненциально мало. Группы разделены лагунами длиной $O(\varepsilon h)$. На ребрах, соответствующих инфинитному движению, имеются зоны длиной $O(\varepsilon h)$, разделенные экспоненциально малыми лагунами. Заметим, что данное приближение не дает асимптотики спектра вблизи уровней энергии, соответствующих сепаратрисам, здесь нужно использовать специальные методы.

Возвращаясь к оператору $\hat{H}_{B,w}$, мы получаем экспоненциально малые по B зоны и лагуны длиной порядка $1/B$ на ребрах, соответствующих финитному движению, а также экспоненциально малые по B лагуны и зоны длиной порядка $1/B$ на ребрах, соот-

ветствующих инфинитному движению. Заметим, что диаметр D_μ квазиклассической асимптотики μ -й зоны Ландау для оператора $\hat{H}$ с точностью до $O(h^2)$ имеет вид

$$D_\mu = \max \mathcal{H}(\mathcal{I}_1^\mu, \cdot) - \min \mathcal{H}(\mathcal{I}_1^\mu, \cdot) \approx \varepsilon (\max v - \min v).$$

Принимая во внимание связь между ε и B , а также между $\hat{H}$ и $\hat{H}_{B,w}$ (см. введение), приходим к важному выводу: порядок главного члена диаметра квазиклассической асимптотики зоны Ландау оператора $\hat{H}_{B,w}$ не зависит от B .

Каждая зона Ландау в таком случае распадается примерно на N подзон (N – числитель потока), для проверки достаточно подсчитать число точек квантования на всех ребрах с учетом кратности. При приближении значения потока η к иррациональному числу значения N и M изменяются нерегулярно; возникает картина, похожая на известную *бабочку Хофштадтера* [28]. Из приведенных выше формул для асимптотических собственных функций, удовлетворяющих блоховским условиям, также легко видеть, что каждая из них локализована (при подходящем выборе координат) в полосах элементарных ячеек, разделенных $M - 1$ “пустыми” полосами. Поскольку число M при приближении значения потока к иррациональному числу неограниченно растет, в пределе каждая из этих функций, видимо, будет локализована в окрестности только одной такой полосы.

Если граф Роба имеет более сложную структуру, асимптотика зонного спектра также усложняется. В частности, могут появиться эффекты туннелирования между ребрами, соответствующими финитному и инфинитному движениям. Задачи с различными графами Роба требуют раздельного изучения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обоснование формул для асимптотических собственных значений

А.1. Асимптотические собственные значения, соответствующие точкам.

Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка покоя γ^0 гамильтониана H называется *устойчивой в линейном приближении*, если матрица

$$H'' = \begin{pmatrix} -H_{xp} & -H_{xx} \\ H_{pp} & H_{px} \end{pmatrix} \Big|_{\gamma^0} \quad (29)$$

диагонализуема и имеет чисто мнимый спектр.

Обозначим через $\langle \cdot | \cdot \rangle$ билинейное произведение в $\mathbb{C}^2$,

$$\langle (w_1, w_2) | (z_1, z_2) \rangle = w_1 z_1 + w_2 z_2, \quad w_{1,2}, z_{1,2} \in \mathbb{C},$$

и через $[\cdot | \cdot]$ индуцированное им кососкалярное произведение в $\mathbb{C}^4$,

$$[(w^1, z^1) | (w^2, z^2)] = \langle w^1 | z^2 \rangle - \langle w^2 | z^1 \rangle, \quad w^{1,2}, z^{1,2} \in \mathbb{C}^2.$$

Устойчивость точки γ^0 равносильна существованию двумерной комплексной плоскости r в $\mathbb{C}^4$, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) для любых векторов $\lambda', \lambda'' \in r$ выполнено $[\lambda' | \lambda''] = 0$;
- 2) для любого ненулевого вектора $\lambda \in r$ выполнено $\frac{1}{2i}[\lambda | \bar{\lambda}] > 0$;
- 3) $H''r \subset r$.

Такая плоскость представляет собой частный случай *комплексного ростка Маслова*.

Пусть $i\beta_1, i\beta_2$ – собственные значения H'' такие, что соответствующие собственные векторы лежат в плоскости r , тогда осцилляторное приближение дает следующую формулу для асимптотических собственных значений оператора $\hat{H}$ [21]:

$$E_{\mu, \nu}^0 = H|_{\gamma^0} + \beta_1 \left(\mu + \frac{1}{2} \right) h + \beta_2 \left(\nu + \frac{1}{2} \right) h + O(h^2). \quad (30)$$

Вернемся к матрице H'' . Имеет место следующий простой факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть a – собственный вектор матрицы H'' с собственным значением α , $(\tilde{p}, \tilde{x})$ – новые канонические переменные, в которых гамильтониан H имеет вид $\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{x})$, и

$$\tilde{H}'' = \begin{pmatrix} -\tilde{H}_{\tilde{x}\tilde{p}} & -\tilde{H}_{\tilde{x}\tilde{x}} \\ \tilde{H}_{\tilde{p}\tilde{p}} & \tilde{H}_{\tilde{p}\tilde{x}} \end{pmatrix} \Big|_{\gamma^0}.$$

Тогда вектор $\partial(p, x)/\partial(\tilde{p}, \tilde{x})a$ есть собственный вектор $\tilde{H}''$ с тем же собственным значением α .

Положим $\tilde{p} = (P, \mathcal{Y}_1)$, $\tilde{x} = (Q, \mathcal{Y}_2)$, тогда мы приходим к следующей матрице вторых производных:

$$\tilde{H}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & -\mathcal{H}_{12} & 0 & -\mathcal{H}_{22} \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_{11} & 0 & \mathcal{H}_{12} \end{pmatrix} + O(e^{-C/\varepsilon}), \quad \omega = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{I}_1} \Big|_{\gamma^0}, \quad \mathcal{H}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathcal{Y}_i \partial \mathcal{Y}_j} \Big|_{\gamma^0}.$$

Собственные значения $\tilde{H}''$ с точностью $O(e^{-C/\varepsilon})$ могут быть найдены явно: это $i\beta_1^\pm = \pm i\omega$ и $i\beta_2^\pm = \pm i\sqrt{\det(\mathcal{H}_{ij})}$. Построив комплексный росток, мы находим, что в (30) должно быть $\beta_1 = \omega$, $\beta_2 = \beta_2^\pm$, где знак $+/-$ соответствует минимуму/максимуму v . Легко также показать, что в данном случае $\pm\sqrt{\det(\mathcal{H}_{ij})} = \partial \mathcal{H} / \partial \mathcal{I}_2$.

А.2. Асимптотические собственные значения, соответствующие кривым.

В соответствии с методом канонического оператора каждой точке $(P(\tau, \varepsilon), X(\tau, \varepsilon))$ кривой $\gamma^1(\varepsilon)$ мы сопоставляем двумерную комплексную плоскость $r(\tau, \varepsilon) \subset \mathbb{C}^4$, натянутую на векторы $a_1(\tau, \varepsilon) = (w(\tau, \varepsilon), z(\tau, \varepsilon)) = (P_\tau, X_\tau)$ и $a_2(\tau, \varepsilon) = (W(\tau, \varepsilon), Z(\tau, \varepsilon))$, $W, Z \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $[a_1 | a_2] = 0$;
- 2) $\frac{1}{2i}[a_2 | \bar{a}_2] > 0$;

3) вектор a_2 инвариантен относительно линеаризованной гамильтоновой системы

$$\dot{\xi} = H''\xi, \quad \text{где} \quad H'' = \begin{pmatrix} -H_{xp} & -H_{xx} \\ H_{pp} & H_{px} \end{pmatrix} \Big|_{\gamma^1}; \quad (31)$$

4) вектор a_2 является собственным вектором оператора монодромии системы (31).

Такое семейство плоскостей называется *комплексным ростком Маслова* над кривой γ^1 . Существование комплексного ростка гарантирует, что собственное значение α оператора монодромии, соответствующее a_2 , равно по абсолютной величине единице; запишем его в виде $\alpha = e^{i\beta T}$, тогда имеем следующую формулу для асимптотических собственных значений [22]–[24]:

$$E = \mathcal{H}|_{\gamma^1} + h \left(\mu + \frac{1}{2} \right) \beta$$

(о том, почему мы предпочитаем β другим возможным $\beta + 2\pi n/T$, см. в работе [24], это вопрос нормировки).

Собственные значения матрицы монодромии трудно найти непосредственно, поэтому поступим следующим образом. Пусть $(\tilde{p}, \tilde{x})$ – новые канонические переменные, в которых гамильтониан H имеет вид $\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{x})$. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{\eta} = \tilde{H}''\eta, \quad \text{где} \quad \tilde{H}'' = \begin{pmatrix} -\tilde{H}_{\tilde{x}\tilde{p}} & -\tilde{H}_{\tilde{x}\tilde{x}} \\ \tilde{H}_{\tilde{p}\tilde{p}} & \tilde{H}_{\tilde{p}\tilde{x}} \end{pmatrix} \Big|_{\gamma^1}. \quad (32)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 10 (см. [23]). *Линейное преобразование $\xi = \partial(p, x)/\partial(\tilde{p}, \tilde{x})\eta$ переводит систему (31) в систему (32) и сохраняет кососкалярное произведение любых двух решений.*

Положим $\tilde{p} = (\mathcal{P}, \mathcal{Y}_1)$, $\tilde{x} = (\mathcal{Q}, \mathcal{Y}_2)$, тогда мы имеем

$$\tilde{H}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & -\mathcal{H}_{12} & 0 & -\mathcal{H}_{22} \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_{11} & 0 & \mathcal{H}_{12} \end{pmatrix} + O(e^{-C/\varepsilon}), \quad \omega = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{I}_1} \Big|_{\gamma^1}, \quad \mathcal{H}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathcal{Y}_i \partial \mathcal{Y}_j} \Big|_{\gamma^1}.$$

Так как матрица $\partial(p, x)/\partial(\mathcal{P}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Q}, \mathcal{Y}_2)$ периодична, то операторы монодромии, соответствующие системам (31) и (32), имеют равные собственные значения. Матрица монодромии системы (32) имеет (с точностью до $O(e^{-C/\varepsilon})$) собственные значения $e^{\pm i\omega T}$ и дважды вырожденное собственное значение 1. Возвращаясь к исходным координатам (p, x) , мы видим, что собственное значение, отвечающее вектору a_2 , есть $e^{i\omega T}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Формулы для спектральных серий с точностью $O(\varepsilon^2)$

Б.1. Почти-инвариантные многообразия. Построим спектральные серии для нижних зон Ландау с точностью $O(\varepsilon^2)$. Для этого сначала приведем гамильтониан H к виду (7) заменой переменных (1). Очевидно, достаточно построить эту замену переменных только для $\mathcal{I}_1 = 0$. Путем простых вычислений из (7) и (8) получаем $\mathcal{H}(0, \mathcal{Y}, \varepsilon) = \varepsilon v(\mathcal{Y})$, а из (6) и (9) находится требуемая замена переменных:

$$P = -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_2}(\mathcal{Y}^0), \quad Q = -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1}(\mathcal{Y}^0), \quad y = \mathcal{Y}.$$

Построение почти-инвариантных кривых и точек покоя теперь очевидно. Обозначим через $\mathcal{Y}^0$ решение гамильтоновой системы для v :

$$\frac{d\mathcal{Y}_1^0}{d\tau} = -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_2}(\mathcal{Y}^0), \quad \frac{d\mathcal{Y}_2^0}{d\tau} = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1}(\mathcal{Y}^0).$$

Можно проверить, что кривые и точки, заданные как

$$p_1 = -\mathcal{Y}_2^0, \quad p_2 = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1}(\mathcal{Y}^0), \quad x_1 = \mathcal{Y}_1^0 - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1}(\mathcal{Y}^0), \quad x_2 = \mathcal{Y}_2^0 - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_2}(\mathcal{Y}^0)$$

есть почти-инвариантные с точностью $O(\varepsilon^2)$ многообразия гамильтониана H . Более того, точки, индуцированные неподвижными точками v , есть в действительности точные инвариантные точки H .

Б.2. Спектральные серии, отвечающие точкам. В соответствии с методом осцилляторного приближения только точки локального экстремума v могут быть использованы для построения спектральных серий. Пусть $\mathcal{Y}^0$ – невырожденный локальный экстремум функции v . Соответствующие (нуль-мерные) инвариантные многообразия даются формулами

$$\gamma_l^0 = (p = P_l, x = X_l) = (-\mathcal{Y}_2^0 - (l \cdot a)_2, 0, \mathcal{Y}_1^0 + (l \cdot a)_1, \mathcal{Y}_2^0 + (l \cdot a)_2).$$

Формулы для асимптотических собственных значений выглядят следующим образом:

$$E_{\mu, \nu}^{0, \pm} = \varepsilon v + h \left[\left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \Delta v \right) \left(\mu + \frac{1}{2} \right) \pm \left(\varepsilon \sqrt{\det(v_{ij})} \right) \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] + O(h\varepsilon^2), \quad (33)$$

где

$$(v_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i, j=1, 2}, \quad \mu, \nu = O(1),$$

знак $+/ -$ соответствует точке минимума/максимума v и все функции вычисляются в точке $\mathcal{Y}^0$.

Базис комплексного ростка задается векторами a_1 и $a_{2\pm}$,

$$a_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon), \quad a_{2\pm} = \begin{pmatrix} w_{2\pm} \\ z_{2\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{12} \pm i\sqrt{\det(v_{ij})} \\ 0 \\ v_{22} \\ v_{12} \mp i\sqrt{\det(v_{ij})} \end{pmatrix} + O(\varepsilon),$$

где знак $+/-$ соответствует минимуму/максимуму v .

Введем матрицы $B^\pm$, $C^\pm$ и $Q^\pm$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B^\pm &= (w_1, w_{2\pm}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_{12} \pm i\sqrt{\det(v_{ij})} \\ i & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon), \\ C^\pm &= (z_1, z_{2\pm}) = \begin{pmatrix} -i & v_{22} \\ 1 & v_{12} \mp i\sqrt{\det(v_{ij})} \end{pmatrix} + O(\varepsilon), \\ Q^\pm &= B^\pm (C^\pm)^{-1} = \frac{1}{-v_{22} \mp \sqrt{\det(v_{ij})} - iv_{12}} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} v_{12} \mp \sqrt{\det(v_{ij})} - iv_{12} & \pm \sqrt{\det(v_{ij})} + iv_{12} \\ \pm \sqrt{\det(v_{ij})} + iv_{12} & -iv_{22} \end{pmatrix} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Введем операторы рождения

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,l} &= \frac{1}{\sqrt{h}} \left[\langle \bar{w}_1 | x - X_l \rangle - \left\langle \bar{z}_1 \left| -ih \frac{\partial}{\partial x} - P_l \right. \right\rangle \right], \\ \hat{a}_{2,l\pm} &= \frac{1}{\sqrt{h}} \left[\langle \bar{w}_{2\pm} | x - X_l \rangle - \left\langle \bar{z}_{2\pm} \left| -ih \frac{\partial}{\partial x} - P_l \right. \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Положим также

$$S_l^\pm(x) = \langle P_l | x - X_l \rangle + \frac{1}{2} \langle x - X_l | Q^\pm(x - X_l) \rangle.$$

Теперь асимптотическая собственная функция, соответствующая асимптотическому собственному значению $E_{\mu,\nu}^{0,\pm}$, задается в некоторой окрестности X_l формулой

$$\psi_l^{0,\mu,\nu,\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} (\hat{a}_{1,l})^\mu (\hat{a}_{2,l\pm})^\nu e^{\frac{i}{h} S_l^\pm(x)}.$$

Б.3. Спектральные серии, отвечающие кривым. Пусть кривая $\gamma^1 = (P(\tau, \varepsilon), X(\varepsilon))$ задана уравнениями

$$\begin{aligned} P_1(\tau, \varepsilon) &= -\mathcal{Y}_2^0(\tau, \varepsilon), & P_2(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1}(\mathcal{Y}^0(\tau, \varepsilon)), \\ X_1(\tau, \varepsilon) &= \mathcal{Y}_1^0(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1}(\mathcal{Y}^0(\tau, \varepsilon)), & X_2(\tau, \varepsilon) &= \mathcal{Y}_2^0(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_2}(\mathcal{Y}^0(\tau, \varepsilon)), \end{aligned}$$

где $\mathcal{Y}^0$ – замкнутая траектория (10), удовлетворяющая условию квантования (17), или любая незамкнутая траектория (10). Из предыдущих рассуждений можно легко получить следующую формулу для асимптотических собственных значений:

$$E = H|_{\gamma^1} + \omega \left(\mu + \frac{1}{2} \right) h + O(h^2), \quad \omega = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \Delta v|_{\gamma^1}.$$

Опишем теперь схему построения асимптотических собственных функций.

Базис соответствующего комплексного ростка состоит из векторов $a_1(\tau)$ и $a_2(\tau)$:

$$a_1(\tau) = \begin{pmatrix} w_1(\tau) \\ z_1(\tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -\dot{\mathcal{Y}}_2^0(\tau) \\ 0 \\ \dot{\mathcal{Y}}_1^0(\tau) \\ \dot{\mathcal{Y}}_2^0(\tau) \end{pmatrix} + O(\varepsilon), \quad a_2(\tau) = \begin{pmatrix} w_2(\tau) \\ z_2(\tau) \end{pmatrix} = e^{i\omega\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon).$$

Введем матрицы $B(\tau, \varepsilon)$, $C(\tau, \varepsilon)$ и $Q(\tau, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B(\tau, \varepsilon) &= (w_1(\tau, \varepsilon), w_2(\tau, \varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -\dot{\mathcal{Y}}_2^0(\tau, \varepsilon) & 0 \\ 0 & i\varepsilon e^{i\omega\tau} \end{pmatrix} + O(\varepsilon), \\ C(\tau, \varepsilon) &= (z_1(\tau, \varepsilon), z_2(\tau, \varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{Y}}_1^0(\tau, \varepsilon) & -i\varepsilon e^{i\omega\tau} \\ \dot{\mathcal{Y}}_2^0(\tau, \varepsilon) & \varepsilon e^{i\omega\tau} \end{pmatrix} + O(\varepsilon), \\ Q(\tau, \varepsilon) &= B(\tau, \varepsilon)C^{-1}(\tau, \varepsilon) = \frac{\dot{\mathcal{Y}}_2^0(\tau, \varepsilon)}{\dot{\mathcal{Y}}_1^0(\tau, \varepsilon) + i\dot{\mathcal{Y}}_2^0(\tau, \varepsilon)} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

В некоторой трубчатой окрестности $\Omega(\gamma^1)$ проекции кривой γ^1 на x -плоскость уравнение $\langle \dot{X}(\tau) | x - X(\tau) \rangle = 0$ однозначно разрешимо (с точностью до T для замкнутых кривых) относительно τ . Обозначим это решение через $\tau(x, \varepsilon)$. Теперь введем операторы рождения

$$\hat{a}(x, \varepsilon, h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \left\{ \langle \bar{w}_2 | x - X(\tau, \varepsilon) \rangle - \langle \bar{z}_2 | -ih \frac{\partial}{\partial x} - P(\tau, \varepsilon) \rangle \right\} \Big|_{\tau=\tau(x, \varepsilon)},$$

а также фазу

$$\begin{aligned} S(x, \varepsilon) &= \left\{ \int_0^\tau P(\tau, \varepsilon) \dot{X}(\tau, \varepsilon) d\tau + \langle P(\tau, \varepsilon) | x - X(\tau, \varepsilon) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \langle x - X(\tau, \varepsilon) | Q(\tau, \varepsilon)(x - X(\tau, \varepsilon)) \rangle \right\} \Big|_{\tau=\tau(x, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Теперь в окрестности $\Omega(\gamma^1)$ асимптотическая собственная функция, соответствующая асимптотическому собственному значению E , может быть записана как

$$\psi(x, \varepsilon, h) = (\hat{a}(x, \varepsilon, h))^\mu e^{\frac{i}{h} S(x, \varepsilon)}.$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность Е. Д. Белоколову, В. С. Буслаеву, Й. Заку, В. А. Маргулису, Л. А. Пастуру, М. А. Потеряхину, А. И. Шафаревичу, П. Экснеру, П. Юдицкому и особенно В. А. Гейлеру за обсуждения и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке гранта Немецкого исследовательского общества (Deutsche Forschungsgemeinschaft) и Российской Академии наук № 436 RUS113/572, а также гранта INTAS-00-257. К. В. Панкрашкин также благодарен за финансовую поддержку DFG GRK 46 “Geometrie und Nichtlineare Analysis”.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
- [2] D. Weiss, K. von Klitzing, K. Ploog, G. Weimann. Europhys Lett. 1989. V. 8. P. 179; R. R. Gerhardts, D. Weiss, U. Wulf. Phys. Rev. B. 1991. V. 43. № 6. P. 5192; V. Gudmundsson, R. R. Gerharts. Phys. Rev. B. 1996. V. 24. № 8. P. 5223; U. Kuhl, H.-J. Stöckmann. Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. № 15. P. 3232.
- [3] С. П. Новиков, А. Я. Мальцев. УФН. 1998. Т. 168. № 3. С. 249.
- [4] М. Я. Азбель. ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 929; B. Helffer, J. Sjöstrand. Equation de Schrödinger avec champ magnetique et equation de Harper. In: Schrödinger Operators (Sonderborg, 1988). Lect. Notes Phys. V. 345. Eds. H. Holden, A. Jensen. Berlin: Springer, 1989. P. 118.
- [5] E. I. Dinaburg, Ya. G. Sinai, A. B. Soshnikov. Commun. Math. Phys. 1997. V. 189. P. 559.
- [6] С. П. Новиков. Двумерные операторы Шредингера в периодических полях. В сб.: Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Т. 23. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3.
- [7] В. П. Маслов, М. В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
- [8] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука, 1997.
- [9] Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов. ДАН. 2001. Т. 379. № 3. С. 313.
- [10] J. Brüning, S. Yu. Dobrokhotov, K. V. Pankrashkin. Russ. J. Math. Phys. 2002. Т. 9. в печати.
- [11] Т. Андо, А. Фаулер, Ф. Штерн. Электронные свойства двумерных систем. М.: Мир, 1985.
- [12] И. М. Гельфанд. ДАН СССР. 1950. Т. 76. № 6. С. 1117; J. Zak. Solid State Phys. 1972. V. 27. P. 1; Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Статистическая физика. Часть 2. § 55. М.: Наука, 1978.
- [13] J. Zak. Phys. Rev. 1964. V. 134. P. A1602.
- [14] W. Opechowski, W. G. Tam. Physica. 1969. V. 42. P. 529; Е. Д. Белокопос. ТМФ. 1971. Т. 7. № 1. С. 61.
- [15] R. G. Littlejohn. Hamilton Theory of Guiding Center Motion. Berkeley: Lawrence Berkeley Lab, 1980.
- [16] Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев. Укр. Матем. Журн. 1955. Т. 7. № 1. С. 5; Ю. В. Новожилов, Ю. П. Яппа. Электродинамика. М.: Наука, 1978; H. van Alfvén, G. Fälthammer. Cosmical electrodynamics: Fundamental Principles. Oxford: Clarendon Press, 1963.
- [17] Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, М. А. Потерягин. Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 5. С. 660; V. Gelfreich, L. Lerman. Almost invariant elliptic manifolds in a singularly perturbed Hamiltonian system. mp-arc/01-134.
- [18] А. И. Нейштадт. Прикл. Мат. Мех. 1984. Т. 48. № 2. С. 197.
- [19] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [20] F. Faure. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 531.
- [21] В. П. Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [22] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов. ТМФ. 1992. Т. 92. № 2. С. 215.
- [23] С. Ю. Доброхотов, В. Мартинес-Оливе. Труды Моск. Матем. Общ. 1997. Т. 58. С. 4.
- [24] В. В. Белов, О. С. Доброхотов, С. Ю. Доброхотов. Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 4. С. 483.
- [25] D. Langbein. Phys. Rev. (2). 1969. V. 180. P. 633.
- [26] J. Zak. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 2565.
- [27] V. A. Geyler, I. Yu. Popov. Phys. Lett. A. 1995. V. 201. № 4. P. 359.
- [28] D. Hofstadter. Phys. Rev. B. 1976. V. 14. P. 2239.

Поступила в редакцию 14.I.2002 г.