Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Сергеев, Оператор Калоджеро и супералгебры Ли, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 3, 355–376

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:49:27

ОПЕРАТОР КАЛОДЖЕРО И СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ

Построен супераналог оператора Калоджеро $\mathcal{SL}$, зависящий от параметра k . Он связан с системой корней супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n|m)$. Для $m = 0$ это обычный оператор Калоджеро, а для $m = 1$, с точностью до замены переменных и параметра k , это оператор, построенный Веселовым, Чалых и Фейгиным. Для $k = 1, 1/2$ оператор $\mathcal{SL}$ является радиальной частью оператора Лапласа второго порядка для симметрических суперпространств, соответствующих парам $(\mathfrak{gl} \oplus \mathfrak{gl}, \mathfrak{gl}), (\mathfrak{gl}, \mathfrak{osp})$. Показано, что при любых m и n супераналоги полиномов Джека, построенные Керовым, Окуньковым и Ольшанским, являются собственными функциями оператора $\mathcal{SL}$. Для $k = 1, 1/2$ супераналоги полиномов Джека совпадают со сферическими функциями на суперпространствах. Изучается также алгебраический аналог интеграла Березина.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является подробным изложением статьи [1]. В настоящей работе определен и исследован супераналог оператора Калоджеро, связанный с системой корней супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n|m)$. Следует отметить, что построенный супераналог оператора Калоджеро зависит только от четных переменных. В работе [2] был определен супераналог оператора Калоджеро, содержащий одинаковое количество четных и нечетных переменных. В работах [3], [4] были определены и исследованы зависящие от четных и нечетных переменных супераналоги полиномов Джека, связанные с супераналогом оператора Калоджеро, построенного в [2]. В работе [5] доказано существование инвариантного интеграла для классических супералгебр Ли. В разделе 7 передоказан результат работы [5] без привлечения теории супералгебр Хопфа, а также доказана двусторонняя инвариантность построенного интеграла. По-видимому, с помощью результатов работы [6] можно построить супераналоги оператора Калоджеро для других простых супералгебр Ли.

* Балаковский университет техники, технологии и контроля, Балаково, Саратовская обл., Россия. E-mail: sergeev@bittu.org.ru

Гамильтониан квантовой задачи Калоджеро имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)^2 - \frac{1}{2} k(k-1) \sum_{i < j} \frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{\omega}{2} (t_i - t_j)}. \quad (1.1)$$

Этот оператор является частным случаем (соответствующим системе корней R алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$) оператора, построенного Ольшанецким и Переломовым [7]:

$$\mathcal{L} = \Delta - \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha (k_\alpha - 1) \frac{(\alpha, \alpha)}{(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2}. \quad (1.2)$$

Веселов, Фейгин и Чалых предложили [8], [9] следующее обобщение оператора (1.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t_{n+1}} \right)^2 - \frac{1}{2} k(k+1) \sum_{i < j} \frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{\omega}{2} (t_i - t_j)} - \\ & - \frac{1}{2} (k+1) \sum_{i=1}^n \frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{\omega}{2} (t_i - \sqrt{k} t_{n+1})}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Известно [10], что собственные функции оператора (1.1) могут быть выражены через полиномы Джека $P_\lambda(x_1, \dots, x_n; k)$, где λ – разбиение (определения и свойства полиномов Джека см. в [11], [12]). Известно также [11], что для $k = 1, 1/2, 2$ (мы используем параметр $k = 1/\alpha$, обратный параметру полиномов Джека α , который использует Макдональд [11]) полиномы Джека интерпретируются как сферические функции на симметрических пространствах, соответствующие парам $(\mathfrak{gl} \oplus \mathfrak{gl}, \mathfrak{gl})$, $(\mathfrak{gl}, \mathfrak{sp})$ и $(\mathfrak{gl}, \mathfrak{o})$. В этих случаях оператор Калоджеро является радиальной частью оператора Лапласа второго порядка.

Корни супералгебры $\mathfrak{gl}(n|m)$. Пусть $I = I_{\bar{0}} \amalg I_{\bar{1}}$ – объединение четных индексов $I_{\bar{0}} = \{1, \dots, n\}$ и нечетных индексов $I_{\bar{1}} = \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$. Пусть $\dim V = (n|m)$ и $e_1, \dots, e_n, e_{\bar{1}}, \dots, e_{\bar{m}}$ – базис V такой, что четность каждого вектора равна четности его индекса. Пусть $\{e_{ij} \mid i, j \in I\}$ – базис $\mathfrak{gl}(V)$, состоящий из матричных единиц. Пусть также $\mathfrak{h} = \operatorname{Span}(e_{ii} \mid i \in I)$ – подалгебра Картана, состоящая из диагональных матриц, и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\bar{1}}, \dots, \varepsilon_{\bar{m}}$ – левый дуальный базис к $\{e_{ii} \mid i \in I\}$ в $\mathfrak{h}^*$. Тогда множество корней описывается следующим образом: $R = R_{11} \amalg R_{22} \amalg R_{12} \amalg R_{21}$, где

$$\begin{aligned} R_{11} &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j \in I_{\bar{0}}\}, & R_{22} &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j \in I_{\bar{1}}\}, \\ R_{12} &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \in I_{\bar{0}}, j \in I_{\bar{1}}\}, & R_{21} &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \in I_{\bar{1}}, j \in I_{\bar{0}}\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

На $\mathfrak{h}^*$ определим зависящее от параметра k скалярное произведение, полагая

$$(v_1^*, v_2^*)_k = \sum_{i=1}^n v_1^*(e_{ii}) v_2^*(e_{ii}) - k \sum_{\bar{j}=1}^m v_1^*(e_{\bar{j}\bar{j}}) v_2^*(e_{\bar{j}\bar{j}}), \quad (1.5)$$

и положим $\rho_{(k)} = k\rho_1 + \rho_2/k - \rho_{12}$, где

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \alpha, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R_{22}^+} \beta, \quad \rho_{12} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in R_{12}} \gamma.$$

Для любого $l \in \mathfrak{h}^*$ определим e^l как линейный функционал на $S(\mathfrak{h})$, который продолжает l до гомоморфизма $S(\mathfrak{h})$ в поле комплексных чисел, и обозначим через $\mathfrak{H}$ подалгебру в алгебре частных $S(\mathfrak{h}^*)$, порожденную элементами e^l для $l \in \mathfrak{h}^*$ и $(1 - e^\alpha)^{-1}$ для $\alpha \in R$. На $\mathfrak{H}$ определим операторы $\partial_i, \partial_{\bar{j}}$, полагая

$$\partial_i(e^{v^*}) = v^*(e_{ii})e^{v^*}, \quad \partial_{\bar{j}}(e^{v^*}) = v^*(e_{\bar{j}\bar{j}})e^{v^*}.$$

Определим супераналог оператора Калоджеро

$$\begin{aligned} \mathcal{SL} = & \sum_{i=1}^n \partial_i^2 - k \sum_{\bar{j}=1}^m \partial_{\bar{j}}^2 - k(k-1) \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \frac{(\alpha, \alpha)_k}{(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2} + \\ & + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \sum_{\beta \in R_{22}^+} \frac{(\beta, \beta)_k}{(e^{\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}})^2} - 2 \sum_{\gamma \in R_{12}} \frac{(\gamma, \gamma)_k}{(e^{\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}})^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Легко проверить, что супераналог оператора Калоджеро может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{SL} = & \sum_{i=1}^n \partial_i^2 - k \sum_{\bar{j}=1}^m \partial_{\bar{j}}^2 - k(k-1) \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \frac{1}{(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2} + \\ & + \frac{2(1-k)}{k} \sum_{\beta \in R_{22}^+} \frac{1}{(e^{\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}})^2} - 2(1-k) \sum_{\gamma \in R_{12}} \frac{1}{(e^{\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}})^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Заметим, что замена переменных $k \rightarrow -s$, $\varepsilon_j \rightarrow \sqrt{s}\varepsilon_j$ для $j \in I_{\bar{1}}$ переводит $\mathcal{SL}$ в оператор

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{SL}} = & \sum_{i=1}^n \partial_i^2 + \sum_{\bar{j}=1}^m \partial_{\bar{j}}^2 - s(s+1) \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \frac{1}{(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2} - \\ & - \frac{2(s+1)}{s} \sum_{\beta \in R_{22}^+} \frac{1}{(e^{\frac{\sqrt{s}\beta}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{s}\beta}{2}})^2} - 2(s+1) \sum_{\gamma \in R_{12}} \frac{1}{(e^{\frac{\gamma_s}{2}} - e^{-\frac{\gamma_s}{2}})^2}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\gamma_s = \varepsilon_i - \sqrt{s}\varepsilon_j$, если $\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Отсюда следует, что если $\dim V_{\bar{1}} = 1$, то оператор (1.8) совпадает с оператором (1.3), введенным в работе [8]. Для того чтобы описать собственные функции $\mathcal{SL}$, удобно ввести оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & (\delta^{(k)})^{-1} (L - (\rho_{(k)}, \rho_{(k)})_k) \delta^{(k)}, \\ \delta^{(k)} = & \prod_{\alpha \in R_{11}^+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^k \prod_{\beta \in R_{22}^+} (e^{\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}})^{1/k} \prod_{\gamma \in R_{12}} (e^{\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}})^{-1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.1. Следующее выражение дает явную форму оператора $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 - k \sum_{\bar{j}=1}^m \partial_{\bar{j}}^2 + k \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} \partial_\alpha - \sum_{\beta \in R_{22}^+} \frac{e^\beta + 1}{e^\beta - 1} \partial_\beta - \sum_{\gamma \in R_{12}} \frac{e^\gamma + 1}{e^\gamma - 1} \partial_{\gamma, k}, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \partial_i - \partial_j & \text{для } \alpha &= \varepsilon_i - \varepsilon_j, \\ \partial_\beta &= \partial_{\bar{i}} - \partial_{\bar{j}} & \text{для } \beta &= \varepsilon_{\bar{i}} - \varepsilon_{\bar{j}}, \\ \partial_{\gamma, k} &= \partial_i + k \partial_{\bar{j}} & \text{для } \gamma &= \varepsilon_i - \varepsilon_{\bar{j}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В новых переменных $x_i = e^{\varepsilon_i}$ и $y_j = e^{\varepsilon_{\bar{j}}}$ оператор $\mathcal{M}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 - k \sum_{j=1}^m \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^2 + k \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \\ &- \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{y_i + y_j}{y_i - y_j} \left(y_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \\ &- \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \frac{x_i + y_j}{x_i - y_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + k y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Супераналоги полиномов Джека. Следуя Керову, Окунькову, Ольшанскому [13], определим супераналоги полиномов Джека. Рассмотрим алгебру многочленов $\mathcal{A}$ от бесконечного числа переменных $x_1, x_2, \dots$ и $y_1, y_2, \dots$. Пусть $p_r(x, y) = \sum x_i^r + \sum y_j^r$ — степенная сумма. Определим автоморфизм ω_k алгебры $\mathcal{A}$ по формуле

$$\omega_k(p_r(x, y)) = \sum x_i^r - \frac{1}{k} \sum y_j^r.$$

Пусть $P_\lambda(x, y, k)$ — обычный полином Джека. Тогда супераналог полинома Джека имеет вид

$$SP_\lambda(x, y, k) = \omega_k(P_\lambda(x, y, k)). \quad (1.12)$$

Если положить $x_{n+1} = \dots = y_{m+1} = \dots = 0$, то можно рассматривать супераналоги полиномов Джека от конечного числа переменных $SP_\lambda(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, k)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Полиномы $SP_\lambda(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, k)$ являются собственными функциями оператора (1.11).

Сферические функции. В настоящей работе мы используем алгебраический подход к теории сферических функций.

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, $U(\mathfrak{g})$ – ее универсальная обертывающая алгебра, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра. Пусть $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ – неприводимое представление, V^* – дуальное представление, $v \in V$ – ненулевой $\mathfrak{b}$ -инвариантный вектор и $v^* \in V^*$ – также $\mathfrak{b}$ -инвариантный вектор. Тогда матричный коэффициент $\theta^\pi(v^*, v) \in U(\mathfrak{g})^*$, где

$$\theta^\pi(v^*, v)(u) = (-1)^{p(u)p(v)} v^*(\pi(u)v) \quad \forall u \in U(\mathfrak{g}),$$

будем называть *сферической функцией, ассоциированной с тройкой* (π, v^*, v) .

Пусть L^* – левое корегулярное представление $\mathfrak{g}$; напомним, что оно задается формулой

$$L^*(u)l(v) = (-1)^{p(u)p(l)} l(tuv) \quad \forall u, v \in U(\mathfrak{g}),$$

где t – главный антиавтоморфизм $U(\mathfrak{g})$. Пусть $l \in U(\mathfrak{g})^*$ – двусторонне $\mathfrak{b}$ -инвариантный функционал, т.е.

$$l(xu) = l(uy) = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{b} \text{ и } u \in U(\mathfrak{g}).$$

Тогда $L^*(z)l$, где $z \in Z(\mathfrak{g})$, также является двусторонне $\mathfrak{b}$ -инвариантным функционалом.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(V)$ и $\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{gl}(V)$ – диагональная подалгебра, т.е. $\mathfrak{b} = \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{gl}(V)\}$. Пусть λ – разбиение и V^λ – неприводимый $\mathfrak{gl}(V)$ -подмодуль в тензорной алгебре тождественного представления $\mathfrak{gl}(V)$, соответствующий разбиению λ (см. [14]). Тогда $\mathfrak{g}$ -модуль $W^\lambda = V^\lambda \otimes (V^\lambda)^*$ неприводим и содержит единственный с точностью до постоянного множителя $\mathfrak{b}$ -инвариантный вектор v_λ . Дуальный модуль $(W^\lambda)^*$ содержит подобный вектор v_λ^* . Пусть $\varphi_\lambda = \theta^\pi(v_\lambda^*, v_\lambda)$ – соответствующая сферическая функция.

Пусть $\dim V = (n|m)$, $I_0 = \{1, \dots, n\}$, $I_1 = \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$, $\{e_{ij} \mid i, j \in I = I_0 \amalg I_1\}$ – базис $\mathfrak{gl}(V)$, состоящий из матричных единиц, $\mathfrak{h} = \text{Span}(e_{ii} \mid i \in I)$ – подалгебра Картана, состоящая из диагональных матриц, и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\bar{1}}, \dots, \varepsilon_{\bar{m}}$ – левый дуальный базис к $\{e_{ii} \mid i \in I\}$ в $\mathfrak{h}^*$. Пусть $\mathfrak{h}^+ = \{(x, -x) \mid x \in \mathfrak{h}\}$. Мы отождествляем $\mathfrak{h}$ с $\mathfrak{h}^+$, так же как и $\mathfrak{h}^*$ с $(\mathfrak{h}^+)^*$. Положим

$$C_2 = \sum_{i,j \in I} (-1)^{p(j)} e_{ij} e_{ji}.$$

Легко проверить, что C_2 – центральный элемент в обертывающей алгебре $\mathfrak{gl}(V)$ и в $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{gl}(V)$ рассматривается как первое слагаемое в $\mathfrak{g}$.

ТЕОРЕМА 1.2. А. *Каждый двусторонне инвариантный функционал $l \in U(\mathfrak{g})^*$ однозначно определяется своим ограничением на $S(\mathfrak{h}^+)$.*

Б. *Пусть $(S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\text{inv}}$ – множество ограничений двусторонне инвариантных функционалов из $U(\mathfrak{g})^*$ на $S(\mathfrak{h}^+)$. Тогда для любого $z \in Z(\mathfrak{g})$ существует однозначно определенный оператор Ω_z на $(S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\text{inv}}$. Он определяется по формуле*

$$(\Omega_z l')(u) = (L^*(z)l)(u)$$

для любого $l' \in (S(\mathfrak{h}^+)^)^{\text{inv}}$ и его расширения $l \in U(\mathfrak{g})^*$.*

В. Вышеопределенный оператор Ω_{C_2} , соответствующий C_2 , совпадает с оператором $\mathcal{M}$, определенным в формуле (1.9), для $k = 1$.

Г. Функции φ_λ , как функционалы на $S(\mathfrak{h}^+)$, совпадают с точностью до постоянного множителя с полиномами $SP_\lambda(x, y; 1)$, где $x_i = e^{\varepsilon_i}$ для $i \in I_{\bar{0}}$ и $y_j = e^{\varepsilon_j}$ для $j \in I_{\bar{1}}$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, $\dim V = (n|m)$ и $m = 2r$ – четное число. Пусть $\mathfrak{b} = \mathfrak{osp}(V)$ – ортогонально-симплектическая подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, которая сохраняет тензор

$$\sum_{i \in I_{\bar{0}}} e_i^* \otimes e_i^* + \sum_{j \in I_{\bar{1}}} (e_j^* \otimes e_{j+r}^* - e_{j+r}^* \otimes e_j^*). \quad (1.13)$$

Пусть ψ – инволютивный автоморфизм $\mathfrak{g}$ такой, что он выделяет $\mathfrak{osp}(V)$:

$$\mathfrak{osp}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \psi(x) = -x\}.$$

Пусть V^λ – $\mathfrak{g}$ -подмодуль в тензорной алгебре тождественного представления, отвечающий разбиению λ . Согласно [15] V^λ содержит единственный с точностью до постоянного множителя $\mathfrak{b}$ -инвариантный вектор $\tilde{v}_\lambda$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 2\mu$, т.е. все строки λ имеют четную длину. Вектор $\tilde{v}_\lambda^* \in (V^\lambda)^*$ определяется подобным образом. Пусть $\tilde{\varphi}_\lambda = \theta(v_\lambda^*, v_\lambda)$ – соответствующий матричный коэффициент. Положим $\mathfrak{h}^+ = \{x \in \mathfrak{h} \mid \psi(x) = x\}$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра Картана.

ТЕОРЕМА 1.3. А. Каждый двусторонне инвариантный функционал на $U(\mathfrak{g})$ однозначно определяется своим ограничением на $S(\mathfrak{h}^+)$.

Б. Пусть $(S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\text{inv}}$ – множество ограничений двусторонне инвариантных функционалов. Тогда для каждого $z \in Z(\mathfrak{g})$ существует единственный оператор Ω_z на $(S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\text{inv}}$. Он определяется по формуле

$$(\Omega_z l')(u) = (L^*(z)l)(u)$$

для любого $l' \in (S(\mathfrak{h}^+)^*)^{\text{inv}}$ и его расширения $l \in U(\mathfrak{g})^*$.

В. Оператор Ω_{C_2} , соответствующий C_2 , совпадает с оператором $\mathcal{M}$, определенным в формуле (1.9), для $m = r$ и $k = 1/2$.

Г. Функционалы $\tilde{\varphi}_\lambda$, как функции на $S(\mathfrak{h}^+)$, совпадают с точностью до постоянного множителя с полиномами $SP_\mu(x, y; 1/2)$, где $\lambda = 2\mu$, $x_i = e^{2\varepsilon_i}$ для $1 \leq i \leq n$ и $y_j = e^{2\varepsilon_j}$ для $1 \leq j \leq r$.

Инвариантный интеграл. Для каждого $\mathfrak{g}$ -модуля W определим в $U(\mathfrak{g})^*$ подпространство $C(W)$, являющееся линейной оболочкой матричных коэффициентов W . Обозначим через $A(\mathfrak{g})$ подалгебру в $U(\mathfrak{g})^*$, порожденную матричными коэффициентами конечномерных представлений W , которые являются полупростыми при ограничении на $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Пусть алгебра $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ редуکتивна, ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ полупросто, а представление на максимальной внешней степени $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ тривиально (равносильное требование: $\text{tr}(\text{ad } x) = 0$

в модуле $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, если $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$). На $A(\mathfrak{g})$ определим скалярное произведение $\langle l_1, l_2 \rangle = F(l_1^t l_2)$, где $l \mapsto l^t$ — главный автоморфизм $U(\mathfrak{g})^*$ (он соответствует главному антиавтоморфизму $U(\mathfrak{g})$). Утверждение А следующей теоремы — это основной результат работы [5]. Дополнительное утверждение, которое мы доказываем, — это двусторонняя инвариантность интеграла.

ТЕОРЕМА 1.4. *А. На $A(\mathfrak{g})$ существует и единственный с точностью до ненулевого постоянного множителя двусторонне инвариантный (относительно левого и правого корегулярных представлений) линейный функционал F и $F(\varepsilon) = 0$, где ε — коединица в $U(\mathfrak{g})$.*

Б. Если V_1 и V_2 — неизоморфные конечномерные простые $\mathfrak{g}$ -модули, тогда $\langle l_1, l_2 \rangle = 0$ для любых $l_1 \in C(V_1)$, $l_2 \in C(V_2)$.

В. Если $\dim V_{\bar{0}} \neq \dim V_{\bar{1}}$, тогда $\langle l_1, l_2 \rangle = 0$ для любых $l_1, l_2 \in C(V)$.

2. ДУАЛЬНОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО К ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ АЛГЕБРЕ

В этом разделе мы приводим некоторые факты, касающиеся супералгебр Ли, мы следуем при этом книге Диксмье [16]. Доказательства стандартны и поэтому опускаются. Пусть $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли, $U(\mathfrak{g})$ — ее обертывающая алгебра. Алгебра $U(\mathfrak{g})$ обладает каноническим антиавтоморфизмом $u \mapsto {}^t u$, заданным на элементах супералгебры $\mathfrak{g}$ по правилу ${}^t x = -x$. На элементы $U(\mathfrak{g})$ антиавтоморфизм можно распространить по правилу ${}^t(uv) = (-1)^{p(u)p(v)} {}^t v {}^t u$.

Мы наделяем $U(\mathfrak{g})^*$ структурой коалгебры:

$$\begin{aligned} c: U(\mathfrak{g}) &\rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}), \\ c(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad \forall x \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что ${}^t(c(x)) = c({}^t x)$, где первый индекс t — канонический антиавтоморфизм $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $\dim \mathfrak{g} = (n|m)$. Тогда алгебра $U(\mathfrak{g})^*$ изоморфна алгебре формальных степенных рядов от n четных и m нечетных переменных.*

Левое и правое корегулярные представления. Положим

$$\begin{aligned} (L^*(u)l)(v) &= (-1)^{p(u)p(l)} l({}^t uv), \\ (R^*(u)l)(v) &= (-1)^{p(u)(p(l)+p(v))} l(vu) \quad \forall u, v \in U(\mathfrak{g}), \quad l \in U(\mathfrak{g})^*. \end{aligned}$$

Следующие утверждения легко проверяются:

- 1) $u \mapsto L^*(u)$ — представление $U(\mathfrak{g})$ в $U(\mathfrak{g})^*$ (называемое *левым корегулярным* представлением);
- 2) $u \mapsto R^*(u)$ — представление $U(\mathfrak{g})$ в $U(\mathfrak{g})^*$ (называемое *правым корегулярным* представлением);

3) $L^*(x)$ и $R^*(x)$ являются супердифференцированиями супералгебры $U(g)^*$.

Заметим также, что супералгебра $U(g)^*$ обладает каноническим автоморфизмом $l \mapsto l^t$, где $l^t(u) = l({}^t u) \quad \forall u \in U(g), l \in U(g)^*$.

Матричные коэффициенты. Пусть V — g -модуль, $\pi: g \rightarrow gl(V)$ — соответствующее представление, V^* — дуальный модуль. Для любых $v \in V$ и $v^* \in V^*$ определим линейную форму $\theta^\pi(v^*, v)$ на $U(g)^*$, полагая

$$\theta^\pi(v^*, v)(u) = (-1)^{p(u)p(v)} v^*(\pi(u)v). \quad (2.1)$$

Обозначим через $C(\pi)$ или $C(V)$ подпространство в $U(g)^*$, порожденное $\theta^\pi(v^*, v)$ для всех $v \in V$ и $v^* \in V^*$.

ЛЕММА 2.2. А. $\theta^{\pi_1 \otimes \pi_2}(v_1^* \otimes v_2^*, v_1 \otimes v_2) = (-1)^{p(v_1)p(v_2^*)} \theta^{\pi_1}(v_1^*, v_1) \theta^{\pi_2}(v_2^*, v_2)$.

Б. $C(\pi_1 \otimes \pi_2) = C(\pi_1)C(\pi_2)$.

В. Если π — конечномерное представление, тогда

$$(\theta^\pi(v^*, v))^t = (-1)^{p(v)p(v^*)} \theta^{\pi^*}(v, v^*).$$

Будем рассматривать $U(g)^*$ как $g \oplus g$ -модуль относительно левого и правого корегулярных представлений. Тогда справедливы следующие леммы

ЛЕММА 2.3. *Отображение $V^* \otimes V \rightarrow U(g)^*$, заданное формулой $(v^*, v) \mapsto \theta^\pi(v^*, v)$, является гомоморфизмом $g \oplus g$ -модулей. Если g -модуль V неприводим, то вышеопределенное отображение имеет тривиальное ядро.*

Рассмотрим $(V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V)$ как $g \oplus g$ -модуль.

ЛЕММА 2.4. *Пусть V — неприводимый g -модуль. Тогда отображение*

$$\varphi: V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V \rightarrow U(g^*),$$

$$\varphi(v_1^* \otimes v_1 \otimes v_2^* \otimes v_2) = (-1)^{p(v_1^*)p(v_2^*) + p(v_1)p(v_2^*) + p(v_1^*)p(v_1)} (\theta^{\pi_1}(v_2^*, v_1))^t \theta^{\pi_2}(v_1^*, v_2)$$

является гомоморфизмом $g \oplus g$ -модулей.

ЛЕММА 2.5. *Пусть V — конечномерный g -модуль, π — соответствующее представление. Пусть $\{v_i\}_{i \in I}$ — базис V , $\{v_i^*\}_{i \in I}$ — дуальный базис V^* . Тогда*

$$\sum_i (\theta^\pi(v^*, v_i))^t \theta^\pi(v_i^*, v) = (v^*, v)\varepsilon$$

для любого $v \in V$ и $v^ \in V^*$, где ε — коединица $U(g)^*$.*

Пусть g — супералгебра Ли такая, что алгебра g_0 редуктивна, ее представление на g_1 полупросто, а представление на максимальной внешней степени g_1 тривиально. Пусть $A(g)$ — подалгебра в $U(g)^*$, порожденная матричными коэффициентами конечномерных представлений таких, что их ограничение на g_0 полупросто. Легко проверить, что подалгебра $A(g)$ инвариантна относительно левого и правого корегулярных представлений. В разделе 7 будет доказано существование на $A(g)$ нетривиального и инвариантного относительно левого и правого корегулярных представлений функционала F (интеграл Березина).

ЛЕММА 2.6. Пусть W – неприводимое подпредставление $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow T(V)$. Тогда:

- 1) $\langle \theta^\pi(w_1^*, w_1), \theta^\pi(w_2^*, w_2) \rangle = (-1)^{p(w_1^*)p(w_2^*) + p(w_1^*)p(w_1) + p(w_1)p(w_2^*)} d_W w_1^*(w_2) w_2^*(w_1)$ для любых $w_1, w_2 \in W$ и $w_1^*, w_2^* \in W^*$, где d_W зависит только от W ;
- 2) пусть $\dim W_{\bar{0}} \neq \dim W_{\bar{1}}$, тогда $\langle l_1, l_2 \rangle = 0$ для любых $l_1, l_2 \in C(W)$.

3. СУПЕРАНАЛОГ ОПЕРАТОРА КАЛОДЖЕРО

Мы будем придерживаться здесь обозначений раздела 1. Положим для $\alpha \in R$

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^+ &= e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}, & \Delta_\alpha^- &= e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}, \\ \Delta_1 &= \prod_{\alpha \in R_{11}^+} \Delta_\alpha^-, & \Delta_2 &= \prod_{\beta \in R_{22}^+} \Delta_\beta^-, & \Delta_{12} &= \prod_{\gamma \in R_{12}} \Delta_\gamma^-, \\ \delta^{(k)} &= \Delta_1^k \Delta_2^{\frac{1}{k}} \Delta_{12}^{-1}. \end{aligned}$$

Определим оператор

$$\mathcal{M}^* = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 - k \sum_{j=1}^m \partial_j^2 + k \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \frac{\Delta_\alpha^+}{\Delta_\alpha^-} \partial_\alpha - \sum_{\beta \in R_{22}^+} \frac{\Delta_\beta^+}{\Delta_\beta^-} \partial_\beta - \sum_{\gamma \in R_{12}} \frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-} \partial_{\gamma, k}, \quad (3.1)$$

где $\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_{\gamma, k}$ определены в (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Докажем равенство

$$\delta^{(k)} \mathcal{M}^* (\delta^{(k)})^{-1} = \mathcal{SL} - (\rho_k, \rho_k)_k,$$

эквивалентное утверждению леммы 1.1. Следующие равенства легко проверяются:

$$\partial_i(\Delta_\alpha^+) = \frac{1}{2} \alpha(e_i) \Delta_\alpha^-, \quad \partial_i(\Delta_\alpha^-) = \frac{1}{2} \alpha(e_i) \Delta_\alpha^+, \quad \alpha \in R, \quad (3.2)$$

$$\delta^{(k)} \partial_i (\delta^{(k)})^{-1} = \partial_i - \frac{k}{2} \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \alpha(e_i) \frac{\Delta_\alpha^+}{\Delta_\alpha^-} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in R_{12}} \gamma(e_i) \frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-}, \quad i \in I_{\bar{0}}, \quad (3.3)$$

$$\delta^{(k)} \partial_i (\delta^{(k)})^{-1} = \partial_i - \frac{1}{2k} \sum_{\beta \in R_{22}^+} \beta(e_i) \frac{\Delta_\beta^+}{\Delta_\beta^-} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in R_{12}} \gamma(e_i) \frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-}, \quad i \in I_{\bar{1}}. \quad (3.4)$$

Оператор $\mathcal{M}^*$ может быть выражен в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \sum_{i \in I_{\bar{0}}} \partial_i^2 - k \sum_{j \in I_{\bar{1}}} \partial_j^2 + k \sum_{\alpha \in R_{11}^+, i \in I_{\bar{0}}} \alpha(e_i) \frac{\Delta_\alpha^+}{\Delta_\alpha^-} \partial_i - \\ &- \sum_{\beta \in R_{22}^+, j \in I_{\bar{1}}} \beta(e_j) \frac{\Delta_\beta^+}{\Delta_\beta^-} \partial_j - \sum_{\gamma \in R_{12}, i \in I_{\bar{0}}} \gamma(e_i) \frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-} \partial_i + \\ &+ k \sum_{\gamma \in R_{12}, j \in I_{\bar{1}}} \gamma(e_j) \frac{\Delta_\gamma^+}{\Delta_\gamma^-} \partial_j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее положим $X_\alpha = \Delta_\alpha^+ / \Delta_\alpha^-$ для $\alpha \in R^+$ и пусть

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \alpha(e_i) X_\alpha, & f_i &= \sum_{\gamma \in R_{12}^+} \gamma(e_i) X_\gamma, & i &\in I_{\bar{0}}, \\ h_j &= \sum_{\beta \in R_{22}^+} \beta(e_j) X_\beta, & g_j &= \sum_{\gamma \in R_{12}^+} \gamma(e_j) X_\gamma, & j &\in I_{\bar{1}}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Следующие равенства легко проверяются:

$$\begin{aligned}\delta^{(k)} \partial_i^2 (\delta^{(k)})^{-1} &= \partial_i^2 + (f_i - k\varphi_i) \partial_i + \frac{1}{4} (f_i - k\varphi_i)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i f_i - k \partial_i \varphi_i), & i &\in I_{\bar{0}}, \\ \delta^{(k)} \partial_j^2 (\delta^{(k)})^{-1} &= \partial_j^2 + \left(g_j - \frac{1}{k} h_j\right) \partial_j + \frac{1}{4} \left(g_j - \frac{1}{k} h_j\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\partial_j g_j - \frac{1}{k} \partial_j h_j\right), & j &\in I_{\bar{1}}.\end{aligned}$$

Следовательно, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}\delta^{(k)} \mathcal{M}^* (\delta^{(k)})^{-1} &= \sum_{i \in I_{\bar{0}}} \partial_i^2 - 2k(k-1) \sum_{\alpha \in R_{11}} \frac{1}{(\Delta_\alpha^-)^2} - (k\rho_1, k\rho_1)_1 - \\ &- k \left(\sum_{j \in I_{\bar{1}}} \partial_j^2 - \frac{2}{k} \left(\frac{1}{k} - 1\right) \sum_{\beta \in R_{22}} \frac{1}{(\Delta_\beta^-)^2} - \left(\frac{1}{k} \rho_2, \frac{1}{k} \rho_2\right)_2 \right) + \\ &+ \left[-\frac{1}{4} \sum_{i \in I_{\bar{0}}} f_i^2 + \frac{k}{2} \sum_{i \in I_{\bar{0}}} f_i \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_{i \in I_{\bar{0}}} \partial_i f_i + \right. \\ &\left. + \frac{k}{4} \sum_{j \in I_{\bar{1}}} g_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \in I_{\bar{1}}} g_j h_j - \frac{k}{2} \sum_{j \in I_{\bar{1}}} \partial_j g_j \right].\end{aligned}$$

Легко проверить, что $\partial_i(X_\gamma) = \gamma(e_i)(1 - X_\gamma^2)/2$. Остается преобразовать слагаемое в квадратных скобках (мы предполагаем, что $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in R_{12}$, $\alpha \in R_{11}^+$, $\beta \in R_{22}^+$, $i \in I_{\bar{0}}$, $j \in I_{\bar{1}}$, а также $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ означает неупорядоченную пару различных элементов из R_{12}).

Легко проверить, что справедливо равенство

$$\sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_2 X_{\gamma_1} X_{\gamma_2} + \sum_{\gamma, \alpha} (\gamma, \alpha)_1 X_\gamma X_\alpha = \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_2 + \sum_{\gamma, \alpha} (\gamma, \alpha)_1.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_1 X_{\gamma_1} X_{\gamma_2} + \sum_{\gamma, \beta} (\gamma, \beta)_2 X_\gamma X_\beta = \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_1 + \sum_{\gamma, \beta} (\gamma, \beta)_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\delta^{(k)} \mathcal{M}^* (\delta^{(k)})^{-1} &= \sum_{i \in I_{\bar{0}}} \partial_i^2 - 2k(k-1) \sum_{\alpha \in R_{11}} \frac{1}{(\Delta_{\bar{\alpha}}^-)^2} - (k\rho_1, k\rho_1)_1 - \\
&\quad - k \left(\sum_{j \in I_{\bar{1}}} \partial_j^2 - \frac{2}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \sum_{\beta \in R_{22}} \frac{1}{(\Delta_{\bar{\beta}}^-)^2} - \left(\frac{1}{k} \rho_2, \frac{1}{k} \rho_2 \right)_2 \right) - \\
&\quad - 2 \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} \frac{(\gamma_1, \gamma_2)_k}{(\Delta_{\bar{\gamma}}^-)^2} + \frac{k}{2} \left(\sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_2 + \sum_{\gamma, \alpha} (\gamma, \alpha)_1 \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} (\gamma_1, \gamma_2)_1 + \sum_{\gamma, \alpha} (\gamma, \beta)_2 \right) - \frac{1}{4} \sum_{\gamma} (\gamma, \gamma)_k = \\
&= \sum_{i \in I_{\bar{0}}} \partial_i^2 - 2k(k-1) \sum_{\alpha \in R_{11}} \frac{1}{(\Delta_{\bar{\alpha}}^-)^2} - (k\rho_1, k\rho_1)_1 - \\
&\quad - k \left(\sum_{j \in I_{\bar{1}}} \partial_j^2 - \frac{2}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \sum_{\beta \in R_{22}} \frac{1}{(\Delta_{\bar{\beta}}^-)^2} - \left(\frac{1}{k} \rho_2, \frac{1}{k} \rho_2 \right)_2 \right) - \\
&\quad - 2 \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2\}} \frac{(\gamma_1, \gamma_2)_k}{(\Delta_{\bar{\gamma}}^-)^2} - (\rho_{12}, \rho_{12})_k + (\rho_{12}, k\rho_1)_k - \left(\rho_{12}, \frac{1}{k} \rho_2 \right)_k.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

4. СУПЕРАНАЛОГИ ПОЛИНОМОВ ДЖЕКА

Обычные полиномы Джека. Пусть $t_1, t_2, \dots$ — последовательность независимых переменных, Λ — алгебра симметрических функций, λ — разбиение, а $t^\lambda \equiv t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \dots$. Мономиальные симметрические функции m_λ являются суммой всех различных мономов, которые получаются из t^λ перестановкой t_i . Можно определить степенные суммы $p_r = \sum_i t_i^r$ и $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$. Полиномы Джека P_λ индексируются разбиениями и рационально зависят от параметра k (мы используем параметр $k = 1/\alpha$, обратный параметру Макдональда). Они характеризуются следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
P_\lambda &= m_\lambda + \text{члены меньшего лексикографического порядка,} \\
(P_\lambda, P_\mu) &= 0, \quad \text{если } \lambda \neq \mu,
\end{aligned}$$

где скалярное произведение определяется по формуле

$$(p_\lambda, p_\mu) = \delta_{\lambda, \mu} k^{-l(\lambda)} z_\lambda, \quad z_\lambda = \prod i^{\mu_i} (\mu_i!).$$

Полагая $t_{N+1} = t_{N+2} = \dots = 0$ в P_λ , мы можем рассматривать полиномы Джека от конечного числа переменных; они допускают другое описание. Пусть $t_1, \dots, t_N$ — переменные и u — дополнительная переменная. Рассмотрим семейство дифференциальных

операторов $D(u, k)$, называемых *операторами Секигучи* и определяемых по формуле

$$D(u, k) = \sum_{p=1}^N u^p D_p^{(k)} = V(t)^{-1} \det [t_i^{N-j} (t_i \partial t_i + (N-j)k + u)]_{1 \leq i \leq j \leq N}, \quad (4.1)$$

где $V(t) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (t_i - t_j)$. Тогда полиномы Джека $P_\lambda(t_1, \dots, t_N)$, где λ – разбиение такое, что $\lambda_{N+1} = 0$, однозначно определяются следующими свойствами:

- 1) $P_\lambda(t_1, \dots, t_N)$ симметричен относительно $t_1, \dots, t_N$;
- 2) $P_\lambda(t_1, \dots, t_N) = t_1^{\lambda_1} \dots t_N^{\lambda_N} +$ мономы меньшего лексикографического порядка;
- 3) $P_\lambda(t_1, \dots, t_N)$ – собственная функция операторов $D_p^{(k)}$. Более точно

$$D(u, k) P_\lambda(t_1, \dots, t_N) = \left(\prod_{i=1}^N (\lambda_i + (N-i)k + u) \right) P_\lambda(t_1, \dots, t_N).$$

Положим

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^m (1 - y_j t) \prod_{i=1}^n (1 - x_i t)^{-k}$$

и $\varphi(t_1, \dots, t_N) = \varphi(t_1) \dots \varphi(t_N) = \varphi_N$.

Положим далее

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 - k \sum_{j=1}^m \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^2 + k \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{y_i + y_j}{y_i - y_j} \left(y_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \\ & - \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \frac{x_i + y_j}{x_i - y_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + k y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{L}_N = \sum_{i=1}^N \left(t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^2 + k \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{t_i + t_j}{t_i - t_j} \left(t_i \frac{\partial}{\partial t_i} - t_j \frac{\partial}{\partial t_j} \right). \quad (4.3)$$

Следующая лемма подобна лемме 3.1 из работы [17].

ЛЕММА 4.1. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{H} \varphi_N - \mathcal{L}_N \varphi_N = (k(n - N) - m) \left(\sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \varphi_N. \quad (4.4)$$

Доказательство несложно провести индукцией по N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Легко проверить, что

$$\omega_k \left(\frac{1}{\prod_{i,l} (1 - x_i t_l)^k \prod_{j,l} (1 - y_j t_l)^k} \right) = \frac{\prod_{j,l} (1 - y_j t_l)}{\prod_{i,l} (1 - x_i t_l)^k}.$$

Тогда согласно тождеству Коши (см. [12])

$$\frac{1}{\prod_{i,l} (1 - x_i t_l)^k \prod_{j,l} (1 - y_j t_l)^k} = \sum_{\lambda} \frac{1}{J_{\lambda}} P_{\lambda}(x, y, k) P_{\lambda}(t, k).$$

Применяя автоморфизм ω_k , получим

$$\omega_k \left(\frac{1}{\prod_{i,l} (1 - x_i t_l)^k \prod_{j,l} (1 - y_j t_l)^k} \right) = \sum_{\lambda} \frac{1}{J_{\lambda}} \omega_k(P_{\lambda}(x, y, k)) P_{\lambda}(t, k).$$

Следовательно,

$$\frac{\prod_{j,l} (1 - y_j t_l)}{\prod_{i,l} (1 - x_i t_l)^k} = \sum_{\lambda} \frac{1}{J_{\lambda}} S P_{\lambda}(x, y, k) P_{\lambda}(t, k)$$

и

$$\varphi_N = \sum_{\lambda_{N+1}=0} \frac{1}{j_{\lambda}} S P_{\lambda}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, k) P_{\lambda}(t_1, \dots, t_N, k).$$

Теперь согласно лемме 4.1 выполняется равенство (4.4). Введем оператор

$$\mathcal{L}_N^* = \mathcal{L}_N + (k(n - N) - m) + \left(\sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_{N+1}=0} \frac{1}{j_{\lambda}} \mathcal{H}(S P_{\lambda}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, k)) P_{\lambda}(t_1, \dots, t_N, k) = \\ = \sum_{\lambda_{N+1}=0} \frac{1}{j_{\lambda}} S P_{\lambda}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, k) \mathcal{L}^*(P_{\lambda}(t_1, \dots, t_N, k)). \end{aligned}$$

Известно, что $P_{\lambda}(t_1, \dots, t_N, k)$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{L}^*$. Следовательно, $S P_{\lambda}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, k)$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{H}$. Теорема доказана.

5. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И РАДИАЛЬНЫЕ ЧАСТИ ОПЕРАТОРОВ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПАРЫ $(\mathfrak{gl} \oplus \mathfrak{gl}, \mathfrak{gl})$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ – супералгебра Ли линейных преобразований $(n|m)$ -мерного суперпространства V , $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана, R – система корней, $U(\mathfrak{g})$ – обертывающая алгебра и $U(\mathfrak{g})^*$ – дуальное пространство, наделенное структурой супералгебры. Для любого ad -инвариантного функционала на пространстве $U(\mathfrak{g})$ (т.е. для любого l такого, что $l(u, v) = (-1)^{p(u)p(v)}l(v, u)$) обозначим через φ_l производящую функцию его ограничения на $S(\mathfrak{h})$, именно

$$\varphi_l(t_1, \dots, t_n) = \sum \frac{l(e_{11}^{\nu_1} \dots e_{nn}^{\nu_n})}{(\nu_1)! \dots (\nu_n)!} t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n}. \quad (5.1)$$

На $S(\mathfrak{h})^*$ определим следующие операторы для любого $f \in S(\mathfrak{h})$:

$$(\partial_i l)(f) = l(e_{ii} f), \quad (D_{ij} l)(f) = l(e_{ij} e_{ji} f). \quad (5.2)$$

ЛЕММА 5.1. Пусть $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Тогда

$$D_{ij} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1} (\partial_i - (-1)^{p(i)+p(j)} \partial_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} (D_{ij} l)(f) &= l(f e_{ij} e_{ji}) = l(e_{ij} f (h + \alpha(h)) e_{ji}) = (-1)^{p(i)+p(j)} l(f (h + \alpha(h)) e_{ji} e_{ij}) = \\ &= l(f (h + \alpha(h)) e_{ij} e_{ji}) - l(f (h + \alpha(h)) [e_{ij}, e_{ji}]) = \\ &= (e^\alpha D_{ij} l)(f) - l(f (h + \alpha(h)) (e_{ii} - (-1)^{p(i)+p(j)} e_{jj})) = \\ &= (e^\alpha D_{ij} - e^\alpha (\partial_i - (-1)^{p(i)+p(j)} \partial_j))(l)(f). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – супералгебра Ли, $\mathfrak{b} = \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$ – ее диагональная подалгебра, I – левый идеал в $U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$, порожденный $\mathfrak{b}$ и $M = U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})/I$. Пусть $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ – вложение в первое слагаемое, т.е. $\sigma(x) = (x, 0)$. Пусть $\tilde{\sigma}: U(\mathfrak{g}) \rightarrow M$ – отображение, индуцированное гомоморфизмом $U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$, которое продолжает σ , и $\rho(x) = (x, x)$ – изоморфизм $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{b}$. Тогда $\tilde{\sigma}([x, u]) = \rho(x) \tilde{\sigma}(u)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Алгебра функционалов на $U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$, двусторонне инвариантных относительно $\mathfrak{b}$, изоморфна алгебре функционалов на $U(\mathfrak{g})$, инвариантных относительно присоединенного действия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к прямой проверке.

ЛЕММА 5.3. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, тогда

$$U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) + [U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент из $U(\mathfrak{g})$ может быть представлен как сумма элементов вида $fX_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_r}$, где $f \in S(\mathfrak{h})$, $\alpha_i \in R$ (R – система корней $\mathfrak{g}$), X_{α_i} – элемент веса α_i . Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что для $r > 0$ $fX_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_r} \in [U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})]$. Проведем индукцию по r .

Если $r = 1$, тогда $[X_\alpha, f] = (f(h - \alpha(h)) - f(h))X_\alpha = R_\alpha(f)X_\alpha$. Однако, как легко видеть, любой элемент из $S(\mathfrak{h})$ может быть представлен как $R_\alpha(f)$. Если $r > 1$, тогда

$$\begin{aligned} [X_{\alpha_1}, fX_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_r}] &= [X_{\alpha_1}, f]X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_r} + f[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}]X_{\alpha_3} \dots X_{\alpha_r} + \\ &+ (-1)^{p(X_{\alpha_1})p(X_{\alpha_2})} fX_{\alpha_2}[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_3}]X_{\alpha_4} \dots X_{\alpha_r} + \\ &+ (-1)^{p(X_{\alpha_1})(p(X_{\alpha_2})+p(X_{\alpha_3}))} fX_{\alpha_2}X_{\alpha_3}[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_4}]X_{\alpha_5} \dots X_{\alpha_r} + \dots \end{aligned}$$

Но $[X_\alpha, f]X_\alpha = R_\alpha(f)X_\alpha$, и по предположению индукции $fX_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_r} \in [U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Лемма 5.3 сразу влечет утверждение А. Утверждение Б очевидно. Докажем утверждение В. Пусть l – инвариантный функционал на $U(\mathfrak{g})$, φ_l – производящая функция его ограничения на $S(\mathfrak{h})$. Тогда с учетом леммы 5.2 получим

$$\begin{aligned} \Omega(\varphi_l) &= \left(\sum_{i,j \in I} (-1)^{p(j)} e_{ij} e_{ji} \right) \varphi_l = \left(\sum_{i \in I_0} \partial_i^2 - \sum_{j \in I_1} \partial_j^2 \right) \varphi_l + \\ &+ \sum_{\alpha \in R^+} \left((-1)^{p(j)} \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1} (\partial_i - (-1)^{p(i)+p(j)} \partial_j) + \right. \\ &\left. + (-1)^{p(i)} \frac{e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} - 1} (\partial_j - (-1)^{p(i)+p(j)} \partial_i) \right) \varphi_l = \\ &= \left(\sum_{i \in I_0} \partial_i^2 - \sum_{j \in I_1} \partial_j^2 - \sum_{\alpha \in R^+} \frac{1 + e^\alpha}{1 - e^\alpha} ((-1)^{p(j)} \partial_i - (-1)^{p(i)} \partial_j) \right) \varphi_l. \end{aligned}$$

Докажем утверждение Г. Как легко проверить, $\theta = \sum_{i \in I} e_i \otimes e_i^* - \mathfrak{b}$ -инвариант, при условии, что $\{e_i\}_{i \in I}$ – базис в V и $\{e_i^*\}_{i \in I}$ – его левый дуальный базис. Аналогично $\theta^* = \sum_{i \in I} e_i^* \otimes e_i$ – также $\mathfrak{b}$ -инвариант.

С точностью до постоянного множителя

$$\varphi_\lambda(u) = \theta^\pi((\theta^*)^{\otimes p}, \theta^{\otimes p})(u) = (\theta^*)^{\otimes p}((e_\lambda \times e_\lambda)u\theta^{\otimes p}) \quad \forall u \in U(\mathfrak{g}),$$

где e_λ – идемпотент в симметрической группе, соответствующий разбиению λ , и $\varphi_\lambda(u)$ пропорционально $(\theta^*)^{\otimes p}(e_\lambda \times 1u\theta^{\otimes p})$.

Разлагая

$$e_\lambda = \frac{1}{p!} \sum \chi^\lambda(\sigma) \sigma,$$

где χ^λ – характер соответствующего представления S_p , мы видим, что благодаря тождеству

$$\theta^{\pi_1 \otimes \pi_2}(v_1^* \otimes v_2^*, v_1 \otimes v_2) = (-1)^{p(v_1)p(v_2^*)} \theta^{\pi_1}(v_1^*, v_1) \theta^{\pi_2}(v_2^*, v_2) \quad (5.3)$$

достаточно рассмотреть случай, когда σ – цикл $(1, 2, \dots, p)$. Пусть $\{e_{ii}\}_{i \in I}$ – базис $\mathfrak{h}$ и $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ – левый дуальный базис; пусть e^l обозначает гомоморфизм $S(\mathfrak{h})$ в поле комплексных чисел, продолжающий линейную форму l . Достаточно учитывать только слагаемые, у которых $i_1 = i_2 = \dots = i_p$, в соотношении

$$\theta^{\otimes p} = \sum_{i_1, \dots, i_p \in I} e_{i_1} \otimes e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e_{i_p}^*.$$

Следовательно, если $\sigma = (1, 2, \dots, p)$, тогда

$$\begin{aligned} (\theta^*)^{\otimes p}(u\sigma\theta^{\otimes p}) &= (\theta^*)^{\otimes p} \left(\sum_{i \in I} (e_i \otimes e_i^*)^{\otimes p} \right) = \sum_{i \in I} (\theta^*)^{\otimes p}(u\sigma\theta^{\otimes p}) = \\ &= \sum_{i \in I} (\theta^*)^{\otimes p}((-1)^{(p-1)i} u(e_i \otimes e_i^*)^{\otimes p}) = \\ &= \sum_{i \in I} (-1)^{(p-1)i} e^{p\varepsilon_i}(u) (\theta^*)^{\otimes p}(e_i \otimes e_i^*) = \\ &= \sum_{i \in I} (-1)^i e^{p\varepsilon_i}(u) = \sum_{i \in I_0} x_i^p - \sum_{j \in I_1} y_j^p. \end{aligned}$$

Это означает, что с точностью до постоянного множителя $\varphi_\lambda = \sum (\chi_\mu^\lambda / Z_\mu) sp_\mu$, где χ_μ^λ – значение характера симметрической группы на элементе циклового типа μ , $Z_\mu = \prod i^{\mu_i} (\mu_i)!$ и

$$sp_\mu = \left(\sum_{i \in I_0} x_i^{\mu_1} - \sum_{j \in I_1} y_j^{\mu_1} \right) \left(\sum_{i \in I_0} x_i^{\mu_2} - \sum_{j \in I_1} y_j^{\mu_2} \right) \dots$$

Поэтому φ_λ с точностью до постоянного множителя совпадает с $SP_\lambda(x, y, 1)$. Теорема доказана.

6. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И РАДИАЛЬНЫЕ ЧАСТИ ОПЕРАТОРОВ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПАРЫ $(\mathfrak{gl}, \mathfrak{osp})$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, где $\dim V = (n|2r)$. Пусть также $I_0 = \{1, \dots, n\}$ и $I_1 = \{\bar{1}, \dots, \bar{2r}\}$, а $\{e_{ij}\}_{i,j \in I}$ – базис, состоящий из матричных единиц в $\mathfrak{gl}(V)$. Легко проверить, что антиавтоморфизм супертранспонирования в $\mathfrak{gl}(V)$ имеет вид

$${}^t e_{ij} = (-1)^{p(i)(p(j)+1)} e_{ji}. \quad (6.1)$$

Далее положим $\varepsilon(i) = 1$, если $i \in I_{\bar{0}} \cup \{\overline{r+1}, \dots, \overline{2r}\}$, и $\varepsilon(i) = -1$, если $i \in \{\bar{1}, \dots, \bar{r}\}$. Положим $\delta(i) = i + \bar{r} \pmod{\overline{2r}}$, если $i \in I_{\bar{1}}$, и $\delta(i) = i$, если $i \in I_{\bar{0}}$. Теперь определим оператор S :

$$Se_i = \varepsilon(i)e_{\delta(i)}. \quad (6.2)$$

Ясно, что $S^2 = J$, где J – оператор четности в V , т.е. $Je_i = (-1)^{p(i)}e_i$ и, следовательно, $SJ = JS$, более того, ${}^tS = SJ = JS = S^3 = S^{-1}$. Для любого $x \in \mathfrak{gl}(V)$ положим $\psi(x) = S^t x S^{-1}$. Несложно проверить, что ψ – инволютивный антиавтоморфизм ассоциативной супералгебры $\text{Mat}(V)$, т.е. $\psi^2 = 1$ и $\psi(xy) = (-1)^{p(x)p(y)}\psi(y)\psi(x)$, причем $\psi(e_{ij}) = (-1)^{p(i)p(j)}\varepsilon(j)\varepsilon(\delta(i))e_{\delta(j)\delta(i)}$. Легко видеть, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- \oplus \mathfrak{g}^+$, где $\mathfrak{g}^- = \{x \in \mathfrak{g} \mid \psi(x) = -x\}$ и $\mathfrak{g}^+ = \{x \in \mathfrak{g} \mid \psi(x) = x\}$. Заметим, что $\mathfrak{g}^-$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, изоморфная $\mathfrak{osp}(V)$, и $\mathfrak{g}^+$ – $\mathfrak{g}^-$ -модуль. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ положим

$$x^+ = \frac{1}{2}(x + \psi(x)), \quad x^- = \frac{1}{2}(x - \psi(x)),$$

что соответствует разложению $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- \oplus \mathfrak{g}^+$.

Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}^+ = \text{Span}(e_{ii}^+ \mid i \in I)$.

ЛЕММА 6.1. Для $f \in S(\mathfrak{h}^+)$ и $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ положим

$$R_{ij}^- f = \frac{1}{2}[f(h - \alpha(h)) - f(h + \alpha(h))], \quad R_{ij}^+ f = \frac{1}{2}[f(h - \alpha(h)) + f(h + \alpha(h))].$$

Тогда справедливы следующие равенства:

- 1) $e_{ij}^- f = R_{ij}^+ f e_{ij}^- + R_{ij}^- f e_{ij}^+$;
- 2) $R_{ij}^- f e_{ij} e_{ji} - (R_{ij}^- - R_{ij}^+) f \cdot [e_{ij}^-, e_{ji}^+] \in \mathfrak{g}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{g}^-$;
- 3) $[e_{ij}^-, e_{ij}^+] = (e_{ii}^+ - (-1)^{p(i)+p(j)} e_{jj}^+)/2$;
- 4) если $h \in \mathfrak{h}$ и $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, тогда

$$[h, e_{ij}^+] = \alpha(h)e_{ij}^-, \quad [h, e_{ij}^-] = \alpha(h)e_{ij}^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к прямой проверке.

ЛЕММА 6.2. Пусть $I = \mathfrak{g}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{g}^-$. Тогда $U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}^+) + I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для $q > 0$ $u = f e_{\alpha_1}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ \in I$, где $f \in S(\mathfrak{h}^+)$ и $e_{\alpha_1}^+, \dots, e_{\alpha_q}^+ \in \mathfrak{g}^+$ являются весовыми векторами. Проведем индукцию по q . Если $q = 1$ и $f \in S(\mathfrak{h}^+)$, то согласно лемме 6.1, п. 1 имеем $R_{ij}^- f e_{ij}^+ = e_{ij}^- f - R_{ij}^+ f e_{ij}^-$. Следовательно, $R_{ij}^- f e_{ij}^+ \in I$, поэтому $f e_{ij}^+ \in I$. Пусть $q > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1}^- f e_{\alpha_1}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ &= e_{\alpha_1}^- f e_{\alpha_2}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ - R_{\alpha_1}^+ f e_{\alpha_1}^- e_{\alpha_2}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ \equiv \\ &\equiv -R_{\alpha_1}^+ f e_{\alpha_1}^- e_{\alpha_2}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ \pmod{I} \equiv R_{\alpha_1}^+ f \cdot [e_{\alpha_1}^-, e_{\alpha_2}^+ \dots e_{\alpha_q}^+] = \\ &= -R_{\alpha_1}^+ f \cdot [e_{\alpha_1}^-, e_{\alpha_2}^+] e_{\alpha_3}^+ \dots e_{\alpha_q}^+ - R_{\alpha_1}^+ f e_{\alpha_2}^+ [e_{\alpha_1}^-, e_{\alpha_3}^+] \dots e_{\alpha_q}^+ + \dots \in I. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. Пусть $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $j \neq \delta(i)$, l – двусторонне $\mathfrak{b}$ -инвариантный функционал на $U(\mathfrak{g})$ и φ_l – производящая функция его ограничения на $S(\mathfrak{h}^+)$. Пусть $D_{ij}(l)(f) = l(fe_{ij}e_{ji})$, $\partial_i^+(l)(f) = l(fe_{ii}^+)$, где $f \in S(\mathfrak{h}^+)$. Тогда

$$D_{ij} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - e^{-\alpha}} (\partial_i^+ - (-1)^{p(i)+p(j)} \partial_j^+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является следствием утверждения 2 леммы 6.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Утверждение А следует из леммы 6.2. Докажем утверждение Б. Пусть $\sum_{i,j \in I} (-1)^{p(j)} e_{ij} e_{ji}$ – оператор Лапласа для $\mathfrak{gl}(V)$. Согласно лемме 6.3 радиальная часть его ограничения на $S(\mathfrak{h}^+)$ имеет вид (мы исключаем корни $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_{\delta(i)}$, так как $e_{i\delta(i)}^+ = 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \sum_{i=1}^n \partial_i^2 - \sum_{\bar{j}=1}^{2r} \partial_{\bar{j}}^2 + \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \partial_\alpha^+ - \\ & - \sum_{\beta \in R_{22}^+} \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^\beta - e^{-\beta}} \partial_\beta^+ - \sum_{\gamma \in R_{12}} \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{e^\gamma - e^{-\gamma}} \partial_{\gamma,1}^+, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $\partial_\alpha = \partial_i^+ - \partial_j^+$, $\partial_\beta = \partial_i^+ - \partial_j^+$, $\partial_{\gamma,1} = \partial_i^+ - \partial_j^+$.

Заметим теперь, что $\varepsilon_i|_{\mathfrak{h}^+} = \varepsilon_{\delta(i)}|_{\mathfrak{h}^+}$. Поэтому выражение (6.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \sum_{i=1}^n \partial_i^2 - \sum_{\bar{j}=1}^r \partial_{\bar{j}}^2 + \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \frac{e^{2\alpha} + 1}{e^{2\alpha} - 1} \partial_\alpha^+ - \\ & - 4 \sum_{\beta \in \frac{1}{4}R_{22}^+} \frac{e^{2\beta} + 1}{e^{2\beta} - 1} \partial_\beta^+ - 2 \sum_{\gamma \in \frac{1}{2}R_{12}} \frac{e^{2\gamma} + 1}{e^{2\gamma} - 1} \partial_{\gamma,1}^+, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\frac{1}{4}R_{22} = \left\{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j \in \frac{1}{2}I_1 \right\}, \quad \frac{1}{2}R_{12} = \left\{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \in I_0, j \in \frac{1}{2}I_1 \right\}, \quad \frac{1}{2}I_1 = \{\bar{1}, \dots, \bar{r}\}.$$

Положим $T(e^l) = e^{l+l_0}$, где l_0 – четная часть l . Тогда, как легко проверить,

$$T^{-1} \partial_i^+ T = \begin{cases} \partial_i^+, & \text{если } p(i) = \bar{1}, \\ 2\partial_i^+, & \text{если } p(i) = \bar{0}, \end{cases} \quad T^{-1} e^l T = e^{l_1 + \frac{1}{2}l_0}.$$

Следовательно, эти преобразования приводят формулу (6.4) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & 4 \sum_{i=1}^n \partial_i^2 - 2 \sum_{\bar{j}=1}^r \partial_{\bar{j}}^2 + \sum_{\alpha \in R_{11}^+} \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} 2\partial_\alpha^+ - \\ & - 4 \sum_{\beta \in \frac{1}{4}R_{22}^+} \frac{e^\beta + 1}{e^\beta - 1} \partial_\beta^+ - 4 \sum_{\gamma \in \frac{1}{2}R_{12}} \frac{e^{2\gamma} + 1}{e^{2\gamma} - 1} \partial_{\gamma, \frac{1}{2}}^+. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Последнее выражение равно $4\mathcal{M}_2$.

Теперь докажем утверждение В. Вначале опишем инвариантный вектор $v_\lambda \in V_\lambda$, где все строки диаграммы λ имеют четную длину. Легко проверить, что

$$\theta = \sum_{i \in I} \varepsilon(i) e_i \otimes e_{\delta(i)} \quad \text{и} \quad \theta^* = \sum_{i \in I} \varepsilon(i) e_i^* \otimes e_{\delta(i)}^*$$

являются $\mathfrak{b}$ -инвариантами. Следовательно, $\theta^{\otimes p}$ — также $\mathfrak{b}$ -инвариант. С точностью до постоянного множителя

$$\varphi_\lambda(u) = \theta^\pi((\theta^*)^{\otimes p}, \theta^{\otimes p})(u) = (\theta^*)^{\otimes p}(e_\lambda u \theta^{\otimes p}) \quad \forall u \in U(\mathfrak{g}),$$

где e_λ — примитивный идемпотент в алгебре Гекке (S_{2p}, H_p) . Явная форма e_λ известна [11]:

$$e_\lambda = \sum \frac{\omega_\mu^\lambda}{Z_{2\mu}} \sigma,$$

где σ пробегает множество представителей двойных классов смежности.

Если $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$, мы можем предполагать, что σ имеет цикловую структуру $(2\mu_1, \dots, 2\mu_q)$. Теперь вычислим функционал $\varphi_{\lambda, \mu}(u) = (\theta^*)^{\otimes p}(\sigma u \theta^{\otimes p})$, где $u \in S(\mathfrak{h})$. Согласно тождеству (5.3) достаточно предполагать, что σ — цикл четной длины $2p$. Имеем

$$\theta^{\otimes p} = \sum \varepsilon(\psi) e_\psi, \quad (\theta^*)^{\otimes p} = \sum \varepsilon(\psi) e_\psi^*,$$

где сумма берется по всем отображениям

$$\psi: [1, \dots, 2p] \longrightarrow [1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \bar{2}r] \quad \text{и} \quad \delta(\psi(2i)) = \psi(2i-1) \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, l$$

и

$$e_\psi = e_{\psi(1)} \otimes \dots \otimes e_{\psi(2p)}, \quad \varepsilon(\psi) = \varepsilon(\psi(1)) \varepsilon(\psi(3)) \dots \varepsilon(\psi(2l-1)).$$

Если σ — цикл, то

$$(\theta^*)^{\otimes p}(u \sigma \theta^{\otimes p}) = \left(\sum_{i \in I_0} (e^{2\varepsilon_i})^p - 2 \sum_{j \in \frac{1}{2}I_1} (e^{2\varepsilon_j})^p \right) (u).$$

Поэтому, полагая $x_i = e^{2\varepsilon_i}$, $i \in I_0$, $y_j = e^{2\varepsilon_j}$, $j \in J_1/2$, получим

$$\varphi_\lambda = \sum \frac{\omega_\mu^\lambda}{Z_{2\mu}} sp_\mu \left(x, y, \frac{1}{2} \right),$$

где

$$sp_\mu \left(x, y, \frac{1}{2} \right) = sp_{\mu_1} \left(x, y, \frac{1}{2} \right) \dots sp_{\mu_q} \left(x, y, \frac{1}{2} \right), \quad sp_l = \sum_{i \in I_0} x_i^l - 2 \sum_{j \in \frac{1}{2}I_1} y_j^l.$$

Теорема доказана.

7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА БЕРЕЗИНА

Для обычных полиномов Джека, соответствующих алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$, существует скалярное произведение, индуцированное инвариантным интегралом на $U(n)$. Березин построил [18] инвариантный интеграл на унитарной супергруппе $U(n|m)$ и установил ряд его свойств. В частности, матричные коэффициенты любого конечномерного неприводимого представления V такого, что $\dim V_{\bar{0}} \neq \dim V_{\bar{1}}$, являются изотропными относительно скалярного произведения, возникающего из интеграла Березина. В работе Шенерта и Занга [5] доказано существование и единственность инвариантного интеграла для супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ с условием, что алгебра $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ редуктивна, ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ полупросто, а представление на максимальной внешней степени $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ тривиально. Доказательство Шенерта и Занга основано на теории алгебр Хопфа. В этом разделе передоказан этот результат без использования теории алгебр Хопфа и доказана двусторонняя инвариантность интеграла из работы [5].

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, причем алгебра $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ редуктивна, а ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ полупросто. Обозначим через $A(\mathfrak{g})$ линейное подпространство в $U(\mathfrak{g})^*$, равное сумме $C(V)$, где V – конечномерные представления $\mathfrak{g}$, ограничение которых на $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ полупросто. Поскольку

$$C(V_1) \otimes C(V_2) = C(V_1)C(V_2), \quad C(V_1 \oplus V_2) = C(V_1) + C(V_2),$$

то $A(\mathfrak{g})$ – подалгебра в $U(\mathfrak{g})^*$. Легко проверить, что $A(\mathfrak{g})$ инвариантна относительно левого и правого корегулярных представлений и является полупростым $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модулем относительно каждого из них. Пусть V_0 – неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модуль. Обозначим через $A(\mathfrak{g})_{V_0}^n$ изотипическую компоненту типа V_0 относительно правого корегулярного представления в $A(\mathfrak{g})$.

ЛЕММА 7.1. Пусть $V = \text{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}}(V_0)$. Рассмотрим каноническое отображение θ

$$V^* \otimes V \rightarrow U(\mathfrak{g})^*, \quad (v^*, v) \mapsto \theta(v^*, v).$$

Тогда ограничение θ на $V^* \otimes V_0$ является изоморфизмом $V^* \otimes V_0$ и $A(\mathfrak{g})_{V_0}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.3 отображение θ является гомоморфизмом $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ -модулей. Поэтому $\theta(V^* \otimes V_0) \subset A(\mathfrak{g})_{V_0}^n$. Докажем обратное включение. Пусть W_0 – подмодуль относительно правого корегулярного представления в $U(\mathfrak{g})^*$, изоморфный V_0 . Тогда имеем гомоморфизм $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модулей $\varphi_0: V_0 \rightarrow U(\mathfrak{g})^*$ и его продолжение $\varphi: V \rightarrow U(\mathfrak{g})^*$. Определим $v_\varphi^* \in V^*$ по формуле $v_\varphi^*(v) = \varphi(v)(1)$. Легко проверить, что $\theta(v_\varphi^*, v) = \varphi(v)$. Поэтому $\theta(V^* \otimes V_0) = A(\mathfrak{g})_{V_0}^n$. Осталось показать, что ограничение θ на $V^* \otimes V_0$ имеет тривиальное ядро. Заметим, что отображение θ является двойственным к отображению $\pi: U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(V)$, которое определяет структуру $\mathfrak{g}$ -модуля на V , если мы отождествляем $\text{End}(V)$ с $V \otimes V^*$, а $\text{End}(V)^*$ с $V^* \otimes V$. Поэтому инъективность ограничения θ равносильна тому, что образ π содержит $\text{Hom}(V_0, V)$. Из неприводимости V_0 как $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модуля следует сюръективность отображения $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \rightarrow \text{Hom}(V_0, V)$. Отсюда следует, что образ π содержит $\text{Hom}(V_0, V)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, алгебра $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ редуцируема, ее представление на $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ полупросто, а представление на максимальной внешней степени $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ тривиально. Тогда на алгебре $A(\mathfrak{g})$ существует нетривиальный, единственный с точностью до постоянного множителя функционал, инвариантный относительно левого корегулярного представления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 7.1

$$A(\mathfrak{g}) = \bigoplus (\text{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}} V_0)^* \otimes V_0,$$

где V_0 принадлежит множеству представителей всех неприводимых конечномерных представлений $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Пусть π_0 – тривиальное представление $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ и p – проекция $A(\mathfrak{g})$ на $A(\mathfrak{g})_{\pi_0}^n$ параллельно подпространству $K = \bigoplus (\text{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}} V_0)^* \otimes V_0$, где $V_0 \neq \pi_0$. Далее, согласно лемме 7.1 $A(\mathfrak{g})_{\pi_0}^n$ как $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модуль изоморфно $(\text{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}}(\pi_0))^* \otimes \pi_0$. Поэтому двойственное пространство к $A(\mathfrak{g})_{\pi_0}^n$ как $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модуль изоморфно $\text{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}}(\pi_0) \otimes \pi_0$, и согласно лемме 5.2 из работы [15] $(\text{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}} V_0)^{\mathfrak{g}}$ как векторное пространство изоморфно $V_0^{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}$. Следовательно, на $A(\mathfrak{g})_{\pi_0}^n$ существует единственный с точностью до константы нетривиальный линейный функционал l , инвариантный относительно $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Поэтому функционал $F = l \circ p$ является $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -инвариантным функционалом на $A(\mathfrak{g})$. Таким образом, доказано существование левоинвариантного функционала. Докажем единственность. Пусть F_1 – левоинвариантный функционал на $A(\mathfrak{g})$. Тогда $F_1 \circ \theta$ является инвариантным функционалом на $(\text{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}}(V_0))^* \otimes V_0$ (второй сомножитель мы рассматриваем как тривиальный $\mathfrak{g}$ -модуль). Следовательно, $F_1 \circ \theta$ определяет $\mathfrak{g}$ -инвариантный элемент модуля $\text{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}}(V_0)$ и, следовательно, $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -инвариантный элемент модуля V_0 . Поэтому $F_1(A(\mathfrak{g})_{V_0}^n) = 0$, если $V_0 \neq \pi_0$. Следовательно, $F_1 = \alpha F$, где α – комплексное число. Докажем теперь, что функционал F правоинвариантен. Пусть $u \in U(\mathfrak{g})$, тогда функционал $F_1(a) = F(R^*(u)a)$ также левоинвариантен. Следовательно, $F \circ R^*(u) = \alpha(u)F$, где α – одномерное представление $U(\mathfrak{g})$. Но как было показано, функционал F инвариантен относительно $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ справа, поэтому α – тривиальное представление, и, следовательно, F двусторонне инвариантен. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Утверждение А об инвариантном функционале сразу вытекает из следствия 7.1. Пусть ε – коединица, тогда $\varepsilon \in A(\mathfrak{g})_{\pi_0}^n$ и не является образующей этого модуля. Следовательно, $F(\varepsilon) = 0$.

Утверждения Б и В сразу следуют из леммы 2.4.

Благодарности. Автор благодарен Г. Ольшанскому за совет рассматривать однородные суперпространства при построении супераналога оператора Калоджеро и Д. Лейтесу за помощь, а также International Newton Institute (Кембридж) за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] *A. Sergeev*. J. Nonlinear Math. Phys. 2001. V. 8. P. 59.
- [2] *L. Brink, T. Hanson, S. Konstein, M. Vasiliev*. Nucl. Phys. B. 1993. V. 401. P. 591.
- [3] *P. Desrosiers, L. Lapointe, P. Mathieu*. Supersymmetric Calogero–Moser–Sutherland model and Jack superpolynomials. hep-th/0103178.
- [4] *P. Desrosiers, L. Lapointe, P. Mathieu*. Jack superpolynomials, superpartition ordering and determinantal formulas. hep-th/0105107.
- [5] *M. Scheunert, R. Zhang*. Integration on Lie supergroups. math.RA/0012052.
- [6] *В. Серганова*. Функци. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 3. С. 46.
- [7] *M. Olshanetsky, A. Perelomov*. Phys. Rep. 1983. V. 94. № 6. P. 313.
- [8] *А. П. Веселов, М. В. Феўзун, О. А. Чалых*. УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 185.
- [9] *O. Chalykh, M. Feigin, A. Veselov*. Commun. Math. Phys. 1999. V. 206. № 3. P. 533.
- [10] *L. Lapointe, L. Vinet*. Commun. Math. Phys. 1996. V. 178. № 2. P. 425.
- [11] *I. Macdonald*. Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford: Clarendon, 1995.
- [12] *R. Stanley*. Adv. Math. 1996. V. 77. P. 76.
- [13] *S. Kerov, A. Okounkov, G. Olshanski*. Int. Math. Res. Notices. 1998. № 4. P. 173.
- [14] *А. Сергеев*. Матем. сб. 1984. Т. 165. С. 422.
- [15] *A. Sergeev*. Michigan J. Math. 2001. V. 49. P. 113.
- [16] *Ж. Диксмье*. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.
- [17] *S. Sahi*. Int. Math. Res. Notices. 1996. V. 20. P. 997.
- [18] *Ф. А. Березин*. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983.

Поступила в редакцию 19.XII.2001 г.