Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Корепанов, Евклидовы 4-симплексы и инварианты четырехмерных многообразий. I. Перестройки $3 \rightarrow 3$, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 3, 377–388

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:47:22

ЕВКЛИДОВЫ 4-СИМПЛЕКСЫ И ИНВАРИАНТЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ. I. ПЕРЕСТРОЙКИ $3 \rightarrow 3$

Строятся инварианты четырехмерных кусочно-линейных многообразий, представленных в виде симплициальных комплексов, относительно перестроек, переводящих кластер из трех 4-симплексов с общей двумерной гранью в другой кластер такого же типа и имеющий ту же границу. В основе построения лежит использование евклидовых геометрических величин.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья задумана как первая в серии работ, целью которых является построение инвариантов четырехмерных кусочно-линейных многообразий, аналогичных инвариантам трехмерных многообразий, построенным в [1] и [2]. Напомним, что в этих работах рассматриваются ориентируемые многообразия, представленные в виде симплициального комплекса (или *предкомплекса*, в котором граница симплекса может содержать совпадающие компоненты). Каждому ребру приписывается евклидова длина, а каждой 3-клетке (тетраэдру) – знак “+” или “–” так, что удовлетворяется условие *нулевой кривизны*: алгебраическая сумма двугранных углов, примыкающих к каждому ребру, равна нулю по модулю 2π . Здесь каждый двугранный угол определяется длинами ребер соответствующего тетраэдра и берется со знаком, сопоставленным этому тетраэдру. Дальнейшее основано на рассмотрении бесконечно малых вариаций длин ребер и зависящих от них бесконечно малых *углов дефекта* при ребрах. Матрица, выражающая эти (линейные) зависимости, играет ключевую роль в итоговой явной формуле для инвариантов многообразий.

В статье [2] показано, что инварианты, построенные таким образом, являются в трехмерном случае достаточно тонкими – они различают, в частности, гомотопически эквивалентные линзовые пространства $L(7, 1)$ и $L(7, 2)$. С другой стороны, в работе [3] приведена формула, указывающая на возможность обобщения этих построений на размерность 4 и, по-видимому, высшие размерности. Эта формула относится к перестройке

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия. E-mail: kig@susu.ac.ru

одного кластера из трех 4-симплексов, т.е. является в естественном смысле *локальной*. Настоящая работа посвящена построению инвариантов любых цепочек таких перестроек $3 \rightarrow 3$ (три 4-симплекса заменяются на другие три 4-симплекса с той же границей) в *большом* симплицальном комплексе.

В разделе 2 приводится вывод локальной формулы, т.е. формулы для одной перестройки. В отличие от работы [3], при выводе формулы учитываются ориентации 4-симплексов и соответственно знаки двугранных углов. В разделе 3 вводятся основные величины — длины, площади и углы дефекта двух типов, из которых будут строиться наши инварианты (главным образом в виде дифференциалов) в *глобальном* случае. В разделе 4 доказываются необходимые для дальнейших построений свойства матриц, связывающих дифференциалы этих величин. Здесь ключевым свойством является симметричность одной из этих матриц, получаемая с помощью четырехмерного аналога дифференциального тождества Шлефли (см. [4]). В разделе 5 мы получаем *глобальный* инвариант перестроек $3 \rightarrow 3$. Для этого оказывается необходимым как использование локальной формулы, так и привлечение некоторых дифференциальных форм ей в помощь. Обсуждению результатов посвящен заключительный раздел 6.

2. ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Рассмотрим евклидов 4-симплекс $ABCDE$, у которого длины всех ребер, кроме AE , фиксированы. Напротив AE лежит двумерная грань BCD , где сходятся две трехмерные грани, образуя внутренний двугранный угол ϑ_{BCD} . В основе наших построений лежит формула

$$\frac{dL_{AE}}{V_{ABCDE}} = 24 \frac{d\vartheta_{BCD}}{S_{BCD}}, \quad (1)$$

где через L_{AE} мы обозначили *квадрат* длины AE , а V_{ABCDE} и S_{BCD} — соответствующие гиперобъем и площадь (ср. [5], формула (15)).

Пусть теперь имеются шесть точек $A, \dots, F$ в $\mathbb{R}^4$, все расстояния между которыми фиксированы, кроме AE и AF . Углы при грани BCD в 4-симплексах $ABCDE$ и $ABCDF$ отличаются на величину угла в *жестком* 4-симплексе $BCDEF$, все длины в котором фиксированы. Из равенства дифференциалов углов с учетом (1) получаем (ср. [5], формула (16))

$$\frac{dL_{AE}}{V_{ABCDE}} = \frac{dL_{AF}}{V_{ABCDF}}. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В формуле (2) следует считать V_{ABCDE} и V_{ABCDF} *ориентированными объемами*, а двугранные углы в них следует брать со знаками, совпадающими со знаками объемов (точнее, в интервале $(0, \pi)$ при положительном и $(-\pi, 0)$ при отрицательном знаках).

Ясно, что, производя перестановки букв в формуле (2), можно получить соотношения между dL для любых двух ребер, имеющих общую вершину. Если же мы хотим

связать, например, dL_{AB} и dL_{DE} при постоянных остальных длинах, мы можем поступить так: рассмотрим L_{AD} как функцию L_{AB} и L_{DE} (остальные длины постоянны), а затем найдем

$$\frac{dL_{DE}}{dL_{AB}} = -\frac{\partial L_{AD}/\partial L_{AB}}{\partial L_{AD}/\partial L_{DE}}$$

как производную неявной функции $L_{AD}(L_{AB}, L_{DE}) = \text{const}$. Таким способом получим

$$\frac{dL_{DE}}{V_{\hat{A}}V_{\hat{B}}} = -\frac{dL_{AB}}{V_{\hat{D}}V_{\hat{E}}}, \quad (3)$$

где приняты следующие обозначения: $\hat{A}, \hat{B}$ и т.д. есть последовательность $ABCDEF$ с удаленной буквой A, B и т.д.; $V_{\dots}$ обозначает ориентированный четырехмерный объем.

Рассмотрим теперь три 4-симплекса $ABCEF = \hat{D}$, $ABCFD = -\hat{E}$ и $ABCDE = \hat{F}$ с общей двумерной гранью ABC . Углы при ней в этих симплексах обозначим соответственно α, β и γ . Вместе они образуют полный угол: $\alpha + \beta + \gamma = 0 \pmod{2\pi}$. Считая, что все происходит в евклидовом пространстве, а из длин могут меняться только AB и DE , находим

$$0 = d(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\partial \gamma}{\partial L_{DE}} dL_{DE} + \frac{\partial(\alpha + \beta + \gamma)}{\partial L_{AB}} dL_{AB}. \quad (4)$$

Здесь, конечно, $\partial\alpha/\partial L_{AB}$ вычисляется из симплекса $\hat{D}$, тогда как $\partial\beta/\partial L_{AB}$ — из $\hat{E}$ и $\partial\gamma/\partial L_{AB}$ — из $\hat{F}$.

Обозначим сумму $\alpha + \beta + \gamma$, рассматриваемую как функцию десяти формально независимых квадратов длин, через $-\omega_{ABC}$ (ср. формулу (9) в разделе 3). Рассматривать ее так можно потому, что каждый из углов α, β, γ вычисляется по отдельности из своего 4-симплекса. Разумеется, все симплексы вместе могут находиться в $\mathbb{R}^4$, только если $\omega_{ABC} = 0 \pmod{2\pi}$.

Учитывая, что

$$\frac{\partial \gamma}{\partial L_{DE}} = \frac{1}{24} \frac{S_{ABC}}{V_{\hat{F}}}$$

(ср. (1)), и сопоставляя (4) с (3), находим

$$\frac{\partial \omega_{ABC}}{\partial L_{AB}} = -\frac{S_{ABC}}{24} \frac{V_{\hat{A}}V_{\hat{B}}}{V_{\hat{D}}V_{\hat{E}}V_{\hat{F}}}. \quad (5)$$

Аналогично можно определить ω_{DEF} как сумму двугранных углов при грани DEF в 4-симплексах $\hat{A}, -\hat{B}$ и $\hat{C}$ со знаком минус и получить равенство

$$\frac{\partial \omega_{DEF}}{\partial L_{DE}} = -\frac{S_{DEF}}{24} \frac{V_{\hat{D}}V_{\hat{E}}}{V_{\hat{A}}V_{\hat{B}}V_{\hat{C}}}. \quad (6)$$

Величину ω_{DEF} тоже можно считать функцией десяти формально независимых величин L .

Мы будем рассматривать только бесконечно малые отклонения величин L от их значений в *плоском* случае $\omega_{ABC} = \omega_{DEF} = 0$. В этом случае дифференциалы $d\omega_{ABC}$ и $d\omega_{DEF}$ *пропорциональны*, потому что это две линейные формы, зависящие от десяти dL , нулевые подпространства (ядра) которых совпадают (ибо как условие $d\omega_{ABC} = 0$, так и условие $d\omega_{DEF} = 0$ означают, что соответствующую бесконечно малую деформацию длин ребер можно реализовать в $\mathbb{R}^4$). В частности, если меняются только L_{AB} и L_{DE} , то

$$\begin{aligned} d\omega_{ABC} &= c_1 dL_{AB} + c_2 dL_{DE}, \\ d\omega_{DEF} &= c_3 dL_{AB} + c_4 dL_{DE}, \end{aligned} \quad (7)$$

где равные отношения c_1/c_2 и c_3/c_4 находятся из сопоставления (7) с соотношением (3), полученным при условии $d\omega_{ABC} = d\omega_{DEF} = 0$, а именно:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_3}{c_4} = \frac{V_{\hat{A}} V_{\hat{B}}}{V_{\hat{D}} V_{\hat{E}}}.$$

Кроме того, c_1 и c_4 суть правые части (5) и (6), соответственно.

Все вместе это позволяет вычислить коэффициент пропорциональности между $d\omega_{ABC}$ и $d\omega_{DEF}$. Результат запишем в следующем виде:

$$V_{\hat{D}} V_{-\hat{E}} V_{\hat{F}} \frac{d\omega_{ABC}}{S_{ABC}} = V_{\hat{A}} V_{-\hat{B}} V_{\hat{C}} \frac{d\omega_{DEF}}{S_{DEF}}. \quad (8)$$

Самое замечательное в соотношении (8) – то, что все входящие в левую часть величины относятся к 4-симплексам $\hat{D}$, $\hat{E}$ и $\hat{F}$, а в правую часть – к $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$. Таким образом, уравнение (8) является алгебраическим соотношением, отвечающим перестройке $3 \rightarrow 3$.

Сделаем еще следующие замечания. Конечно, $V_{-\hat{E}}$ и $V_{-\hat{B}}$ суть не что иное, как $-V_{\hat{E}}$ и $-V_{\hat{B}}$. Мы записали формулу (8) в таком виде потому, что 4-симплексы $\hat{D}$, $-\hat{E}$ и $\hat{F}$ имеют согласованные между собой ориентации, и то же относится к $\hat{A}$, $-\hat{B}$ и $\hat{C}$. С другой стороны, общая граница 4-симплексов $\hat{A}$, $-\hat{B}$ и $\hat{C}$ совпадает с общей границей $\hat{D}$, $-\hat{E}$ и $\hat{F}$ с *учетом ориентации*. Знак каждого из двугранных углов, входящих в $-\omega_{ABC}$ и $-\omega_{DEF}$, совпадает со знаком соответствующего объема из $V_{\hat{A}}$, $V_{-\hat{B}}$, $V_{\hat{C}}$, $V_{\hat{D}}$, $V_{-\hat{E}}$, $V_{\hat{F}}$.

3. ГЛОБАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ: МЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

В этом разделе вводятся основные величины – длины, площади и углы дефекта двух типов, из которых будут строиться наши инварианты в глобальном случае. Главную роль будут играть соотношения между вариациями, т.е. дифференциалами, этих величин.

Рассмотрим ориентируемое четырехмерное многообразие M . Представим его в виде симплицеального комплекса. Выберем согласованную ориентацию 4-симплексов в этом

комплексе (под ориентацией симплекса при этом понимается упорядочение его вершин, взятое с точностью до четных перестановок).

Сопоставление длин ребрам комплекса и знаков — его 4-симплексам делается в полной аналогии с трехмерным случаем, описанным во введении к работе [2]. Возьмем *универсальную накрывающую* клеточного комплекса, называемого также триангуляцией многообразия M . Ее вершины делятся на классы — полные прообразы каждой данной вершины относительно отображения накрытия. Фиксируем гомоморфизм (представление) $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow E_4$ фундаментальной группы многообразия M в группу движений четырехмерного евклидова пространства. Построим отображение f множества вершин универсальной накрывающей в $\mathbb{R}^4$ следующим образом. Одну вершину в каждом классе отобразим в произвольную точку. Далее, любая из остающихся вершин, скажем вершина B , представляется в виде $B = g(A)$ для некоторого элемента $g \in \pi_1(M)$ и некоторой вершины A , образ которой уже построен. Потребуем тогда, чтобы $f(B) = \varphi(g)f(A)$.

Имея образы вершин универсальной накрывающей нашего комплекса в $\mathbb{R}^4$, мы можем сопоставить и каждой клетке ненулевой размерности — ребру, треугольнику, тетраэдру, 4-симплексу — ее образ в $\mathbb{R}^4$, а именно выпуклую оболочку образов ее вершин. Подчеркнем, что нас не беспокоят возможные взаимопересечения получающихся симплексов в $\mathbb{R}^4$, но мы потребуем, чтобы все 4-симплексы в $\mathbb{R}^4$ — образы 4-симплексов из универсальной накрывающей — были *невыврожденны* (имели ненулевой объем).

Отсюда получаем сопоставление длин ребрам универсальной накрывающей комплекса — это будут, разумеется, расстояния между соответствующими вершинами в $\mathbb{R}^4$. Очевидно, что если два ребра переходят в одно при отображении накрытия, то их длины по нашей конструкции равны (ибо их образы в $\mathbb{R}^4$ переводятся один в другой элементами $\varphi(g) \in E_4$).

Считаем, что мы фиксировали ориентацию $\mathbb{R}^4$. Тогда 4-симплекс из триангуляции (напомним, что мы выбрали для них согласованную ориентацию) либо сохраняет свою ориентацию при отображении в $\mathbb{R}^4$, либо меняет ее. В первом случае сопоставим ему знак “+”, во втором — знак “−”. Разумеется, если два 4-симплекса переходят в один при отображении накрытия, им будет соответствовать один и тот же знак.

Таким образом, мы сопоставили длины ребрам и знаки — 4-симплексам самой триангуляции многообразия M , а не только ее универсальной накрывающей.

Коль скоро ребра каждого 4-симплекса приобрели евклидовы длины, можно вычислить и (внутренние) двугранные углы, образованные двумя трехмерными гранями 4-симплекса, пересекающимися по двумерной грани. В дальнейшем будем приписывать каждому такому углу знак “+” или “−”, совпадающий со знаком, приписанным соответствующему 4-симплексу. В этом смысле ниже мы будем говорить об *алгебраических суммах* таких углов.

Углом дефекта ω_{ABC} при данной двумерной грани ABC комплекса назовем взятую со знаком минус алгебраическую сумму всех двугранных углов вокруг этой грани,

рассматриваемую с точностью до кратных 2π :

$$\omega_{ABC} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_k \vartheta_k \pmod{2\pi} \quad (9)$$

(индекс k нумерует эти углы). Разумеется, все углы дефекта в нашей конструкции пока нулевые: кластер из всех 4-симплексов, имеющих данную двумерную грань, отображен в евклидово пространство, причем каждый отдельный 4-симплекс – изометрически, и знаки углов учтены надлежащим образом. Рассмотрим теперь два вида деформаций евклидовых величин, приписанных каждому 4-симплексу, при которых возникают ненулевые углы дефекта.

Первый вид деформаций – это малые изменения длин ребер: мы варьируем каждую из них произвольно в окрестности значения, полученного из описанной выше конструкции. Каждый отдельный 4-симплекс остается евклидовым, но отображение их кластера в евклидово пространство упомянутого выше типа уже не обязано существовать. Как и в разделе 2, мы предпочтем иметь дело с *квадратами* длин ребер, обозначая, например, квадрат длины ребра AB через L_{AB} . Мы также будем употреблять буквы $a, b, \dots$ в качестве номеров ребер комплекса и $i, j, \dots$ в качестве номеров двумерных граней. Одним из важнейших объектов в этой работе будет (прямоугольная) матрица частных производных $(\partial\omega_i/\partial L_a)$.

Второй вид деформаций евклидовых величин, пожалуй, выглядит более неожиданным. Как известно, вариации всех метрических величин в данном 4-симплексе можно вычислить по вариациям площадей его десяти двумерных граней (хотя *глобальное* утверждение такого рода неверно: площади, в отличие от длин, не определяют 4-симплекс однозначно). Возьмем в качестве исходных площади, полученные из вышеописанной конструкции, и придадим им независимые произвольные вариации, которые определяют вариации двугранных углов в каждом 4-симплексе и, значит, вариации углов дефекта. При этом мы *не обращаем внимания на то, что вариации длины одного и того же ребра, если мы захотим их вычислить из двух соседних 4-симплексов, могут не совпадать*.

Кроме углов при двумерных гранях, нам понадобятся и углы при ребрах. Рассмотрим сначала один 4-симплекс. Определим угол при ребре a как

$$\Theta_a \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{\partial S_i}{\partial L_a} \vartheta_i, \quad (10)$$

где i пробегает двумерные грани симплекса (ненулевых слагаемых в сумме получается четыре), а S_i , разумеется, есть площадь i -й грани. Разумность этого видна, в том числе, из того, что определенные таким образом углы удовлетворяют аналогу *дифференциального тождества Шлефли* (см. [4]).

Напомним, что обычное тождество Шлефли для 4-симплекса имеет вид

$$\sum_i S_i d\vartheta_i = 0 \quad (11)$$

при любых бесконечно малых деформациях. Докажем, что

$$\sum_a L_a d\Theta_a = 0.$$

Для этого достаточно рассмотреть вместо $d\Theta_a$ частные производные по произвольному L_b :

$$\sum_a L_a \frac{\partial \Theta_a}{\partial L_b} = \sum_a L_a \sum_i \frac{\partial^2 S_i}{\partial L_a \partial L_b} \vartheta_i + \sum_a L_a \sum_i \frac{\partial S_i}{\partial L_a} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial L_b}. \quad (12)$$

Заметим, что S_i являются *однородными функциями* степени 1 по квадратам длин L_a . Это дает

$$\sum_a L_a \partial S_i / \partial L_a = S_i, \quad \sum_a L_a \partial^2 S_i / (\partial L_a \partial L_b) = 0.$$

Теперь видно, что оба члена в (12) обращаются в нуль (второй из них – с учетом обычного соотношения Шлефли (11)).

В завершение этого раздела дадим естественное определение *углов дефекта вокруг ребер*:

$$\Omega_a \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_k (\Theta_a)_k \pmod{2\pi}, \quad (13)$$

где k нумерует 4-симплексы, которым принадлежит ребро a .

4. МАТРИЦЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ РАЗЛИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ: СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Рассмотрим матрицы, выражающие линейную зависимость дифференциалов углов дефекта двух видов, введенных в разделе 3, от дифференциалов квадратов длин или площадей. Эти дифференциалы, как объяснено там же, считаются независимыми переменными. Все происходит в бесконечно малой окрестности подмногообразия, отвечающего плоскому случаю (когда все углы дефекта равны нулю).

ТЕОРЕМА 1. *Матрица $(\partial \omega_i / \partial S_j)$ симметрична:*

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial S_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial S_i}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала аналогичное утверждение для одного 4-симплекса:

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial S_j} = \frac{\partial \vartheta_j}{\partial S_i}. \quad (15)$$

Для этого рассмотрим функцию $f(S_1, \dots, S_{10}) = \sum_i S_i \vartheta_i$, где сумма берется по всем двумерным граням 4-симплекса. Соотношение (15) получится из равенства смешанных производных $\partial^2 f / (\partial S_i \partial S_j) = \partial^2 f / (\partial S_j \partial S_i)$, если при их вычислении мы воспользуемся формулой Шлефли (11). Тогда формулу (14) можно получить суммированием по двугранным углам, входящим в данный угол дефекта.

Рассмотрим теперь прямоугольную матрицу $(\partial\Omega_a/\partial S_i)$. Заметим, что элементы этой матрицы корректно определены, несмотря на то что в определение Ω_a входят величины (частные производные от площадей по длинам), вариации которых не определены однозначно (зависят от конкретного 4-симплекса, как и вариации длин). Дело в том, что при вычислении $\partial\Omega_a/\partial S_i$ все такие величины умножаются на нулевые ω_j .

ТЕОРЕМА 2. Матрицы $(\partial\Omega_a/\partial S_i)$ и $(\partial\omega_i/\partial L_a)$ взаимно сопряжены:

$$\frac{\partial\Omega_a}{\partial S_i} = \frac{\partial\omega_i}{\partial L_a}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из цепочки равенств:

$$\frac{\partial\Omega_a}{\partial S_i} = \frac{\partial}{\partial S_i} \left(\sum_j \frac{\partial S_j}{\partial L_a} \omega_j \right) = \sum_j \frac{\partial\omega_j}{\partial S_i} \frac{\partial S_j}{\partial L_a} = \sum_j \frac{\partial\omega_i}{\partial S_j} \frac{\partial S_j}{\partial L_a} = \frac{\partial\omega_i}{\partial L_a}.$$

Здесь мы использовали сначала выражение Ω_a через ω_j (получаемое сопоставлением (9), (10) и (13)), затем то, что производные берутся при всех $\omega_j = 0$ и, наконец, соотношение (14).

5. ИНВАРИАНТ ПЕРЕСТРОЕК $3 \rightarrow 3$

Подготовительная работа, проведенная в разделах 3 и 4, позволяет теперь перейти от локальной формулы (8) к ее глобальному аналогу.

ТЕОРЕМА 3. Выберем в матрице $(\partial\omega_i/\partial L_a)$ наибольшую квадратную подматрицу $\mathcal{B}$ с ненулевым определителем. Пусть $\mathcal{B}$ содержит строку, соответствующую такой грани $i = ABC$, которая принадлежит ровно трем 4-симплексам. Тогда их можно заменить на три новых 4-симплекса, как в разделе 2. После такой замены возьмем в новой матрице $(\partial\omega_i/\partial L_a)$ новую подматрицу $\mathcal{B}$ из тех же строк и столбцов, заменив только строку, соответствовавшую грани ABC , на строку, соответствующую новой грани DEF .

При такой перестройке выражение

$$\det \mathcal{B} \cdot \frac{\prod_{\substack{\text{по всем} \\ \text{4-симплексам}}} V}{\prod_{\substack{\text{по всем} \\ \text{двумерным граням}}} S} \quad (17)$$

не меняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственным не совсем очевидным моментом в формуле (17) по сравнению с (8) является присутствие определителя $\det \mathcal{B}$ вместо одного дифференциала $d\omega$. Удобно записать его в виде $\det \mathcal{B} = \wedge d\omega / \wedge dL$, где внешнее произведение в числителе берется по двумерным граням, соответствующим строкам матрицы $\mathcal{B}$, а в знаменателе – по ребрам, соответствующим столбцам $\mathcal{B}$. Теперь заметим, что если $\omega_{ABC} = 0$ или, эквивалентно, $\omega_{DEF} = 0$, то углы дефекта для остальных граней не меняются при перестройке (ибо получаются из одинаковых двугранных углов). Поэтому разность дифференциалов $d\omega_j - d\omega'_j$ (как функций дифференциалов dL), взятых до и после перестройки, для любой из остальных граней пропорциональна $d\omega_{ABC}$ или, что эквивалентно, $d\omega_{DEF}$. Значит, $\det \mathcal{B}$ умножается при перестройке на $d\omega_{ABC}/d\omega_{DEF}$. Теорема доказана.

Выражение (17) зависит от конкретного выбора подмножеств двумерных граней и ребер, соответствующих строкам и столбцам матрицы $\mathcal{B}$. Избавиться от этой зависимости нам помогут, как и в трехмерном случае (см. работы [1], [2]), дифференциальные формы.

Множество двумерных граней, соответствующих строкам матрицы $\mathcal{B}$, обозначим $\mathcal{D}$. Через $\overline{\mathcal{D}}$ будем обозначать множество остальных двумерных граней комплекса. Аналогично множество ребер, соответствующих столбцам $\mathcal{B}$, обозначим $\mathcal{C}$, а через $\overline{\mathcal{C}}$ будем обозначать множество остальных ребер комплекса. Будем несколько вольно записывать

$$\mathcal{B} = \prod_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial L_a} \right)_{\mathcal{C}}.$$

Вольность состоит в том, что для полного задания матрицы $\mathcal{B}$ нужен еще *порядок* следования строк и столбцов, и этот порядок влияет на знак определителя $\det \mathcal{B}$.

Считаем пока фиксированным множество $\mathcal{D} \cup \overline{\mathcal{D}}$ всех двумерных граней. Множество $\mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{C}}$ также фиксировано, так как набор ребер не меняется при перестройках $3 \rightarrow 3$, которые мы сейчас рассматриваем.

ТЕОРЕМА 4. *Выражение*

$$(\det \mathcal{B})^{-1} \cdot \bigwedge_{i \in \overline{\mathcal{D}}} dS_i \cdot \bigwedge_{a \in \overline{\mathcal{C}}} dL_a, \quad (18)$$

рассматриваемое с точностью до знака, не зависит от выбора множеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$.

Поясним смысл выражения (18). Множество $\overline{\mathcal{C}}$ есть, в полной аналогии с работами [1] и [2], такое наибольшее подмножество в множестве всех ребер, что длинам ребер из $\overline{\mathcal{C}}$ можно придать произвольные бесконечно малые приращения dL_a без нарушения условий нулевой кривизны $d\omega_i = 0$ для всех i . Остальные dL_a (при $a \in \mathcal{C}$) определяются из этих условий однозначно. Это позволяет выразить $\bigwedge_{a \in \overline{\mathcal{C}_1}} dL_a$ через $\bigwedge_{a \in \overline{\mathcal{C}}} dL_a$, где $\overline{\mathcal{C}_1}$ –

другое множество, аналогичное $\overline{\mathcal{C}}$. Точнее, эти внешние произведения пропорциональны, и можно вычислить коэффициент пропорциональности из матрицы $(\partial\omega_i/\partial L_a)$. Таким образом, мы рассматриваем внешние произведения такого сорта на линейном пространстве бесконечно малых деформаций длин, оставляющих углы дефекта нулевыми.

Оказывается, множество $\overline{\mathcal{D}}$ допускает аналогичное описание: $\overline{\mathcal{D}}$ есть такое наибольшее подмножество в множестве всех двумерных граней комплекса, что площадям граней из $\overline{\mathcal{D}}$ можно придать произвольные бесконечно малые приращения dS_i без нарушения условий *нулевой кривизны на ребрах*: $d\Omega_a = 0$ для всех a . Здесь мы считаем $d\Omega_a$ функциями всех dS_i , как в разделе 4. Величины dS_i при $i \in \mathcal{D}$ определяются из условий $d\Omega_a = 0$ однозначно.

В самом деле, по теореме 2 матрицы $(\partial\Omega_a/\partial S_i)$ и $(\partial\omega_i/\partial L_a)$ получаются друг из друга транспонированием (которое обозначаем верхним индексом T), следовательно, $\mathcal{B}^T = {}^c(\partial\Omega_a/\partial S_i)_{\mathcal{D}}$ является максимальной невырожденной квадратной подматрицей в $(\partial\Omega_a/\partial S_i)$, из чего и следуют наши утверждения.

Таким образом, мы рассматриваем внешние произведения дифференциалов площадей на линейном пространстве таких бесконечно малых деформаций этих площадей, при которых углы дефекта *вокруг ребер* остаются нулевыми. Если $\overline{\mathcal{D}}_1$ — другое множество двумерных граней, аналогичное $\overline{\mathcal{D}}$, то формы $\wedge_{i \in \overline{\mathcal{D}}_1} dS_i$ и $\wedge_{i \in \overline{\mathcal{D}}} dS_i$ пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности снова вычисляется из матрицы $(\partial\omega_i/\partial L_a)$.

Перейдем к доказательству теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что выражение (18) не меняется при обмене элементами между $\mathcal{C}$ и $\overline{\mathcal{C}}$. Ограничимся для простоты случаем, когда только одно ребро с номером b переносится из $\overline{\mathcal{C}}$ в $\mathcal{C}$, а на его место ставится ребро c . При этом $\wedge_{a \in \overline{\mathcal{C}}} dL_a$ умножается, разумеется, на

$$\left. \frac{\partial L_c}{\partial L_b} \right|_{\text{при всех } d\omega_i=0 \text{ и } dL_a=0, \text{ где } a \in \overline{\mathcal{C}}, a \neq b}. \quad (19)$$

С другой стороны, частную производную (19) можно вычислить, считая квадраты длин ребер из $\mathcal{C}$ неявными функциями квадратов длин ребер из $\overline{\mathcal{C}}$, заданными условиями $\omega_i = 0$, $i \in \mathcal{C}$. Тогда получим

$$\frac{\partial L_c}{\partial L_b} = - \frac{\det \mathcal{B}_{\text{новое}}}{\det \mathcal{B}}.$$

Значит, $\det \mathcal{B}$ (с точностью до знака) при такой замене $b \leftrightarrow c$ умножается на то же выражение (19).

Теперь докажем, что выражение (18) не меняется при обмене элементами между $\mathcal{D}$ и $\overline{\mathcal{D}}$. Снова для простоты считаем, что происходит обмен только одним элементом. Пусть в комплексе всего n двумерных граней, причем грани с номерами от 1 до m входят в множество $\mathcal{D}$, а от $m+1$ до n — в $\overline{\mathcal{D}}$. Будем рассматривать замену $m \leftrightarrow m+1$.

Разумеется, $m = \text{rank}(\partial\omega_i/\partial L_a)$. Поэтому, в частности, $(m+1)$ -я строка матрицы $(\partial\omega_i/\partial L_a)$ является линейной комбинацией первых m строк с некоторыми коэффициентами $c_1, \dots, c_m$. Это можно записать в виде равенства

$$d\omega_{m+1} = c_1 d\omega_1 + \dots + c_m d\omega_m, \quad (20)$$

а также

$$(-c_1 \quad \dots \quad -c_m \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \begin{pmatrix} \partial\omega_i \\ \partial L_a \end{pmatrix} = 0. \quad (21)$$

Транспонируя равенство (21), получим

$$\begin{pmatrix} \partial\Omega_a \\ \partial S_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_1 \\ \dots \\ -c_m \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Это значит, что все $d\Omega_a = 0$, если выполнены следующие пропорции:

$$dS_1 : dS_2 : \dots : dS_m : dS_{m+1} : dS_{m+2} : \dots : dS_n = -c_1 : -c_2 : \dots : -c_m : 1 : 0 : \dots : 0.$$

В частности,

$$\left. \frac{\partial S_m}{\partial S_{m+1}} \right|_{\text{при всех } d\Omega_a=0 \text{ и } dS_{m+2}=\dots=dS_n=0} = -c_m. \quad (22)$$

Именно на величину (22) умножается $\wedge_{i \in \overline{\mathcal{D}}} dS_i$ при замене граней $m \leftrightarrow m+1$.

С другой стороны, равенство (20) показывает, что $\det \mathcal{B}$ умножается на c_m при такой замене граней. Тем самым теорема 4 доказана.

Объединяя теорему 4 с теоремой 3, получаем искомый инвариант перестроек $3 \rightarrow 3$.

ТЕОРЕМА 5. *Величина*

$$\frac{\prod_{\substack{\text{по всем} \\ \text{двумерным граням}}} S \cdot \bigwedge_{\overline{\mathcal{D}}} dS \cdot \bigwedge_{\overline{\mathcal{C}}} dL}{\det \mathcal{B} \cdot \prod_{\substack{\text{по всем} \\ \text{4-симплексам}}} V} \quad (23)$$

не зависит от выбора множеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и является инвариантом перестроек $3 \rightarrow 3$.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В выражении (23) нетрудно усмотреть прямое обобщение аналогичного инварианта трехмерных многообразий. Точнее, (23) очень похоже на выражение для такого инварианта из работы [1] (см. [1], формула (30)), возведенное в квадрат. Заметим, что упомянутый инвариант трехмерных многообразий является инвариантом *всех* видов перестроек трехмерных симплициальных комплексов – движений Пахнера, т.е. $2 \leftrightarrow 3$ и $1 \leftrightarrow 4$. Это позволяет думать, что и в четырехмерном случае применимость выражения (23) выходит за рамки только перестроек $3 \rightarrow 3$. Кроме того, это позволяет надеяться на нетривиальные следствия теоремы 5, так как упомянутый трехмерный инвариант выдерживает тест на нетривиальность [2].

В следующих работах планируется изучить поведение выражения (23) при перестройках $2 \leftrightarrow 4$ и $1 \leftrightarrow 5$. Пока же приведем доводы в защиту рассмотрения перестроек $3 \rightarrow 3$ самих по себе, сославшись на аналогию с уравнением Янга–Бакстера. Известно, что с точки зрения теории узлов оно соответствует только одному из движений Райдемайстера, необходимых для этой теории. Тем не менее уравнение Янга–Бакстера оказывается достаточно интересным с алгебраической точки зрения само по себе и находит применения, в частности, в статистической физике и квантовой теории поля.

Благодарности. Автор выражает благодарность Джону Барретту и Джастину Робертсу за разъяснение вопросов, связанных с дифференциальным тождеством Шлефли. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00059.

Список литературы

- [1] *I. G. Korepanov*. J. Nonlinear Math. Phys. 2001. V. 8. № 2. P. 196–210.
- [2] *I. G. Korepanov, E. V. Martyushev*. J. Nonlinear Math. Phys. 2002. V. 9. № 1. P. 86–98.
- [3] *I. G. Korepanov*. A formula with hypervolumes of six 4-simplices and two discrete curvatures. nlin.SI/0003024.
- [4] *J. Milnor*. The Schläfli differential equality. In: Collected Papers. V. 1. Geometry. Houston, Texas: Publish or Perish, 1993. P. 281–295.
- [5] *И. Г. Корепанов*. ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 169–176.

Поступила в редакцию 21.XII.2001 г.