Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Перескоков, Асимптотические решения двумерных уравнений типа Хартри, локализованные вблизи отрезков, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 3, 389–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:39:14

© 2002 г.

А. В. Перескоков*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ХАРТРИ, ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВБЛИЗИ ОТРЕЗКОВ

Рассмотрена задача на собственные значения для двумерного уравнения Шредингера, содержащего интегральную нелинейность типа Хартри с логарифмической особенностью у потенциала взаимодействия. С помощью метода согласования асимптотических разложений построены глобальные асимптотические решения, локализованные вблизи некоторого отрезка на плоскости. В качестве модельных функций в этих решениях используются полярон Боголюбова и эйри-полярон. Для нахождения соответствующей серии собственных значений получен аналог правила квантования Бора-Зоммерфельда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена построению вещественных асимптотических решений $g = g(x, y)$ следующей задачи на собственные значения для нелинейного уравнения типа Хартри:

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) + \left\{ -V(x) - V_1(x, y^2) - \right. \\ \left. - h^{1/3} \iint_{-\infty}^{\infty} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2] g^2(x', y') dx' dy' + \lambda \right\} g = 0, \quad (1.1)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g^2(x, y) dy dx = 1, \quad (1.2)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} y g^2(x, y) dy dx = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $h \rightarrow 0$ — малый параметр, гладкая функция $V(x)$ имеет вид потенциальной ямы, а гладкая функция $V_1(x, y^2)$ удовлетворяет условию $V_1(x, 0) \equiv 0$ и растет на бесконечности не быстрее степенной функции. Уравнение (1.1) можно считать слабо нелинейным, так как перед интегралом стоит малый параметр $h^{1/3}$.

*Московский энергетический институт (технический университет), Москва, Россия. E-mail: pereskokov@mm.mpei.ac.ru; pereskokov@comail.ru

К задаче (1.1)–(1.3) после перенормировки сводится, например, такая задача с квадратичной потенциальной ямой и сильной нелинейностью:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \right) + \left\{ -a_1 \xi^2 - a_2 \eta^2 - \right. \\ \left. - \iint_{-\infty}^{\infty} \ln[(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2] G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta' + \Lambda \right\} G = 0, \\ \iint_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi, \eta) d\eta d\xi = 1, \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \eta G^2(\xi, \eta) d\eta d\xi = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Действительно, если выбрать $V(x) = a_1 x^2 + b$, $V_1(x, y^2) = a_2 y^2$, где $a_1 > 0$, a_2, b – константы, то после замены $x = h^{1/6} \xi$, $y = h^{1/6} \eta$, $g = G(\xi, \eta)/h^{1/6}$, $\varepsilon = h^{2/3}$, $\Lambda = (\lambda - b)/h^{1/3} - (\ln h)/3$ приходим к (1.4).

В данной статье для задачи (1.1)–(1.3) вычислены асимптотические решения $g = g_n(x, y, h)$ и найдена асимптотика соответствующей серии собственных значений $\lambda = \lambda_n(h)$ при $h \rightarrow 0$ и $n \sim 1/h$, а точнее, при

$$0 < C_1 \leq hn \leq C_2 < \infty, \quad (1.5)$$

где C_1, C_2 – некоторые константы.

Напомним, что уравнениями типа Хартри в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ называют следующую систему уравнений [1]:

$$(-\varepsilon^2 \Delta + V + U)\psi = \lambda \psi, \quad \|\psi\|_{L^2} = 1, \quad (1.6)$$

$$\Delta U = |\psi|^2. \quad (1.7)$$

Потенциал самосогласованного поля U может быть выражен из уравнения (1.7) в виде интеграла

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(y)|^2}{|x-y|} dy, & \text{если } x \in \mathbb{R}^3, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| \cdot |\psi(y)|^2 dy, & \text{если } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Подстановка его в (1.6) приводит к дифференциальным уравнениям для ψ с интегральной нелинейностью, играющим фундаментальную роль в некоторых квантово-механических моделях, а также в нелинейной оптике (см., например, [2]–[10]).

Систематическая разработка теории квазиклассического приближения при $\varepsilon \rightarrow 0$ для нелинейных уравнений такого типа была начата в работах [11], [12]. Случай сингулярного ядра, возникающий в реальных физических моделях, вначале не рассматривался. В таком гладком случае квазимоды, сосредоточенные вблизи точки, для уравнения Хартри были впервые построены авторами работ [13] (с. 378), [12] и [14].

Затем в работе [15] была предпринята попытка теми же методами изучить случай сингулярного ядра взаимодействия. Были построены радиально-симметричные асимптотики [15], [16]. Построение же нерадиально-симметричных асимптотических решений для уравнений типа Хартри являлось серьезной проблемой. Доказательство существования несимметричных решений для некоторых случаев было дано в [17], [18]; их

изучение с использованием численных методов проводилось, например, в работе [19]. Наконец, в работах [20], [21] для уравнения Хартри в $\mathbb{R}^3$ удалось построить серию асимптотических собственных значений и соответствующих собственных функций, сосредоточенных вблизи плоских дисков.

Использованная в работах [20], [21] схема построения асимптотик оказалась применимой также и в случае двумерных уравнений типа Хартри. В данной статье с помощью метода согласования асимптотических разложений будут построены нерадиально-симметричные асимптотические решения уравнения (1.1), локализованные вблизи отрезка $[\tilde{x}_-, \tilde{x}_+]$ прямой $y = 0$. Здесь $\tilde{x}_-, \tilde{x}_+$ — точки поворота, расположенные около корней x_-, x_+ ($x_- < x_+$) уравнения $\lambda - V(x) = 0$.

В области между $\tilde{x}_-$ и $\tilde{x}_+$ асимптотика строится с помощью варианта метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ). Отметим, что по направлению нормали к отрезку квазимода уже не является простым гауссовским пакетом, а определяется уравнением одномерного полярона Боголюбова (см. задачу (3.6), (3.7) в разделе 3). Вблизи точек $\tilde{x}_-, \tilde{x}_+$ асимптотика выражается через решения $G = G(\xi, \eta)$ модельного уравнения. Именно в рассматриваемом нами случае, когда в (1.1) перед нелинейностью стоит множитель $h^{1/3}$, модельным является уравнение

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \left(\xi - \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2} \right] G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right) G = 0, \quad (1.9)$$

которое можно рассматривать как нелинейную модификацию обычного уравнения Эйри с дополнительным логарифмическим ядром взаимодействия (эйри-версия двумерного уравнения полярона). Экспоненциально убывающие при $\eta \rightarrow \pm\infty$, $\xi \rightarrow -\infty$ решения уравнения (1.9) (эйри-поляроны) изучались в работе [20], где их асимптотические разложения были найдены при $\xi \rightarrow +\infty$ и $\xi \rightarrow -\infty$. С помощью таких решений удастся согласовать локальные асимптотики для уравнения (1.1).

Для нахождения дискретной серии собственных значений $\lambda = \lambda_n(h)$ задачи (1.1)–(1.3) в разделе 6 будет приведено правило квантования типа Бора–Зоммерфельда, строгое обоснование которого является основным результатом данной статьи.

В разделе 5 получена система уравнений для определения входящей в правило квантования функции $S(x, h)$, задающей фазу ВКБ-разложения. Она имеет достаточно сложный вид, и получаемые при решении формулы весьма громоздки. Но если ограничиться нахождением асимптотических собственных значений $\lambda_n(h) = O(1)$ лишь с точностью $O(n^{-7/10})$, $n \rightarrow \infty$ (главное приближение), то правило квантования упрощается и приводит к следующему уравнению для чисел $\lambda = \lambda_n(h)$:

$$\frac{1}{h} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{U(x)} dx - \frac{k_0}{2h^{2/3}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{E(x)}{\sqrt{U(x)}} dx + \frac{1}{h^{1/3}} \left\{ \frac{k_0^3 P_1}{8} \int_{x_-}^{x_+} \frac{E(x)}{\sqrt{U(x)}} dx - \frac{k_0^2 P_2}{4} - \frac{k_0^2 P_3}{8} + P \right\} = \pi n + O(n^{1/3-1/30}).$$

Здесь n — целые числа, $n \rightarrow \infty$ таким образом, что справедливо условие (1.5), $U(x) = \lambda - V(x)$, а коэффициенты k_0, P_j ($j = 1, 2, 3$) и функция $E(x)$ зависят от U следующим образом:

$$\begin{aligned}
k_0 &= 2 \left(\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{U(x)}} \right)^{-1}, \quad E(x) = \int_{x_-}^{x_+} \frac{\ln|x-x'|}{\sqrt{U(x')}} dx', \\
P_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\theta(x-x_-)\theta(x_+-x)}{(U(x))^{3/2}} E(x) - \frac{\theta(x-x_-)E(x_-)}{(U'(x_-))^{3/2}(x-x_-)^{3/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta(x_+-x)E(x_+)}{(-U'(x_+))^{3/2}(x_+-x)^{3/2}} \right\} dx, \\
P_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \left\{ \frac{\theta(x-x_-)\theta(x_+-x)}{(U(x))^{3/2}} E(x) - \frac{\theta(x-x_-)E(x_-)}{(U'(x_-))^{3/2}(x-x_-)^{3/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta(x_+-x)E(x_+)}{(-U'(x_+))^{3/2}(x_+-x)^{3/2}} \right\} dx, \\
P_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\theta(x-x_-)\theta(x_+-x)}{(U(x))^{3/2}} E^2(x) - \frac{\theta(x-x_-)E^2(x_-)}{(U'(x_-))^{3/2}(x-x_-)^{3/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta(x_+-x)E^2(x_+)}{(-U'(x_+))^{3/2}(x_+-x)^{3/2}} \right\} dx,
\end{aligned}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

а также

$$\begin{aligned}
P &= \frac{k_0}{2} \left\{ b_- \int_{x_-}^{x_+} \int_x^{x_+} \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} \left(\text{v.p.} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx'}{(x-x')\sqrt{U(x')}} \right) dx - \right. \\
&\quad \left. - b_+ \int_{x_-}^{x_+} \int_{x_-}^x \frac{dx'}{\sqrt{U(x')}} \left(\text{v.p.} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx'}{(x-x')\sqrt{U(x')}} \right) dx \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
b_- &= (U'(x_-))^{2/3} A_{-1}(k_0 (U'(x_-))^{-4/3}), \\
b_+ &= (-U'(x_+))^{2/3} A_{-1}(k_0 (-U'(x_+))^{-4/3}).
\end{aligned} \quad (1.11)$$

Функция $A_{-1}(\tilde{k})$ в (1.11), характеризующая влияние решений модельного уравнения (1.9) на правило квантования, определена в разделе 4 (см. (4.10)).

2. ВКБ-АСИМПТОТИКА. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ

Предположим, что существует такая точка x_0 , что $V'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $V'(x) > 0$ при $x > x_0$. Кроме того, пусть $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$. Будем рассматривать лишь $\lambda > V(x_0)$. Тогда для функции $U(x) = \lambda - V(x)$ существуют ровно две точки x_- и x_+ , $x_- < x_+$, такие, что $U(x_{\pm}) = 0$, $U(x) > 0$ при $x \in (x_-, x_+)$, $U(x) < 0$ при $x < x_-$, $x > x_+$.

Определим точки $\tilde{x}_{\pm} \sim x_{\pm}$ из уравнения

$$U(\tilde{x}_{\pm}) - h^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \ln|x' - \tilde{x}_{\pm}| \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x', y') dy' dx' = O\left(h^{1+1/57} \ln \frac{1}{h}\right), \quad h \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

ВКБ-разложение для уравнения (1.1) будет построено при $\tilde{x}_- + \varepsilon < x < \tilde{x}_+ - \varepsilon$, где $\varepsilon = ch^{26/57}$, $c > 0$ – произвольная константа. Асимптотическое решение в указанной области будем искать в виде

$$g(x, y) = h^{-5/18} T(x, \tau_1, h) \cos \Phi(x, \tau_1, h), \quad (2.2)$$

где

$$\tau_1 = y/h^{5/9}, \quad \Phi(x, \tau_1, h) = S(x, h)/h + h^{1/9} \varphi(x, \tau_1, h). \quad (2.3)$$

Функции S, T, φ гладкие, вещественные, при $\tau_1 \rightarrow \pm\infty$ функция T экспоненциально убывает, а φ имеет степенной рост.

Пусть $\chi = \chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – неотрицательная функция, такая что $\chi(\xi) \equiv 1$ при $\xi < 1/2$, $\chi(\xi) \equiv 0$ при $\xi > 1$. Определим $\chi_-(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \chi((x - \tilde{x}_-)/\varepsilon)$, $\chi_+(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \chi((\tilde{x}_+ - x)/\varepsilon)$ и подставим представления (2.2) и (2.3) в уравнение (1.1). Предположим, что вблизи точек $\tilde{x}_-, \tilde{x}_+$ точное решение g известно. Проведя преобразования, аналогичные примененным в работах [20], [21], получаем равенство

$$\begin{aligned} & - \left[(S')^2 T - h^{8/9} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau_1^2} + 2h^{10/9} T S' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h^{10/9} T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \right)^2 \right] \cos \Phi - \\ & - h \left[2 \frac{\partial T}{\partial \tau_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} + T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_1^2} + 2 \frac{\partial T}{\partial x} S' + T S'' \right] \sin \Phi + \left\{ U - h^{1/3} \left[j_- + j_+ + \right. \right. \\ & + \left. \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \ln |x - x'| (1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \chi_+(x', \varepsilon)) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x', \tau'_1, h) d\tau'_1 dx' \right] - \\ & \left. - \pi h^{8/9} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| T^2(x, \tau'_1, h) d\tau'_1 \right\} T \cos \Phi + r^* = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} j_-(x, h) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} 2 \ln |x - x'| \chi_-(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x', y') dy' dx', \\ j_+(x, h) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} 2 \ln |x - x'| \chi_+(x', \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x', y') dy' dx', \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} r^* & = O \left(h^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + O \left(h^{19/9} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + O \left(h^{19/9} T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + O \left(h^{20/9} T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) + \\ & + O \left(h^{10/9} \tau_1^2 T \right) + O \left(h^{13/9} \int_{-\infty}^{\infty} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\tau_1 - \tau'_1)^2}{(x - x')^2} [(1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \right. \\ & \left. - \chi_+(x', \varepsilon)) T^2(x', \tau'_1, h) - T^2(x, \tau'_1, h)] dx' d\tau'_1 T \right) + \\ & + O \left(h^{1/3} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')^2}{(x - x')^2} \chi_-(x', \varepsilon) g^2(x', y') dy' dx' T \right) + \\ & + O \left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')^2}{(x - x')^2} \chi_+(x', \varepsilon) g^2(x', y') dy' dx' T \right) + \end{aligned}$$

$$+ O\left(h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[(x - x')^2 + h^{10/9}(\tau_1 - \tau'_1)^2] (1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \chi_+(x', \varepsilon)) T^2(x', \tau'_1, h) \cos 2\Phi(x', \tau'_1, h) d\tau'_1 dx' T\right). \quad (2.6)$$

Далее, приравнявая к нулю выражение перед $\sin \Phi$ в равенстве (2.4), получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(T^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (T^2 S'(x, h)) = 0. \quad (2.7)$$

Так как при $|\tau_1| \rightarrow \infty$ функция T экспоненциально убывает, а φ растет лишь степенным образом, то

$$\lim_{|\tau_1| \rightarrow \infty} T^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} = 0,$$

и, следовательно, условием разрешимости уравнения (2.7) будет равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^2(x, \tau_1, h) d\tau_1 = \frac{k}{S'(x, h)}, \quad (2.8)$$

где k — некоторая константа.

Теперь приравняем к нулю все слагаемые перед $\cos \Phi$ в (2.4). Пусть экспоненциально убывающая при $|\tau_1| \rightarrow \infty$ амплитуда $T(x, \tau_1, h)$, а также функция $L(x, h)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \tau_1^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| T^2(x, \tau'_1, h) d\tau'_1 + L \right) T = h^{2/9} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) T \quad (2.9)$$

и условию (2.8). Тогда для нахождения $S(x, h)$ получаем уравнение

$$- (S')^2 + U(x) - h^{1/3} \left[\int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \ln |x - x'| (1 - \chi_-(x', \varepsilon) - \chi_+(x', \varepsilon)) \frac{k}{S'(x', h)} dx' + j_- + j_+ \right] + h^{8/9} L(x, h) = 0 \quad (2.10)$$

(уравнение для фазы). Здесь j_-, j_+ заданы формулами (2.5), $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$. Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть функции $S(x, h)$, $T(x, \tau_1, h)$, $\varphi(x, \tau_1, h)$, $L(x, h)$ удовлетворяют уравнениям (2.7)–(2.10). Тогда при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ ВКБ-приближение (2.2) является асимптотическим решением уравнения (1.1) с точностью r^* , где r^* имеет вид (2.6).

Определим $\cos$ - и $\sin$ -амплитуды

$$B(x, \tau_1, h) = T \cos(h^{1/9} \varphi), \quad I(x, \tau_1, h) = -T \sin(h^{1/9} \varphi). \quad (2.11)$$

Они позволяют записать равенство (2.2) в виде

$$g(x, y) = h^{-5/18} (B \cos(S/h) + I \sin(S/h)). \quad (2.12)$$

Оказывается, что более удобно строить асимптотические разложения для пары функций B и I , а не для T и φ . Пусть функция $S(x, h)$ удовлетворяет уравнению (2.10). Тогда, приравнявая к нулю слагаемые перед $\cos(S/h)$ и $\sin(S/h)$, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial \tau_1^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| (B^2(x, \tau'_1, h) + I^2(x, \tau'_1, h)) d\tau'_1 + L \right) B + \\ + h^{1/9} \left(2S' \frac{\partial I}{\partial x} + S'' I \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \tau_1^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| (B^2(x, \tau'_1, h) + I^2(x, \tau'_1, h)) d\tau'_1 + L \right) I - \\ - h^{1/9} \left(2S' \frac{\partial B}{\partial x} + S'' B \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Кроме того, в силу (2.8) функции B и I должны удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (B^2(x, \tau_1, h) + I^2(x, \tau_1, h)) d\tau_1 = \frac{k}{S'(x, h)}. \quad (2.15)$$

В этом случае справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть функция $S(x, h)$ является решением уравнения (2.10), а функции $B(x, \tau_1, h)$, $I(x, \tau_1, h)$ и $L(x, h)$ являются решением задачи (2.13)–(2.15) для $\cos$ - и $\sin$ -амплитуд. Тогда при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ ВКБ-приближение (2.12) удовлетворяет уравнению (1.1) с точностью r^* , где r^* имеет вид (2.6).

Рассмотрим, наконец, условия (1.2) и (1.3). Учитывая (2.2), (2.8), (2.11), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x, y) dy dx + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} \frac{(1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \chi_+(x, \varepsilon))k dx}{2S'(x, h)} + \\ + \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \chi_+(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x, y) dy dx = 1 + O \left(\int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \right. \\ \left. - \chi_+(x, \varepsilon)) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x, \tau_1, h) \cos 2\Phi(x, \tau_1, h) d\tau_1 dx \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \chi_-(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} yg^2(x, y) dy dx + \frac{h^{5/9}}{2} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \\ - \chi_+(x, \varepsilon)) \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 (B^2(x, \tau_1, h) + I^2(x, \tau_1, h)) d\tau_1 dx + \\ + \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\infty} \chi_+(x, \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} yg^2(x, y) dy dx = O \left(h^{5/9} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon/2}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon/2} (1 - \chi_-(x, \varepsilon) - \right. \\ \left. - \chi_+(x, \varepsilon)) \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 T^2(x, \tau_1, h) \cos 2\Phi(x, \tau_1, h) d\tau_1 dx \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Условие (2.16) войдет ниже в задачу, из которой определяется фаза $S(x, h)$, а равенство (2.17) устраняет неоднозначность относительно сдвигов по τ_1 при нахождении B и I .

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ $\cos$ - И $\sin$ -АМПЛИТУД

Построим асимптотическое решение задачи (2.13)–(2.15) в виде

$$B(x, \tau_1, h) = B_0(x, \tau_1) + h^{2/9} B_1(x, \tau_1) + h^{4/9} B_2(x, \tau_1) + O(h^{5/9} B_3(x, \tau_1)), \quad (3.1)$$

$$I(x, \tau_1, h) = h^{1/9} I_0(x, \tau_1) + h^{3/9} I_1(x, \tau_1) + O(h^{5/9} I_2(x, \tau_1)), \quad (3.2)$$

$$L(x, h) = \ell_0(x) + h^{2/9} \ell_1(x) + h^{4/9} \ell_2(x) + O(h^{5/9} \ell_3(x)), \quad (3.3)$$

где $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$, $\tau_1^2 \ll h^{-1/9} |S'(x, h)|$, $h \rightarrow 0$, функции B_j ($j = 0, 1, 2, 3$), I_j ($j = 0, 1, 2$), ℓ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) вещественные, гладкие, причем $B_j(x, \tau_1)$ и $I_j(x, \tau_1)$ при $\tau_1 \rightarrow \pm\infty$ экспоненциально убывают, а $\ell_3(x) = O((x - \tilde{x}_-)^{-7/6}) + O((\tilde{x}_+ - x)^{-7/6})$. Мы ограничимся здесь лишь формулировкой результатов (более подробно см. [20]).

3.1. Формулы для главного приближения B_0 , I_0 , ℓ_0 . Подставим разложения для B , I , L в (2.13), (2.15). Тогда для главного члена асимптотики $\cos$ -амплитуды получаем

$$\frac{\partial^2 B_0(x, \tau_1)}{\partial \tau_1^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| B_0^2(x, \tau'_1) d\tau'_1 + \ell_0 \right) B_0(x, \tau_1) = 0, \quad (3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_0^2(x, \tau_1) d\tau_1 = \frac{k}{S'}. \quad (3.5)$$

Наряду с (3.4), (3.5) рассмотрим не зависящую от дополнительных параметров задачу на собственные значения (одномерное уравнение полярона):

$$\frac{d^2 t(\tau)}{d\tau^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' + \rho \right) t(\tau) = 0, \quad (3.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2(\tau) d\tau = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau t^2(\tau) d\tau = 0. \quad (3.7)$$

Решения именно этой задачи определяют поведение амплитуды ВКБ-разложения.

Пусть $t = t_i(\tau)$, $\rho = \rho_i < 0$, $i = 1, 2, \dots$, – собственные функции и собственные значения задачи (3.6), (3.7). Индекс i ради краткости формул ниже опустим. Будем искать решение задачи (3.4), (3.5) в виде

$$B_0(x, \tau_1) = y(x) t(\tau), \quad (3.8)$$

где $\tau = \beta(x) \tau_1 + \varkappa(x)$. Сравнивая задачи (3.4), (3.5) и (3.6), (3.7), получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. Если $y = (k/S')^{2/3}$, $\beta = (k/S')^{1/3}$, а $\varkappa = \varkappa(x)$ — произвольная функция, то заданная формулой (3.8) функция $B_0(x, \tau_1)$ и $\ell_0 = \rho(k/S')^{2/3}$ являются решением задачи (3.4), (3.5).

Положим $\varkappa(x) \equiv 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 B_0^2(x, \tau_1) d\tau_1 = 0, \quad (3.9)$$

что позволяет обратить в нуль слагаемое порядка $h^{5/9}$ в (2.17). Кроме того, такой выбор $\varkappa(x)$ обеспечивает разрешимость задачи для следующего приближения. Таким образом, функция $B_0(x, \tau_1)$ полностью определена.

Подставим теперь разложения для B , I , L в (2.14). Тогда для главного члена асимптотики $\sin$ -амплитуды получаем уравнение

$$\hat{R}I_0 = 2S' \frac{\partial B_0}{\partial x} + S'' B_0, \quad (3.10)$$

где линейный оператор $\hat{R}$ имеет вид

$$\hat{R}I_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 I_0}{\partial \tau_1^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| B_0^2 d\tau'_1 + \ell_0 \right) I_0.$$

Определим функцию

$$\varphi_0(x, \tau_1) = \frac{S'' \tau_1^2}{6}. \quad (3.11)$$

Справедлива

ЛЕММА 3.2. Функция $I_0 = -\varphi_0 B_0$ удовлетворяет уравнению (3.10).

3.2. Формулы для поправок B_1 , ℓ_1 , I_1 , B_2 и ℓ_2 . Приравнивая к нулю слагаемые порядка $h^{2/9}$ в (2.13) и (2.15), для нахождения B_1 и ℓ_1 получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \hat{N}B_1 &= \pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| I_0^2 d\tau'_1 \right) B_0 + \ell_1 B_0 - 2S' \frac{\partial I_0}{\partial x} - S'' I_0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (I_0^2 + 2B_0 B_1) d\tau_1 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь оператор $\hat{N}$ задан формулой

$$\hat{N}B_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 B_1}{\partial \tau_1^2} - \pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| B_0^2 d\tau'_1 \right) B_1 - 2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tau_1 - \tau'_1| B_0 B_1 d\tau'_1 \right) B_0 - \ell_0 B_1.$$

Вместо B_1 мы будем искать функцию $T_1 = B_1 + \varphi_0^2 B_0/2$. Тогда справедлива

ЛЕММА 3.3. *Функции T_1 и ℓ_1 удовлетворяют задаче*

$$\widehat{N}T_1 = \left[\ell_1 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right] B_0, \quad (3.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_0 T_1 d\tau_1 = 0. \quad (3.13)$$

Перейдем к изучению задачи (3.12), (3.13). Дифференцируя по τ_1 уравнение (3.4), находим, что ядро оператора $\widehat{N}$ содержит гладкую, экспоненциально убывающую при $|\tau_1| \rightarrow \infty$ функцию $\partial B_0 / \partial \tau_1$. Предположим, что выбрано такое решение задачи (3.6), (3.7), при котором ядро оператора $\widehat{N}$ одномерно. Тогда условием разрешимости уравнения (3.12) будет условие ортогональности $\partial B_0 / \partial \tau_1$ правой части уравнения (3.12) в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\ell_1 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right] B_0 \frac{\partial B_0}{\partial \tau_1} d\tau_1 = 0. \quad (3.14)$$

Если в (3.14) вместо φ_0 подставить выражение (3.11) и проинтегрировать по частям, то условие разрешимости примет вид

$$\left[\frac{(S'')^2}{9} + \frac{S'S'''}{3} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 B_0^2 d\tau_1 = 0,$$

что выполняется в силу (3.9). Поэтому уравнение (3.12) разрешимо.

Далее, из условия (3.13) вытекает

ЛЕММА 3.4. *Функция ℓ_1 имеет вид*

$$\ell_1(x) = -\sigma \left(\frac{S'}{k} \right)^{2/3} \frac{(S'')^2 + 3S'S'''}{27},$$

где константы определены как

$$\sigma = \sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 t_i^2(\tau) d\tau > 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Дополним задачу (3.12), (3.13) условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_1 B_0 T_1 d\tau_1 = 0, \quad (3.16)$$

которое позволяет обратить в нуль слагаемое порядка $h^{7/9}$ в (2.17). Тогда задача (3.12), (3.13), (3.16) уже однозначно определяет функции $T_1(x, \tau_1)$ и $\ell_1(x)$ и справедлива

ЛЕММА 3.5. Функция T_1 представима в виде $T_1(x, \tau_1) = y_1(x)p(\tau)$, где

$$y_1(x) = \left(\frac{S'}{k}\right)^{2/3} \frac{3S'S''' + (S'')^2}{9}, \quad \tau = \beta(x)\tau_1,$$

а $p = p(\tau)$ является решением задачи

$$\hat{n}p = \left(\tau^2 - \frac{\sigma}{3}\right)t(\tau), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau t(\tau)p(\tau) d\tau = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{n}p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 p(\tau)}{d\tau^2} - \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' p(\tau) - \\ - 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t(\tau') p(\tau') d\tau' t(\tau) - \rho p(\tau). \end{aligned} \quad (3.17)$$

В заключение приведем формулы для поправок I_1, ℓ_2, B_2 .

ЛЕММА 3.6. Функция I_1 имеет вид $I_1 = y(x)\psi(x)z(\tau) - \varphi_0 T_1 + \varphi_0^3 B_0/6$, где

$$\psi(x) = 2\left(\frac{S'}{k}\right)^2 \left[S'S''S''' + \frac{4(S'')^3}{27} + \frac{(S')^2 S''''}{3} \right],$$

а $z = z(\tau)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' + \rho \right) z(\tau) = p(\tau), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2} \frac{dt(\tau)}{d\tau} + t(\tau) \right) z(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.7. Справедливо равенство $\ell_2(x) = -4(S'/k)^{2/3} y_1^2 u/3$, где

$$\begin{aligned} u = u_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2} \frac{dt_i(\tau)}{d\tau} + t_i(\tau) \right) \left\{ -\frac{\sigma_i}{3} p(\tau) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t_i(\tau') p(\tau') d\tau' p(\tau) + \right. \\ \left. + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| p^2(\tau') d\tau' t_i(\tau) + \tau^2 p(\tau) \right\} d\tau + \\ + \frac{\rho_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

ЛЕММА 3.8. *Функция B_2 представима в виде*

$$B_2 = T_2 - \frac{\varphi_0^2 T_1}{2} + \frac{\varphi_0^4 B_0}{4!} + \varphi_0 y \psi z(\tau),$$

где

$$T_2(x, \tau_1) = \frac{y_1^2 t_{2,1}(\tau)}{y} + 2S' \psi' t_{2,2}(\tau).$$

Здесь $\tau = \beta(x)\tau_1$, а $t_{2,1}(\tau)$, $t_{2,2}(\tau)$ – решения следующих задач:

$$\begin{aligned} \hat{n}t_{2,1} &= -\frac{\sigma}{3}p(\tau) - \frac{4}{3}ut(\tau) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t(\tau') p(\tau') d\tau' p(\tau) + \\ &+ \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| p^2(\tau') d\tau' t(\tau) + \tau^2 p(\tau), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tau (2t_{2,1}(\tau)t(\tau) + p^2(\tau)) d\tau &= 0; \\ \hat{n}t_{2,2} &= -z(\tau), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau t_{2,2}(\tau)t(\tau) d\tau = 0; \end{aligned} \tag{3.19}$$

оператор $\hat{n}$ определен формулой (3.17).

4. АСИМПТОТИКА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК ПОВОРОТА. МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Построим асимптотическое решение уравнения (1.1) в окрестности левой точки поворота $\tilde{x}_-$, а точнее, на интервале $|x - \tilde{x}_-| < 2\varepsilon$. Здесь $\varepsilon = ch^{26/57}$, $c > 0$ – произвольная константа, а точка $\tilde{x}_-$ удовлетворяет уравнению (2.1). Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} g &= g_-(x, y) + O\left(h^{1/6}\xi^2 \frac{\partial G_-}{\partial \xi}\right) + O\left(h^{-1/6+1/57} \ln \frac{1}{h} \frac{G_-}{(1+|\xi|)}\right) + \\ &+ O\left(h^{-1/6+1/57} \ln \frac{1}{h} \frac{\partial G_-}{\partial \xi}\right) + O\left(h^{-1/18+20/171} \xi \frac{\partial G_-}{\partial \xi}\right), \end{aligned}$$

где

$$g_-(x, y) = \frac{\Omega_-^{2/3} G_-(\xi, \eta)}{\sqrt{h}}, \tag{4.1}$$

$$\xi = \frac{(x - \tilde{x}_-)^3 \sqrt{\Omega_-}}{h^{2/3}}, \quad \eta = \frac{y \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}}. \tag{4.2}$$

Функция $G_-(\xi, \eta)$ и константа Ω_- определяются в процессе построения асимптотики. Основная трудность при выводе модельного уравнения для G_- связана с нелокальностью задачи, которая приводит к тому, что на асимптотику решения g вблизи точки $\tilde{x}_-$ влияет поведение решения вдали от этой точки.

Считая решение g при $x > \tilde{x}_- + \varepsilon$ известным, подставим в (1.1) при $|x - \tilde{x}_-| < 2\varepsilon$ вместо g функцию g_- и учтем соотношение (2.1). Далее, разложив по формуле Тейлора потенциал и отбросив остаточные члены, получаем уравнение

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 g_-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_-}{\partial y^2} \right) + \left\{ \Omega_-(x - \tilde{x}_-) - h^{1/3} \int \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(x' - \tilde{x}_-)^2} \right] g_-^2(x', y') dy' dx' \right\} g_- = 0, \quad (4.3)$$

где

$$\Omega_- \stackrel{\text{def}}{=} U'(\tilde{x}_-) + 2h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\infty} \frac{1 - \chi_-^*(x', \varepsilon)}{x' - \tilde{x}_-} \int_{-\infty}^{\infty} (g^2(x', y') - g_-^2(x', y')) dy' dx' + O(h^{4/9 + 20/171}). \quad (4.4)$$

Здесь $|x - \tilde{x}_-| < 2\varepsilon$, $\chi_-^*(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \chi((x - \tilde{x}_-)/2\varepsilon)$, где $\chi = \chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — такая неотрицательная функция, что $\chi(\xi) \equiv 1$ при $\xi < 1/2$, $\chi(\xi) \equiv 0$ при $\xi > 1$. Поправка порядка $h^{1/3}$ в (4.4) характеризует влияние решения g при $x > \tilde{x}_- + \varepsilon$ на уравнение (4.3) для нахождения g_- .

Наконец, произведя в уравнении (4.3) замены (4.1), (4.2), получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. *Функция $G_-(\xi, \eta)$, входящая в формулу (4.1), удовлетворяет модельному уравнению (1.9).*

Аналогично можно показать, что при $|x - \tilde{x}_+| < 2\varepsilon$ решение уравнения (1.1) имеет вид

$$g = g_+(x, y) + O\left(h^{1/6} \xi^2 \frac{\partial G_+}{\partial \xi}\right) + O\left(h^{-1/6 + 1/57} \ln \frac{1}{h} \frac{G_+}{(1 + |\xi|)}\right) + O\left(h^{-1/6 + 1/57} \ln \frac{1}{h} \frac{\partial G_+}{\partial \xi}\right) + O\left(h^{-1/18 + 20/171} \xi \frac{\partial G_+}{\partial \xi}\right),$$

где

$$g_+(x, y) = \frac{\Omega_+^{2/3} G_+(\xi, \eta)}{\sqrt{h}}, \quad (4.5)$$

$$\xi = \frac{(\tilde{x}_+ - x) \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \quad \eta = \frac{y \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}. \quad (4.6)$$

Здесь функция $G_+(\xi, \eta)$ является решением уравнения (1.9), а константа Ω_+ определяется как

$$\Omega_+ \stackrel{\text{def}}{=} -U'(\tilde{x}_+) + 2h^{1/3} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{1 - \chi_+^*(x', \varepsilon)}{\tilde{x}_+ - x'} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (g^2(x', y') - g_+^2(x', y')) dy' dx' + O(h^{4/9+20/171}), \quad (4.7)$$

где $\chi_+^*(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \chi((\tilde{x}_+ - x)/2\varepsilon)$, $h \rightarrow 0$.

Для завершения построения g_- , g_+ остается указать выбор решений G_- , G_+ модельного уравнения (1.9), через которые выражаются g_- , g_+ . Ниже мы запишем формулы для асимптотик функций $G_{\pm}(\xi, \eta)$ при $\xi \rightarrow +\infty$, $\eta = O(\xi^{1/6}(\ln \xi)^{2/3})$ и укажем значения входящих в них констант. Задание этих асимптотик позволяет выбрать экспоненциально убывающие при $|\eta| \rightarrow +\infty$ и $\xi \rightarrow -\infty$ решения G_- и G_+ (эйри-поляроны).

В работе [20] для решений уравнения (1.9) при $\xi \rightarrow +\infty$, $\eta = O(\xi^{1/6}(\ln \xi)^{2/3})$ были построены асимптотические разложения вида

$$G(\xi, \eta) = \tilde{T}(\xi, \eta) \cos(\tilde{S}(\xi) + \tilde{\varphi}(\xi, \eta)). \quad (4.8)$$

Асимптотика функции $\tilde{S}(\xi)$ указана в следующей лемме.

ЛЕММА 4.2. В формуле (4.8) функция $\tilde{S}(\xi)$ при $\xi \rightarrow +\infty$ представима в виде $\tilde{S}(\xi) = S_0(\xi) + O(\xi^{-2/3})$, где

$$\begin{aligned} S_0(\xi) = & \frac{2}{3}\xi^{3/2} - A_{-1}\sqrt{\xi}(2\ln \xi - 4) + 2A_0\sqrt{\xi} + 3\rho\tilde{k}^{2/3}\xi^{1/6} - \tilde{k}\pi^2 A_{-1}\ln \xi + \\ & + \delta - \frac{\sigma}{18\tilde{k}^{2/3}\xi^{1/6}} + \frac{9\sqrt{3}}{10}\frac{\pi\rho\tilde{k}^{5/3}}{\xi^{1/3}} + \frac{A_{-1}^2}{\sqrt{\xi}}[(\ln \xi)^2 + 4\ln \xi + 8] - \\ & - \left[A_0 + \frac{\tilde{k}^2\pi^2}{2}\right]\frac{A_{-1}}{\sqrt{\xi}}(2\ln \xi + 4) - \\ & - \left[\tilde{k}^2\pi^2 A_{-1} + 2A_1 - \frac{u}{243\tilde{k}^2} - A_0^2\right]\frac{1}{\sqrt{\xi}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$A_{-1} = A_{-1}(\tilde{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \frac{\tilde{k}\theta(\xi')}{2\sqrt{\xi'}} \right\} d\xi', \quad (4.10)$$

$$A_0 = A_0(\tilde{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\xi'| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \frac{\tilde{k}\theta(\xi')}{2\sqrt{\xi'}} \right\} d\xi',$$

$$\begin{aligned} A_1 = A_1(\tilde{k}) \stackrel{\text{def}}{=} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ - \int_0^{\xi'} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(z, \eta') d\eta' dz + \right. \\ & + \theta(\xi') \frac{\tilde{k}}{2} \int_0^{\xi'} \left[\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{A_{-1}\ln z}{z^{3/2}} - \frac{A_0}{z^{3/2}} - \frac{\rho\tilde{k}^{2/3}}{2z^{11/6}} \right] dz + \\ & \left. + \theta(\xi') \int_1^{\xi'} \frac{\tilde{k}^2\pi^2 A_{-1}}{2z^2} dz \right\} d\xi', \end{aligned}$$

δ – константа (сдвиг фазы), $\rho = \rho_i$, $i = 1, 2, \dots$, – собственные значения задачи (3.6), (3.7). Константы $\sigma = \sigma_i$, $u = u_i$ определяются формулами (3.15), (3.18), а функция θ – формулой (1.10).

Для однозначного задания асимптотики G достаточно указать натуральное число i , упорядочивающее решения задачи на собственные значения (3.6), (3.7), а также значение параметра $\tilde{k}$. В зависимости от того, вблизи какой из точек $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$ строится асимптотика, вместо $\tilde{k}$ будем писать $\tilde{k}_-$ или $\tilde{k}_+$. Потребуем, чтобы решения уравнения (1.9)

$G_-(\xi, \eta)$ и $G_+(\xi, \eta)$ при $\xi \rightarrow +\infty$, $\eta = O(\xi^{1/6}(\ln \xi)^{2/3})$ имели асимптотики (4.8) с тем же номером i , что и члены разложения (2.2). Кроме того, пусть для $G_-(\xi, \eta)$ и $G_+(\xi, \eta)$ параметры $\tilde{k}_-$ и $\tilde{k}_+$ равны соответственно

$$\tilde{k}_- = \frac{k}{\Omega_-^{4/3}}, \quad \tilde{k}_+ = \frac{k}{\Omega_+^{4/3}}, \quad (4.11)$$

где k – константа, входящая в разложение (2.2) (см. (2.8)), а Ω_- , Ω_+ определены формулами (4.4), (4.7).

5. ЗАДАЧА ДЛЯ ФАЗЫ

Введем функцию

$$\begin{aligned} H(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{1}{\sqrt{\xi}} + A_{-1} \frac{\ln \xi}{\xi^{3/2}} - \frac{A_0}{\xi^{3/2}} - \frac{\rho \tilde{k}^{2/3}}{2\xi^{13/6}} + \frac{\tilde{k} \pi^2 A_{-1}}{\xi^2} - \frac{\sigma}{108 \tilde{k}^{2/3} \xi^{13/6}} + \\ & + \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\pi \rho \tilde{k}^{5/3}}{\xi^{7/3}} + \frac{3}{2} (A_{-1})^2 \frac{(\ln \xi)^2}{\xi^{5/2}} - \left[3A_0 + \frac{\tilde{k}^2 \pi^2}{2} \right] A_{-1} \frac{\ln \xi}{\xi^{5/2}} - \\ & - \frac{1}{2\xi^{5/2}} \left[\tilde{k}^2 \pi^2 A_{-1} + 2A_1 - \frac{u}{243 \tilde{k}^2} - 3A_0^2 \right]. \end{aligned}$$

Тогда $1/\tilde{S}'(\xi) = H(\xi) + O(\xi^{-8/3})$, $\xi \rightarrow +\infty$, но функция $H(\xi)$ в отличие от $1/S'_0(\xi)$ не имеет особенностей при $\xi > 0$.

Определим функции

$$\begin{aligned} D_{-1}(\tilde{k}_{\pm}) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_{\pm}^2(\xi, \eta) d\eta - \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \theta(\xi - 1) H(\xi) \right) d\xi, \\ D_0(\tilde{k}_{\pm}) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\xi| \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_{\pm}^2(\xi, \eta) d\eta - \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \theta(\xi - 1) H(\xi) \right) d\xi, \\ D_1(\tilde{k}_{\pm}) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(- \int_0^{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\pm}^2(z, \eta) d\eta dz + \frac{\tilde{k}_{\pm}}{2} \theta(\xi) \int_1^{\xi} H(z) dz \right) d\xi. \end{aligned}$$

Далее подставим в равенства (2.10), (2.16), (2.1), (4.4), (4.7) вблизи точек $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$ вместо g выражения для асимптотических решений g_- , g_+ и выразим возникающие после подстановки интегралы через $H(\xi)$ и входящие в (4.9) константы. Полагая в получившихся соотношениях остаточные члены равными нулю, окончательно получаем

$$\begin{aligned} & - (S'(x, h))^2 + U(x) - \left\{ h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \ln |x - x'| \frac{k dx'}{S'(x', h)} + \right. \\ & + \Omega_- \int_{\tilde{x}_- + h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_-}}^{\tilde{x}_- + \varepsilon} \ln |x - x'| \tilde{k}_- H \left(\frac{(x' - \tilde{x}_-)^{3/2} \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}} \right) dx' + \\ & \left. + \Omega_+ \int_{\tilde{x}_+ - \varepsilon}^{\tilde{x}_+ + h^{2/3}/\sqrt[3]{\Omega_+}} \ln |x - x'| \tilde{k}_+ H \left(\frac{(\tilde{x}_+ - x')^{3/2} \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}} \right) dx' \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2h^{2/3} [\Omega_-^{2/3} D_{-1}(\tilde{k}_-) \ln |x - \tilde{x}_-| + \Omega_+^{2/3} D_{-1}(\tilde{k}_+) \ln |\tilde{x}_+ - x|] + \\
& + h^{8/9} \rho \frac{k^{2/3}}{(S'(x, h))^{2/3}} + \frac{h^{10/9} \sigma}{54k^{2/3}} \left[\frac{(U'(\tilde{x}_-))^{4/3}}{(x - \tilde{x}_-)^{2/3}} + \frac{|U'(\tilde{x}_+)|^{4/3}}{(\tilde{x}_+ - x)^{2/3}} \right] + \\
& + 2h^{4/3} \left[\frac{\sqrt[3]{\Omega_-} D_1(\tilde{k}_-)}{x - \tilde{x}_-} + \frac{\sqrt[3]{\Omega_+} D_1(\tilde{k}_+)}{\tilde{x}_+ - x} \right] - \frac{h^{4/3} u}{243k^2} \left[\frac{(U'(\tilde{x}_-))^3}{x - \tilde{x}_-} + \right. \\
& \left. + \frac{|U'(\tilde{x}_+)|^3}{\tilde{x}_+ - x} \right] = 0, \quad x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
& h^{1/3} \Omega_-^{2/3} \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e^-} \frac{\tilde{k}_-}{2} H(\xi) d\xi \right] + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{k dx}{2S'(x, h)} + \\
& + h^{1/3} \Omega_+^{2/3} \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e^+} \frac{\tilde{k}_+}{2} H(\xi) d\xi \right] = 1,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
& U(\tilde{x}_-) - 2h^{1/3} \left\{ h^{1/3} \Omega_-^{2/3} \left\{ D_0(\tilde{k}_-) + \int_1^{e^-} \frac{\tilde{k}_-}{2} (\ln |\xi|) H(\xi) d\xi + \right. \right. \\
& + \ln \left| \frac{h^{2/3}}{\sqrt[3]{\Omega_-}} \right| \cdot \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e^-} \frac{\tilde{k}_-}{2} H(\xi) d\xi \right] \left. \right\} + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{k \ln |x - \tilde{x}_-| dx}{2S'(x, h)} + \\
& + h^{1/3} \Omega_+^{2/3} \ln |\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-| \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e^+} \frac{\tilde{k}_+}{2} H(\xi) d\xi \right] \left. \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
& U(\tilde{x}_+) - 2h^{1/3} \left\{ h^{1/3} \Omega_-^{2/3} \ln |\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-| \cdot \left[D_{-1}(\tilde{k}_-) + \int_1^{e^-} \frac{\tilde{k}_-}{2} H(\xi) d\xi \right] + \right. \\
& + \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{k \ln |x - \tilde{x}_+| dx}{2S'(x, h)} + h^{1/3} \Omega_+^{2/3} \left\{ D_0(\tilde{k}_+) + \int_1^{e^+} \frac{\tilde{k}_+}{2} (\ln |\xi|) H(\xi) d\xi + \right. \\
& \left. + \ln \left| \frac{h^{2/3}}{\sqrt[3]{\Omega_+}} \right| \cdot \left[D_{-1}(\tilde{k}_+) + \int_1^{e^+} \frac{\tilde{k}_+}{2} H(\xi) d\xi \right] \right\} \left. \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_- = & U'(\tilde{x}_-) + h^{1/3} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x - \tilde{x}_-} \left[\frac{k\theta(\tilde{x}_+ - \varepsilon - x)}{S'(x, h)} - \right. \\
& \left. - \frac{\tilde{k}_- \Omega_-}{h^{1/3}} H \left(\frac{(x - \tilde{x}_-) \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}} \right) \right] dx,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_+ = & -U'(\tilde{x}_+) + h^{1/3} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} \frac{1}{\tilde{x}_+ - x} \left[\frac{k\theta(x - \tilde{x}_- + \varepsilon)}{S'(x, h)} - \right. \\
& \left. - \frac{\tilde{k}_+ \Omega_+}{h^{1/3}} H \left(\frac{(\tilde{x}_+ - x) \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}} \right) \right] dx,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

где $\varepsilon = h^{26/57}$, $\tilde{k}_-$, $\tilde{k}_+$ заданы формулами (4.11), а $e_{\pm} = \varepsilon \sqrt[3]{\Omega_{\pm}}/h^{2/3}$.

Таким образом, получена система уравнений для нахождения функции $S(x, h)$ и констант k , $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$, Ω_- , Ω_+ , т.е. задача для фазы.

6. ПРАВИЛО КВАНТОВАНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Для построения глобальной асимптотики задачи (1.1)–(1.3) остается записать правило квантования – условие, обеспечивающее гладкое сшивание асимптотического решения. В данной задаче оно имеет вид

$$S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_-}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_-\right) + \frac{1}{h} \int_{\tilde{x}_- + \varepsilon}^{\tilde{x}_+ - \varepsilon} S'(x', h) dx' + S_{0,0}\left(\frac{\varepsilon \sqrt[3]{\Omega_+}}{h^{2/3}}, \tilde{k}_+\right) = \pi n. \quad (6.1)$$

Здесь n – целые числа; функция $S'(x, h) > 0$, а также константы $k > 0$, $\tilde{x}_-$, $\tilde{x}_+$, Ω_- , Ω_+ являются решением задачи для фазы; $\varepsilon = h^{26/57}$; $\tilde{k}_-$, $\tilde{k}_+$ определены формулами (4.11), а $S_{0,0}(\xi, \tilde{k})$ – формулой

$$S_{0,0}(\xi, \tilde{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3} \xi^{3/2} - A_{-1} \sqrt{\xi} (2 \ln \xi - 4) + 2A_0 \sqrt{\xi} + 3\rho \tilde{k}^{2/3} \xi^{1/6} - \tilde{k} \pi^2 A_{-1} \ln \xi + \delta.$$

Правило (6.1), которое получено с точностью $O(h^{1/57} \ln(1/h))$, $h \rightarrow 0$, приводит к уравнению для определения $\lambda = \lambda_n(h)$.

Итак, глобальные асимптотические решения $g = g_n$ задачи (1.1)–(1.3) построены. Пусть $\lambda = \lambda_n$ подчинены правилу (6.1). Тогда при $x \in (\tilde{x}_- + \varepsilon, \tilde{x}_+ - \varepsilon)$ асимптотические решения $g_n = g_n^{\text{ВКБ}}$ задаются формулами (2.12), (3.1) и (3.2), где остаточные члены таковы, что выполнено условие (2.8). Для x вблизи точки $\tilde{x}_-$ и левее нее функции g_n определяются равенствами (4.1), (4.2), а для x вблизи точки $\tilde{x}_+$ и правее нее – равенствами (4.5), (4.6). Входящие в (4.1), (4.5) функции G_- , G_+ удовлетворяют модельному уравнению (1.9). Вблизи точек $\tilde{x}_- + \varepsilon$, $\tilde{x}_+ - \varepsilon$ асимптотики согласованы между собой. Нам остается подставить $g = g_n$ в уравнение (1.1) и оценить в норме $L^2(\mathbb{R}^2)$ возникающую при этом невязку.

Итак, справедлива основная

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть параметры h и n удовлетворяют условию (1.5). Тогда числа $\lambda = \lambda_n(h)$, заданные правилом квантования (6.1), являются асимптотическими собственными значениями задачи (1.1)–(1.3) с точностью $O(n^{-1-1/57} \ln n)$ при $n \rightarrow \infty$. Соответствующие асимптотические собственные функции $g = g_n$ удовлетворяют (1.1) с точностью $O(n^{-1-1/57} \ln n)$ в норме $L^2(\mathbb{R}^2)$, условию нормировки (1.2) с точностью $O(n^{-2/3-1/57})$, а также условию (1.3) с точностью $O(n^{-1})$. Функции g_n сосредоточены на отрезке $[\tilde{x}_-, \tilde{x}_+]$ прямой $y = 0$ с точностью до $O(n^{-\infty})$.

Благодарности. Автор благодарен М. В. Карасеву за полезное обсуждение результатов статьи.

Список литературы

- [1] *D. R. Hartree*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1928. V. 24. P. 89, 111, 426.
- [2] *С. И. Пекар*. Исследования по электронной теории кристаллов. М.: Гостехиздат, 1951.
- [3] *P. Ring, P. Schuck*. The Nuclear Many-Body Problem. Berlin: Springer, 1980.
- [4] *Г. В. Гадияк, К. А. Насыров*. Числ. мет. мех. сплош. среды (Новосибирск). 1981. Т. 12. № 5. С. 3.
- [5] *J. Kurlandski*. Bull. Acad. Polon. Sci. 1982. V. 30. № 3–4. P. 135.
- [6] *В. М. Ольхов*. ТМФ. 1982. Т. 51. № 1. С. 150.
- [7] *D. V. Chudnovsky*. Infinite component two-dimensional completely integrable systems of KdV type. In: The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Application. Proc. of a Seminar Held at IHES and Columbia Univ., 1979–1980. Lect. Notes Math. V. 925. Eds. D. Chudnovsky and G. Chudnovsky. Berlin: Springer, 1982. P. 71.
- [8] *Ю. Н. Карамзин, И. Л. Цветкова*. ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. № 1. С. 235.
- [9] *А. А. Боголюбская, И. Л. Боголюбский*. ТМФ. 1983. Т. 54. № 2. С. 258.
- [10] *D. Gogny, P. L. Lions*. Model. Math. Anal. Numer. 1986. V. 20. № 4. P. 571.
- [11] *В. П. Маслов*. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976.
- [12] *В. П. Маслов*. Уравнения самосогласованного поля. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 11. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1978. С. 153.
- [13] *В. П. Маслов*. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [14] *И. В. Сименюг*. ТМФ. 1977. Т. 30. № 3. С. 408.
- [15] *М. В. Карасев, В. П. Маслов*. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 13. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1979. С. 145.
- [16] *М. В. Карасев, А. В. Перескоков*. ТМФ. 1993. Т. 97. № 1. С. 78.
- [17] *М. В. Карасев, Ю. В. Осипов*. ТМФ. 1982. Т. 52. № 2. С. 263.
- [18] *М. В. Карасев*. Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста. Препринт ИТФ-87-157Р. Киев: ИТФ АН СССР, 1987.
- [19] *Р. Р. Габдуллин*. Маломерная аппроксимация решений уравнения полярона Пекара. Препринт. Пущино: НЦБИ АН СССР, 1991.
- [20] *М. В. Карасев, А. В. Перескоков*. Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 5. С. 33.
- [21] *М. В. Карасев, А. В. Перескоков*. Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 6. С. 57.

Поступила в редакцию 11.X.2001 г.