Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Джин Вен, Эргодичность систем частиц, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 3, 419–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 09:42:37

ЭРГОДИЧНОСТЬ СИСТЕМ ЧАСТИЦ

Исследуются эргодичность относительно сдвигов, перемешивание и связанные с этим проблемы инвариантных мер для систем взаимодействующих частиц, таких как ферромагнитные стохастические модели Изинга, процессы контактов, системы с исключением, системы избирателей с тремя возможными стохастически предвзятыми мнениями или со многими возможными мнениями и т.п. Полученные результаты дают ответы на некоторые вопросы, касающиеся этих моделей. В основе используемых методов лежит дуальность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших проблем, относящихся к системам взаимодействующих частиц, является вопрос об их эргодичности, который решается путем изучения инвариантных мер. Если рассматриваемая система инвариантна относительно некоторых сдвигов, то проблема может быть сведена к исследованию мер, инвариантных относительно этих сдвигов. Эргодичность таких инвариантных мер представляет особый интерес. В частности, если система имеет единственную инвариантную меру, то возникает вопрос, является ли она эргодической относительно сдвигов. Ответ на этот вопрос был неизвестен для систем переориентирующихся спинов (см. [1], гл. III). Он был найден Анджелом в работе [2], где также исследовались более общие вопросы, касающиеся перемешивания и эргодичности относительно сдвигов. Но для большинства детально исследованных неэргодических систем, таких как системы избирателей, процессы контактов, системы с исключением и т.п., ответов на эти вопросы найдено не было. Цель данной работы — предложить метод исследования таких проблем. Полученные результаты применимы как ко всем вышеупомянутым системам, так и к широкому классу других интересных моделей. Наши рассуждения основаны на дуальности, которая позволяет свести исследуемые проблемы к другим, относящимся к более простым системам.

Приведем точные описания моделей и формулировки проблем. Рассматриваемые нами системы взаимодействующих частиц описываются марковскими процессами с непрерывным временем и пространством состояний $E = W^{Z^d}$, где Z^d — множество ячеек, W

*Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing, China

— множество состояний частицы в каждой ячейке, которое в данной статье предполагается конечным. Каждая система определяется семейством вероятностных “скоростей” $\{c_T(\eta, d\xi), \eta \in E\}$, с которыми система переходит из одного состояния в другое. Здесь индексом T помечено конечное подмножество из Z^d , и $c_T(\eta, d\xi)$ есть положительная мера на W^T для каждого $\eta \in E$. Точное описание эволюции системы дано в гл. I книги [1]. Мы примем следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. *Каждая рассматриваемая система $\{c_T(\eta, d\xi), \eta \in E\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.6 из гл. I книги [1]. Именно, предполагается, что*

$$\sup_i \sum_{T: i \in T} |T| c_T < \infty$$

и

$$\sup_i \sum_{T: i \in T} \sum_{j \neq i} c_T(j) < \infty, \quad \sup_j \sum_i \sum_{T: i \in T} c_T(j) < \infty,$$

где

$$c_T \equiv \sup_{\eta} c_T(\eta, W^T)$$

и

$$c_T(j) \equiv \sup \{ \|c_T(\eta_1, d\xi) - c_T(\eta_2, d\xi)\|_T : \eta_1(k) = \eta_2(k) \ \forall k \neq j \},$$

а $\|\cdot\|_T$ обозначает норму полной вариации для обобщенной меры на W^T .

Важным следствием этого предположения является то, что семейство $\{c_T(\eta, d\xi), \eta \in E\}$ определяет единственный непрерывный однородный марковский процесс $\{P_\eta, \eta \in E\}$ с траекториями из пространства $\Omega = D([0, \infty), E)$ функций $[0, \infty) \mapsto E$, непрерывных справа и имеющих предел слева в каждой точке $t \in [0, \infty)$. Соответствующая марковская полугруппа обозначается символом $\mathbf{S} = \{S(t), t \geq 0\}$, а семейство $\mathbf{S}$ -инвариантных вероятностных мер — символом $m_i(E)$. Обозначим через $m_s(E)$ совокупность трансляционно-инвариантных вероятностных мер на E^1 .

Система называется эргодической, если $m_i(E) = \{\nu\}$ (одноэлементное множество) и для любого начального вероятностного распределения μ закон распределения $\mu S(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к ν в слабом смысле. Для многих интересных трансляционно-инвариантных систем единственность $\mathbf{S}$ -инвариантной меры следует из единственности трансляционно-инвариантной $\mathbf{S}$ -инвариантной меры (см., например, [1], гл. III). Поэтому необходимо исследовать различные свойства мер из множества $m_i(E) \cap m_s(E)$. Как отмечалось выше, одним из важных свойств является эргодичность относительно сдвигов.

Мера $\nu \in m_s(E)$ называется эргодической относительно сдвигов, если $\forall f, g \in C_b(E)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \int f(\theta_i \cdot) g \, d\nu = \nu(f) \nu(g),$$

¹⁾ Имеются в виду трансляции в Z^d .

где $\Lambda_n = \{i \in Z^d: -n < i_j \leq n, 1 \leq j \leq d\}$, $|\Lambda_n|$ — число элементов в Λ_n , θ_i — оператор сдвигов в Z^d . Известно, что это определение эквивалентно следующему: каждая инвариантная относительно пространственных сдвигов функция, заданная на E и измеримая, ν -почти всюду совпадает с постоянной.

Мера $\nu \in m_s(E)$ называется перемешивающей, если $\forall f, g \in C_b(E)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f(\theta_i \cdot) g d\nu = \nu(f)\nu(g),$$

где $i = (i_1, \dots, i_d) \rightarrow \infty$ означает, что $i_j \rightarrow \infty$ при $1 \leq j \leq d$. Если обозначить множество крайних мер из $m_i(E)$ символом $m_i^e(E)$ и множество крайних мер из $m_i(E) \cap m_s(E)$ символом $(m_i(E) \cap m_s(E))_e$, то вопросы, заданные в работе [2], можно сформулировать следующим образом:

1. Является ли каждая мера в $(m_i(E) \cap m_s(E))_e$ эргодической при сдвигах?
2. Является ли каждая мера в $m_i^e(E) \cap m_s(E)$ перемешивающей?

В данной работе мы даем утвердительные ответы на эти вопросы для класса систем взаимодействующих частиц, включающего следующие системы.

1. *Притягивающиеся системы переориентирующихся спинов.* Для таких систем $W = \{0, 1\}$, $c_T(\cdot, \cdot) = 0$ при $|T| \neq 1$. Если $T = \{i\}$, то $c_T(\eta, \{1 - \eta(i)\})$ обозначается символом $c(i, \eta)$ и называется скоростью переориентации спина в ячейке i (см. [1], гл. III). Система переориентирующихся спинов называется притягивающейся, если для любых двух конфигураций $\eta, \xi \in E$ с $\eta(j) \leq \xi(j) \forall j \in Z^d$ мы имеем

$$\begin{aligned} c(i, \eta) &\leq c(i, \xi), \quad \text{если } \eta(i) = \xi(i) = 0, \\ c(i, \eta) &\geq c(i, \xi), \quad \text{если } \eta(i) = \xi(i) = 1. \end{aligned}$$

Такие системы вызывают особый интерес. Большинство детально исследованных систем переориентирующихся спинов, таких как ферромагнитная стохастическая модель Изинга, система избирателей, процессы контактов и т.п., являются притягивающимися. Важным свойством этих систем является существование нижней и верхней инвариантных мер, причем обе такие меры эргодичны относительно сдвигов, а система эргодична тогда и только тогда, когда эти меры совпадают.

2. *Системы переориентирующихся спинов со скоростями переориентации спинов, определенными формулами (4.3) или (4.4) в книге [1] (гл. III, § 4):*

$$c(i, \eta) = c(i) \left\{ 1 - \eta(i) + [2\eta(i) - 1] \sum_{A \in \mathbf{Y}} p(i, A) H_1(i, \eta) \right\} \quad (1a)$$

или

$$c(i, \eta) = \frac{c(i)}{2} \left\{ 1 - [2\eta(i) - 1] \sum_{A \in \mathbf{Y}} p(i, A) H_2(i, \eta) \right\}, \quad (16)$$

где Y – множество конечных подмножеств $Z^d \cup \{\Delta\}$, Δ – произвольный элемент, не принадлежащий Z^d , $c(i) \geq 0$, $p(i, A) \geq 0$, $\sup_i c(i) < \infty$ и

$$\sup_i \sum_{A \in Y} p(i, A) \leq 1, \quad \sup_i c(i) \sum_A p(i, A) |A| < \infty.$$

H_i задаются выражениями

$$H_1(i, \eta) = \begin{cases} \prod_{i \in A \cap Z^d} [1 - \eta(i)], & \Delta \notin A, \\ - \prod_{i \in A \cap Z^d} [1 - \eta(i)], & \Delta \in A; \end{cases}$$

$$H_2(i, \eta) = \begin{cases} \prod_{i \in A \cap Z^d} [2\eta(i) - 1], & \Delta \notin A, \\ - \prod_{i \in A \cap Z^d} [2\eta(i) - 1], & \Delta \in A. \end{cases}$$

3. *Системы с исключением.* Для таких систем $W = \{0, 1\}$. Если $T = \{i, j\}$, $i \neq j$, то

$$c_T(\eta, \{(\eta(j), \eta(i))\}) = p(i, j),$$

и $c_T(\cdot, \cdot) = 0$ в остальных случаях, т.е. состояния ячеек могут только меняться местами. Числа $p(\cdot, \cdot)$ образуют матрицу переходных вероятностей некоторой марковской цепи с траекториями в Z^d . Процесс исключений называется симметричным, если $p(i, j) = p(j, i) \quad \forall i, j$.

4. *Системы избирателей с тремя возможными стохастически предвзятыми мнениями.* Для таких систем множество $W = \{1, 2, 3\}$ состоит из номеров трех мнений, одно из которых может иметь каждый избиратель, $c_T(\cdot, \cdot) = 0$, если $|T| \neq 1$, и

$$c_{\{i\}}(\eta, \{k\}) = \alpha \sum_{j \in i + \mathbf{N}} I_{\{\eta(j)=k\}} + \delta_k, \quad k = 1, 2,$$

$$c_{\{i\}}(\eta, \{3\}) = \lambda \sum_{j \in i + \mathbf{N}} I_{\{\eta(j)=3\}} + \delta_3,$$

где $0 \leq \alpha \leq \lambda$, т.е. мнение 3 предпочтительнее двух других, $\mathbf{N}$ – множество ближайших к началу отсчета ячеек, $\delta_k \geq 0$.

5. *Система избирателей со многими возможными мнениями.* В такой системе W является произвольным конечным множеством, $c_T(\cdot, \cdot) = 0$, если $|T| \neq 1$, и

$$c_{\{i\}}(\eta, \{k\}) = \delta_k + \sum_{j \in i + \mathbf{N}} I_{\{\eta(j)=k\}}, \quad k \in W.$$

Основное упрощение при исследовании таких систем состоит в том, что с каждой из них ассоциирован дуальный процесс – марковская цепь с непрерывным временем. Такие процессы просты и детально исследованы.

В разделе 2 мы доказываем общие теоремы, позволяющие с помощью дуальности установить эргодичность относительно сдвигов и перемешивание. В разделе 3 эти теоремы применяются к вышеописанным системам взаимодействующих частиц.

2. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы исследуем проблемы эргодичности в общем случае.

Пусть $E = W^{Z^d}$, где W – польское пространство, $\{P_\eta, \eta \in E\}$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и траекториями в пространстве $\Omega = D([0, \infty), E)$, $\mathbf{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ – соответствующая полугруппа. Семейства $m_i(E), m_s(E)$ определены в разделе 1. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. 1. Пусть $\nu \in (m_i(E) \cap m_s(E))_e$ и для любых ограниченных функций f и g на E

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int |S(t)(f_i g) - S(t)f_i S(t)g| d\nu = 0, \quad (2)$$

где $f_i = f(\theta_i \cdot)$. Если существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такая, что для каждой функции f из плотного подмножества в $C_b(E)$ существует измеримая функция f_0 на E , которая $\mathbf{S}$ -инвариантна относительно ν (т.е. ν -почти всюду $S(t)f_0 = f_0 \quad \forall t \geq 0$) и такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)f = f_0 \quad \nu\text{-почти всюду}, \quad (3)$$

то мера ν эргодична относительно сдвигов.

2. Пусть $\nu \in m_i^e(E) \cap m_s(E)$ и справедливо равенство (2). Если для каждой функции f из некоторого плотного подмножества в $C_b(E)$ существует последовательность $t_n \rightarrow \infty$ и измеримая функция f_0 , являющаяся $\mathbf{S}$ -инвариантной относительно ν , причем справедливо равенство (3), то мера ν является перемешивающей.

В частности, если процесс эргодичен (т.е. множество $m_i(E) = \{\nu\}$ состоит из одного элемента и для любой начальной конфигурации η вероятностное распределение $P_\eta(\omega_t \in \cdot)$ процесса в момент t сходится к ν при $t \rightarrow \infty$), то мера ν является перемешивающей.

Чтобы доказать теорему 2.1, мы воспользуемся нижеследующими утверждениями об эргодичности при пространственно-временных сдвигах и экстремальностью инвариантных мер (теорема 2.2 и леммы 2.1 и 2.2). В результате получим способ устанавливать единственность элементов в $m_i(E) \cap m_s(E)$.

ЛЕММА 2.1 ([3], лемма 5.4.24). Пусть Φ – аффинная функция, действующая из $M_s(\Omega)$ в $[0, \infty]$, ρ – вероятностная мера на $M_s(\Omega)$. Тогда

$$\Phi\left(\int Q \rho(dQ)\right) = \int \Phi(Q) \rho(dQ).$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\nu \in m_i(E) \cap m_s(E)$ и

$$P_\nu = \int P_\eta \nu(d\eta).$$

Тогда существует единственная вероятностная мера ρ на множестве $M_{s,s}^e(\Omega)$ эргодических при пространственно-временных сдвигах вероятностных мер на $\Omega = D([0, \infty), E)$ такая, что

$$P_\nu = \int Q \rho(dQ), \quad (4)$$

и ρ -почти все процессы Q являются марковскими на Ω с полугруппой $S(t)$, т.е. $Q = \int P_\eta \mu_Q(d\eta)$, где μ_Q является одновременным маргинальным распределением для Q . В частности, $\nu \in (m_i(E) \cap m_s(E))_e$ тогда и только тогда, когда мера P_ν является эргодической при пространственно-временных сдвигах. Более того, любые две различные меры в $(m_i(E) \cap m_s(E))_e$ взаимно сингулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем энтропию Донскера–Варадхана H на $M_s(\Omega)$ для марковских процессов, где $M_s(\Omega)$ – пространство стационарных вероятностных мер на Ω . Определение и свойства энтропии H изложены в книге [4]. Здесь мы используем только следующее свойство:

Энтропия H является аффинной и полунепрерывной снизу на $M_s(\Omega)$. Если Q является марковской на Ω с полугруппой $\{S(t), t \geq 0\}$, то $H(Q) = 0$.

Пусть равенство (4) – эргодичное при пространственно-временных сдвигах разложение меры P_ν (оно единственно). Тогда из приведенного выше свойства и леммы 2.1 следует, что

$$0 = H(P_\nu) = \int H(Q) \rho(dQ).$$

Используя вторую часть приведенного свойства, мы устанавливаем, что ρ -почти все Q являются марковскими на Ω с полугруппой $S(t)$. Тогда для ρ -почти всех Q имеем $\nu_Q \in m_i(E) \cap m_s(E)$ и

$$\nu = \int \nu_Q \rho(dQ).$$

Отсюда следует, что $\nu \in (m_i(E) \cap m_s(E))_e$ тогда и только тогда, когда $P_\nu \in M_{s,s}^e(\Omega)$.

Для доказательства взаимной сингулярности мер заметим, что для каждой меры $\nu \in (m_i(E) \cap m_s(E))_e$ и ограниченной измеримой функции f на E согласно известной эргодической теореме имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \int_0^n f(\theta_i \omega_t) dt = \nu(f) \quad P_\nu\text{-почти всюду и по мере } P_\nu.$$

Отсюда непосредственно следует, что $\forall f \in C_b(E)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \int_0^n S(t)f(\theta_i \cdot) dt = \nu(f) \quad \nu\text{-почти всюду.}$$

Это показывает, что любые две различные меры в $(m_i(E) \cap m_s(E))_e$ взаимно сингулярны.

ЛЕММА 2.2. Пусть мера $\nu \in (m_i(E) \cap m_s(E))_e$ удовлетворяет условиям утверждения 1 теоремы 2.1. Тогда для каждой ограниченной измеримой функции f на E существует подпоследовательность последовательности $\{t_n\}$ и измеримая функция f_0 , которая S -инвариантна относительно ν , такая, что справедливо равенство (3). Более того, если функция f инвариантна относительно пространственных сдвигов, то $f_0 = \nu(f)$ ν -почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство первого утверждения стандартно. Достаточно только аппроксимировать f функциями из $C_b(E)$ в топологии $L^2(\nu)$ и использовать сингулярность ν .

Докажем второе утверждение. Допустим, что функция f инвариантна относительно пространственных сдвигов. Тогда легко проверить, что функция f_0 тоже инвариантна относительно пространственных сдвигов. По теореме 2.2 из условия $\nu \in (m_i(E) \cap m_s(E))_e$ следует, что мера P_ν эргодична относительно пространственно-временных сдвигов. Поэтому

$$\begin{aligned} \int |f_0 - \nu(f)| d\nu &= \int \left| \frac{1}{(2n)^{dn}} \sum_{i \in \Lambda_n} \int_0^n E^{P_n} f_0((\theta_{t,i}\omega)_0) dt - \int f_0(\omega_0) dP_\nu \right| d\nu \leq \\ &\leq \int \left| \frac{1}{(2n)^{dn}} \sum_{i \in \Lambda_n} \int_0^n f_0((\theta_{t,i}\omega)_0) dt - \int f_0(\omega_0) dP_\nu \right| dP_\nu \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, где $\Lambda_n = Z^d \cap [-n, n]^d$, $\theta_{t,i}$ — оператор пространственно-временного сдвига на Ω_+ . Отсюда непосредственно следует второе утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. 1. Пусть g — неотрицательная ограниченная измеримая пространственно-инвариантная функция на E . Для произвольного $\epsilon > 0$ выберем ограниченную функцию f на E такую, что $\int |f - g| d\nu < \epsilon$. Тогда $\forall i \in Z^d$

$$\int f_i f d\nu - \epsilon(\|f\| + \|g\|) \leq \int g^2 d\nu = \int g_i g d\nu \leq \int f_i f d\nu + \epsilon(\|f\| + \|g\|). \quad (5)$$

Здесь и далее $\|g\| = \sup_{\eta \in E} |g(\eta)|$. Согласно лемме 2.2 можно выбрать последовательность $t_n \rightarrow \infty$ такую, что $S(t_n)g \rightarrow \nu(g)$ ν -почти всюду. Для каждого $n \geq 1$ имеем

$$\left| \int f_i f d\nu - [\nu(f)]^2 \right| \leq \Delta_{i,n}^1 + \Delta_{i,n}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{i,n}^1 &= \left| \int S(t_n) f_i [S(t_n) f - \nu(f)] d\nu \right|, \\ \Delta_{i,n}^2 &= \int |S(t_n)(f_i f) - S(t_n) f_i S(t_n) f| d\nu. \end{aligned}$$

Для заданного $\epsilon > 0$ в силу выбора f имеем

$$\Delta_{i,n}^1 \leq \epsilon(\|f\| + \|g\|) + \|f\| \int |S(t_n)g - \nu(g)| d\nu.$$

Поэтому существует номер n такой, что $\Delta_{i,n}^2 \leq \epsilon(2\|f\| + \|g\|) \forall i$. Фиксируя t_n и перейдя к пределу при $i \rightarrow \infty$, получим $\Delta_{i,n}^2 \rightarrow 0$. Итак,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup \left| \int f_i f d\nu - [\nu(f)]^2 \right| \leq c\epsilon$$

для некоторой постоянной $c > 0$. Из (5) следует, что

$$\left| \int g^2 d\nu - [\nu(g)]^2 \right| \leq 2\epsilon(\|f\| + \|g\|) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sup \left| \int f_i f d\nu - [\nu(f)]^2 \right|.$$

Таким образом, $\text{Var}_\nu(g) = 0$, т.е. $g = \text{const}$ ν -почти всюду. Следовательно, мера ν эргодична относительно сдвигов.

2. Пусть f – ограниченная функция на E и $g \in C_b(E)$. Выберем последовательность $t_n \rightarrow \infty$ и измеримую функцию g_0 , которая $\mathbf{S}$ -инвариантна относительно ν , такие, что $S(t_n)g \rightarrow g_0$ ν -почти всюду при $n \rightarrow \infty$. Используя экстремальность ν , нетрудно проверить, что $g_0 = \nu(g)$ ν -почти всюду. Итак, для каждого $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left| \int f_i g d\nu - \nu(f)\nu(g) \right| &\leq \int |S(t_n)(f_i g) - S(t_n)f_i S(t_n)g| d\nu + \\ &\quad + \left| \int S(t_n)f_i [S(t_n)g - \nu(g)] d\nu \right|. \end{aligned}$$

Теперь рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве утверждения 1, приводят к равенству

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i g d\nu = \nu(f)\nu(g).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для проверки условий теоремы 2.1 сначала следует убедиться в том, что для каждого $T > 0$ и каждой f из некоторого плотного подмножества в $C_b(E)$ справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |S(t+T)f(\eta) - S(t)f(\eta)| = 0 \quad \forall \eta \in E. \quad (6)$$

Затем нужно доказать, что для каждой функции f в этом плотном подмножестве из $C_b(E)$ можно найти последовательность t_n такую, что $S(t_n)f$ сходится поточечно на E . Тогда из (5) следует, что предельная функция является $\mathbf{S}$ -инвариантной, т.е. что $S(t)f = f$ всюду на $E \forall t \geq 0$. В следующем разделе будет показано, что равенство (6) справедливо для любого устойчивого марковского процесса с непрерывным временем. Используя этот факт и дуальность аналогично тому, как это будет сделано при доказательстве следствия (см. ниже), мы можем выполнить эти два шага для систем взаимодействующих частиц, описанных в разделе 1. В частности, равенство (6) справедливо для любой такой системы. Заметим, что равенство (6) представляет самостоятельный интерес.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть справедливо равенство (2) и существует дуальный марковский процесс на некотором вероятностном пространстве с пространством состояний $\hat{E}$ и полугруппой $\{\hat{S}(t), t \geq 0\}$ такой, что

1) для каждой ограниченной измеримой функции $\hat{f}$ на $\hat{E}$ и любой последовательности $t_n \rightarrow \infty$ существует подпоследовательность t_{n_k} такая, что пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{S}(t_{n_k})\hat{f} = \hat{f}_0$$

существуют и функция $\hat{f}_0$ является $\hat{S}$ -инвариантной;

2) для каждой функции f на E существует конечный набор ограниченных измеримых функций $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k$ на $E \times \hat{E}$ таких, что для каждого $\eta \in E$ существуют точки $x_1, \dots, x_k \in \hat{E}$, для которых

$$S(t)f(\eta) = \sum_{i=1}^k \hat{S}(t)\hat{f}_i(\eta, \cdot)(x_i) \quad \forall t \geq 0.$$

Тогда справедливы все утверждения теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что множество функций на E счетно. Следовательно, множество соответствующих дуальных функций, фигурирующих в условии 2 тоже счетно. Совместно с условием 1 это показывает, что выполнены условия утверждения 1 теоремы 2.1.

Теорему 2.1 можно применять и к обратимым системам.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть полугруппа $\mathbf{S}$ обратима относительно некоторой меры $\nu \in m_i(E)$ и справедливо равенство (2). Если $\nu \in (m_i(E) \cap m_s(E))_e$, то мера ν эргодична относительно сдвигов. Если $\nu \in m_i^e(E) \cap m_s(E)$, то ν — перемешивающая мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку полугруппа $\mathbf{S}$ обратима относительно ν , то для каждой функции $f \in C_b(E)$ предел

$$f_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)f$$

существует ν -почти всюду, и функция f_0 $\mathbf{S}$ -инвариантна относительно ν . Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 2.1.

3. ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАЗДЕЛА 2 К СИСТЕМАМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

В силу предположения, сформулированного в разделе 1, для рассматриваемых систем взаимодействующих частиц имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \|S(t)(f_i g) - S(t)f_i S(t)g\| = 0 \quad (7)$$

для любого $T > 0$ и для любых функций f и g на E . Поэтому равенство (2) справедливо для любой меры ν . Следовательно, остается реализовать шаги, намеченные в замечании (см. раздел 2), используя дуальность. Мы ограничимся рассмотрением одного класса систем взаимодействующих частиц, охватывающего системы, описанные в разделе 1.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть для системы взаимодействующих частиц $\{c_T(\eta, d\xi), \eta \in E\}$ справедливо равенство (7). Предположим, что

1) существует устойчивый марковский процесс с непрерывным временем $\{\hat{P}_A, A \in \hat{E}\}$ с некоторым счетным пространством состояний $\hat{E}$ и полугруппой $\hat{S} = \{\hat{S}(t), t \geq 0\}$;

2) существует ограниченная измеримая функция $H(\cdot, \cdot)$ на $E \times \hat{E}$ такая, что линейные комбинации $H(\cdot, A)$ как функции на E плотны в $C_b(E)$;

3) дуальное соотношение

$$S(t)H(\cdot, A)(\eta) = \hat{E}^A H(\eta, A_t) \exp\left\{-\int_0^t V(A_u) du\right\} \quad \forall (\eta, A) \in E \times \hat{E} \quad \text{и} \quad t \geq 0 \quad (8)$$

выполняется для некоторой неотрицательной измеримой функции V на $\hat{E}$.

Тогда каждая мера $\nu \in (m_i^e(E) \cap m_s(E))_e$ является эргодической относительно сдвигов и каждая мера $\nu \in m_i^e(E) \cap m_s(E)$ является перемешивающей. В частности,

$$(m_i^e(E) \cap m_s(E))_e = m_i(E) \cap m_s^e(E),$$

где $m_s^e(E)$ — множество мер в $m_s(E)$, эргодических относительно сдвигов.

Мы докажем эту теорему в два этапа, указанных в замечании в разделе 2, т.е. мы должны сначала проверить равенство (6). Это сводится к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathbf{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ — устойчивый марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний E . Тогда для каждой ограниченной измеримой функции f на E и любого $T > 0$ равенство (6) справедливо на E . Более того, если V — неотрицательная измеримая функция на E , то $\forall x \in E$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| E^x f(X_{t+T}) \exp\left\{-\int_0^{t+T} V(X_u) du\right\} - E^x f(X_t) \exp\left\{-\int_0^t V(X_u) du\right\} \right| = 0.$$

ЛЕММА 3.2 ([5], гл. 6, § 6, теорема 1.7). Пусть $p_n(\cdot, \cdot)$ — переходные вероятности n -го порядка некоторой марковской цепи с пространством состояний E . Положим

$$\alpha_k = \sup_x \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_{n+k}(x, \cdot) - p_n(x, \cdot)\|,$$

где $\|\cdot\|$ означает норму полной вариации для обобщенной меры на E . Тогда $\alpha_k = 0$ или 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Для любого $x \in E$ определим функцию

$$\phi(t) = S(t+T)f(x) - S(t)f(x).$$

Тогда, поскольку $\{S(nT), n \geq 0\}$ является марковской цепью на E и

$$|S((n+1)T)g(x) - S(nT)g(x)| \leq 1 - e^{Tq_x} < 1$$

для любой измеримой функции g на E с $\|g\| \leq 1$ и любого $x \in E$ с $q_x > 0$, где q_x — интенсивность скачков процесса, начинающегося в точке x , из леммы 3.2 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(nT) = 0.$$

Фиксируем произвольное $T > 0$. Поскольку функция $S(t)f(x)$ равномерно-непрерывна по t , для каждого $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|S(t_1)f(x) - S(t_2)f(x)| < \epsilon$$

при $|t_1 - t_2| < \delta$. Пусть $0 < T_1 < \delta$. Тогда $nT_1 = N_nT + \sigma_nT$ при $N_n \in \mathbb{Z}_+$ и $0 \leq \sigma_n < 1$. Поскольку $S(t)$ — марковская полугруппа на счетном пространстве E , легко проверить, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |S(nT_1 + T)f(x) - S(nT_1)f(x)| &= |S(N_nT + T + \sigma_nT)f(x) - S(N_nT + \sigma_nT)f(x)| \leq \\ &\leq e^{Tq_x} \sum_y |S((N_n + 1)T)f(y) - S(N_nT)f(y)| p(T, x, \{y\}), \end{aligned}$$

где $p(t, x, A)$ — переходные вероятности для процесса $S(t)$. Используя теорему Лебега о мажорированной сходимости, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S(nT_1 + T)f(x) - S(nT_1)f(x)| = 0. \quad (9)$$

Для большого $t > 0$ выберем номер $n \geq 1$ такой, что $nT_1 \leq t < (n+1)T_1$. Тогда

$$|S(t+T)f(x) - S(t)f(x)| \leq |S(nT_1 + T)f(x) - S(nT_1)f(x)| + 2\epsilon.$$

Комбинируя это неравенство с соотношением (9) и учитывая произвольность ϵ , получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0,$$

что доказывает первое утверждение леммы.

Чтобы доказать второе утверждение леммы, заметим, что для любого $t_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\left| E^x f(X_{t+T}) \exp \left\{ - \int_0^{t+T} V(X_u) du \right\} - E^x f(X_t) \exp \left\{ - \int_0^t V(X_u) du \right\} \right| \leqslant \Delta_T^1(t) + \Delta_T^2(t) + \Delta_T^3(t),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_T^1(t) &= \left| E^x [f(X_{t+T}) - f(X_t)] \left[\exp \left\{ - \int_0^{t+T} V(X_u) du \right\} - \exp \left\{ - \int_0^{t_0} V(X_u) du \right\} \right] \right|, \\ \Delta_T^2(t) &= \left| E^x [f(X_{t+T}) - f(X_t)] \exp \left\{ - \int_0^{t_0} V(X_u) du \right\} \right|, \\ \Delta_T^3(t) &= \left| E^x f(X_t) \left[\exp \left\{ - \int_0^{t+T} V(X_u) du \right\} - \exp \left\{ - \int_0^t V(X_u) du \right\} \right] \right|. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для любого $\epsilon > 0$ и достаточно больших $t_0 > 0$ и $t > t_0$ имеем $\Delta_T^1(t) < \epsilon$. В силу марковского свойства и первого утверждения леммы получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_T^2(t) = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} E^x \exp \left\{ - \int_0^{t_0} V(X_u) du \right\} E^{X_{t_0}} [f(X_{t-t_0+T}) - f(X_{t-t_0})] \right| = 0,$$

и, как нетрудно проверить,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_T^3(t) = 0.$$

Отсюда следует второе утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Используя лемму 3.1, легко показать, что при выполнении условий теоремы для каждой функции $f \in C_b(E)$ равенство (6) справедливо на E . Более того, если $f \in C_b(E)$ — линейная комбинация функций $H(\cdot, A_i)$ для некоторых A_i , $1 \leqslant i \leqslant k$, то

$$S(t)f(\eta) = \sum_{i=1}^k \widehat{E}^{A_i} H(\eta, A_i) \exp \left\{ - \int_0^t V(X_u) du \right\}.$$

Поскольку $\widehat{E}$ — счетное множество, используя диагональный процесс, можно найти последовательность $t_n \rightarrow \infty$ такую, что поточечный предел

$$f_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)f$$

существует для такой функции f и функция f_0 является **S**-инвариантной в силу равенства (6). Поскольку по предположению семейство всех таких линейных комбинаций плотно в $C_b(E)$, то утверждения теоремы следуют из теоремы 2.1.

Применяя полученные результаты к системам, описанным в разделе 1, приходим к следующим выводам:

1. Для систем переориентирующихся притягивающихся спинов с взаимодействием конечного радиуса, которые удовлетворяют условиям, приведенным в работе [6], справедливы утверждения теоремы 3.1. В частности, нижняя и верхняя инвариантные меры являются перемешивающими.

2. Для систем переориентирующихся спинов со скоростями переориентации, определенными формулами (1a), (1б), и для симметричных процессов исключения из гл. III и VIII книги [1] известно, что справедливы утверждения теоремы 3.1.

3. Для системы избирателей с тремя возможными стохастически предвзятыми мнениями и для систем избирателей со многими возможными мнениями из результатов работы [7] нетрудно вывести, что условия теоремы 3.1 выполнены. Следовательно, для таких систем справедливы утверждения теоремы 3.1.

4. Теорема 2.3 применима к мере Гиббса, ассоциированной с любой стохастической моделью Изинга, удовлетворяющей равенству (7), например с моделью Изинга с взаимодействием конечного радиуса (не обязательно притягивающим).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке NSF Китая.

Список литературы

- [1] *T. M. Liggett.* Interacting Particle Systems. New York: Springer, 1985.
- [2] *E. D. Andjel.* Trans. Am. Math. Soc. 1990. V. 318. P. 601–614.
- [3] *J. D. Deuschel, D. W. Stroock.* Large Deviations. Boston, MA: Academic Press, 1989.
- [4] *S. R. S. Varadhan.* Large Deviations and Applications. Philadelphia: SIAM, 1984.
- [5] *D. Revuz.* Markov Chains. Amsterdam: North-Holland, 1984.
- [6] *M. Katori.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 3191–3211.
- [7] *F. J. López, G. Sanz.* Markov Process. Related Fields. 2000. V. 6. № 3. P. 305–328.

Поступила в редакцию 24.VIII.2000 г.,
после доработки 23.VIII.2001 г.