Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Морозов, Г. Репке, А. Хелль, Кинетическая теория квантово-электродинамической плазмы в сильном электромагнитном поле. I. Ковариантный формализм, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 3, 432–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:15:14

© 2002 г.

В. Г. Морозов*, Г. Рёпке†, А. Хёлль†

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КВАНТОВО-ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. I. КОВАРИАНТНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Излагается ковариантный подход к кинетической теории квантово-электродинамической плазмы в сильном электромагнитном поле. Метод основан на релятивистском уравнении фон Неймана для неравновесного статистического оператора, определенного на пространственноподобных гиперплоскостях в пространстве Минковского. Используются каноническое квантование системы на гиперплоскостях и ковариантное обобщение кулоновской калибровки. Конденсатная мода, связанная со средним электромагнитным полем, отделяется от фотонных степеней свободы с помощью зависящего от времени унитарного преобразования динамических переменных и неравновесного статистического оператора. Это позволяет даже в присутствии сильного электромагнитного поля использовать разложения корреляционных функций и неравновесного статистического оператора по постоянной тонкой структуре. Излагается общая схема вывода кинетических уравнений в формализме гиперплоскостей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы эксперименты по взаимодействию мощных лазерных импульсов с веществом [1]–[3] возродили интерес к теории релятивистской плазмы в экстремальных условиях, создаваемых сильным электромагнитным полем. Наиболее примечательной чертой этой проблемы является то, что любой последовательный теоретический подход должен быть основан как на квантовой электродинамике, так и на идеях неравновесной статистической механики.

До сих пор основное внимание в теории неравновесной квантово-электродинамической (КЭД) плазмы уделялось кинетическим уравнениям в приближении среднего поля (типа уравнения Власова). Используя уравнения движения для полевых операторов, можно вывести явно ковариантное кинетическое уравнение для функции Вигнера, зависящей от двух временных аргументов [4]–[6]. Однако если требуется решить это

*Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет), Москва, Россия. E-mail: vmorozov@orc.ru

†Physics Department, University of Rostock, Rostock, Germany.
E-mail: gerd@darss.mpg.uni-rostock.de; hoell@darss.mpg.uni-rostock.de

кинетическое уравнение, то ковариантный формализм приводит к серьезным трудностям. Дело в том, что в этом формализме невозможно поставить начальную задачу, поскольку четырехмерное преобразование Фурье ковариантной функции Вигнера включает интегрирование корреляционных функций по относительному времени. С другой стороны, начальная задача естественным образом формулируется в так называемом *одновременном формализме*, который был предложен Бялиницки-Бирулой, Горнишким, Рафельским (БГР) [7] и успешно применен ими к изучению электрон-позитронного вакуума в присутствии внешнего поля. Хотя этот подход нарушает явную лоренц-ковариантность, он обладает рядом привлекательных черт. Одновременная функция Вигнера имеет простую физическую интерпретацию и позволяет вычислить локальные наблюдаемые, например плотность массы, плотность заряда и плотность тока. Кроме того, описание эволюции на языке одновременных величин является характерной особенностью кинетической теории, основанной на уравнении фон Неймана для статистического оператора, и дает возможность последовательно учесть требования причинности при построении интегралов столкновений. Следует, однако, отметить, что одновременная функция Вигнера не содержит полной информации о микроскопической динамике. В частности, спектральные свойства корреляционных функций можно описать только с помощью двухвременных функций Грина, которые тесно связаны с ковариантной функцией Вигнера. Недавно этот аспект релятивистской квантовой кинетической теории был изучен в рамках приближения среднего поля [8], [9]. В нерелятивистской кинетической теории двухвременные корреляционные функции в принципе можно восстановить по известной одновременной функции Вигнера путем решения интегральных уравнений, которые следуют из уравнения Дайсона для функций Грина [10]. Эта проблема в релятивистской кинетической теории пока остается нерешенной. Для ее решения требуется дальнейшее развитие как метода релятивистской матрицы плотности, так и техники релятивистских функций Грина.

Необходимо подчеркнуть, что все существующие в настоящее время подходы к теории КЭД плазмы в сильном среднем поле трудно обобщить так, чтобы включить диссипативные процессы. Фактически во всех этих подходах кинетические уравнения получаются с помощью простого расщепления уравнений движения для полевых операторов. С другой стороны, последовательный метод функций Грина для неравновесной КЭД плазмы, развитый Безеридесом и Дюбуа [11], ориентирован в основном на астрофизические системы, для которых эффекты среднего поля не так важны, как в КЭД плазме, создаваемой мощными лазерными импульсами.

В этой и последующих работах развита кинетическая теория КЭД плазмы в сильном внешнем поле, основанная на методе релятивистской матрицы плотности. С методической точки зрения наша цель состоит в обобщении одновременного формализма в двух аспектах. Во-первых, мы хотим представить его в *ковариантном виде*. Это устраняет недостаток схемы БГР [7], которая не является явно ковариантной. Во-вторых, будет сформулирован метод, позволяющий выйти за рамки приближения среднего поля, при этом в рассмотрение включены диссипативные процессы в КЭД плазме, а также взаимное влияние столкновений и эффектов среднего поля. В настоящей работе рассматрива-

ются общие вопросы, связанные с ковариантным одновременным формализмом, а следующие работы будут посвящены конкретным кинетическим уравнениям. В отличие от “обычной” квантовой электродинамики, где основной величиной является S -матрица, построенная из вакуумных средних значений полевых операторов, в кинетической теории КЭД плазмы мы имеем дело со средними по неравновесному статистическому ансамблю, описывающему систему многих частиц. Это влечет за собой необходимость использования гамильтонова формализма, который типичен для метода матрицы плотности. Здесь возникают, однако, две нетривиальные проблемы, которые обсуждаются в данной работе. Во-первых, для того чтобы теория была явно ковариантной, необходимо выполнить каноническое квантование системы ковариантным образом. Во-вторых, в присутствии сильного электромагнитного поля неприменимы разложения по постоянной тонкой структуры. Для преодоления этих трудностей будет развита ковариантная схема канонического квантования, в которой используется обобщение кулоновской калибровки, и сформулирована процедура, позволяющая разделить в любой момент времени классическую компоненту электромагнитного поля и фотонные степени свободы.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 кратко обсуждается схема релятивистской статистической механики в форме, удобной для кинетической теории. В нашем подходе используется явно ковариантное представление Шредингера для операторов на пространственноподобных гиперплоскостях в пространстве Минковского. Это позволяет ввести “одновременные” корреляционные функции по отношению к “инвариантному времени” на гиперплоскости. В разделе 3 производится каноническое квантование электродинамики на пространственноподобных гиперплоскостях и выводится квантовый ковариантный гамильтониан. Раздел 4 посвящен конденсатной моде, связанной со средним электромагнитным полем в системе. Конденсатная мода исключается зависящим от времени каноническим преобразованием статистического оператора и динамических переменных. Преобразованный статистический оператор удовлетворяет уравнению фон Неймана с эффективным гамильтонианом, в котором взаимодействие фермионов со средним полем учитывается точно, а взаимодействие фермионов и фотонов можно теперь учесть в рамках теории возмущений. Показано, как в предложенной схеме получаются уравнения Максвелла для среднего электромагнитного поля. В разделе 5 вводятся ковариантная одновременная функция Вигнера для фермионов и фотонная матрица плотности, а затем излагается метод вывода кинетических уравнений в формализме гиперплоскостей. Статья заканчивается кратким обсуждением результатов и дальнейших приложений теории.

Мы используем систему единиц, где $c = \hbar = 1$. Ненулевые компоненты метрического тензора: $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$.

2. НЕРАВНОВЕСНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ФОРМАЛИЗМЕ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ

Хорошо известно, что в специальной теории относительности квантовое состояние системы задается полным набором коммутирующих наблюдаемых на пространственноподобной поверхности в пространстве Минковского. Из таких поверхностей наиболее

просты для использования трехмерные гиперплоскости [12]–[16]. Поскольку произвольные пространственноподобные поверхности только усложняют формулы, но не дают ничего нового с физической точки зрения, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только гиперплоскостей. Любая пространственноподобная гиперплоскость $\sigma \equiv \sigma_{n,\tau}$ характеризуется единичным времениподобным вектором нормали n^μ и скалярным параметром τ , который можно интерпретировать как “инвариантное время”. Уравнение гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$ имеет вид

$$x \cdot n = \tau, \quad n^2 = n^\mu n_\mu = 1. \quad (2.1)$$

В системе отсчета, где $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, параметр τ совпадает с обычной временной переменной t . Для определенности будем называть эту специальную систему отсчета “лабораторной”; только в ней наблюдаемые измеряются в один и тот же момент времени.

Рассматривая вектор состояния $|\Psi[\sigma_{n,\tau}]\rangle$ как функционал от $\sigma_{n,\tau}$, можно вывести ковариантное уравнение Шредингера из соотношения между вектором состояния на гиперплоскости σ и вектором состояния на гиперплоскости $\sigma' = L\sigma$, которая получается в результате неоднородного преобразования Лоренца $L = \{a, \Lambda\}$:

$$\sigma \rightarrow \sigma' = L\sigma: \quad x \rightarrow x' = \Lambda x + a. \quad (2.2)$$

Соотношение между векторами состояния можно записать в виде [17]

$$U(L)|\Psi[L\sigma]\rangle = |\Psi[\sigma]\rangle, \quad (2.3)$$

где $U(L) = U(a, \Lambda)$ – унитарное представление неоднородной группы Лоренца. Генераторами этого представления $\hat{P}^\mu$ и $\hat{M}^{\mu\nu}$ являются соответственно 4-вектор энергии-импульса и четырехмерный тензор “углового” момента. Для наших целей, однако, важны лишь времениподобные трансляции, которые меняют значение τ . Вводя обозначение $|\Psi[\sigma_{n,\tau}]\rangle = |\Psi(n, \tau)\rangle$ и учитывая, что в случае чистых трансляций $U(a, 1) = e^{i\hat{P}_\mu a^\mu}$, для бесконечно малой времениподобной трансляции $a^\mu = n^\mu \delta\tau$ имеем

$$|\Psi(n, \tau + \delta\tau)\rangle + i\delta\tau(\hat{P}_\mu n^\mu)|\Psi(n, \tau)\rangle = |\Psi(n, \tau)\rangle, \quad (2.4)$$

откуда получаем релятивистское уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\Psi(n, \tau)\rangle = \hat{H}(n)|\Psi(n, \tau)\rangle. \quad (2.5)$$

Гамильтониан на гиперплоскости дается формулой

$$\hat{H}(n) = \hat{P}_\mu n^\mu. \quad (2.6)$$

В присутствии внешнего переменного поля вектор энергии-импульса и, следовательно, гамильтониан $\hat{H}^\tau(n)$ могут явно зависеть от τ .

Комбинируя (2.5) с сопряженным уравнением Шредингера для бра-вектора состояния, находим, что статистический оператор $\varrho(n, \tau)$ для смешанного квантового ансамбля удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varrho(n, \tau)}{\partial \tau} - i[\varrho(n, \tau), \hat{H}^\tau(n)] = 0, \quad (2.7)$$

которое аналогично нерелятивистскому уравнению фон Неймана.

Эволюцию смешанного ансамбля на пространственноподобных гиперплоскостях можно описывать в различных представлениях. В представлении Гайзенберга статистический оператор не зависит от τ и задается на некоторой фиксированной гиперплоскости σ_{n, τ_0} , а динамические переменные представляются операторами $\hat{O}_H([\sigma_{n, \tau}])$, которые являются функционалами на гиперплоскостях. В квантовой теории поля особенно важны локальные операторы $\hat{O}_H(x)$. В дальнейшем будет удобно рассматривать такие операторы как функции параметра τ . Чтобы определить эту зависимость, введем проектор

$$\Delta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - n^\mu n_\nu \quad (2.8)$$

и заметим, что 4-вектор x^μ можно представить как

$$x^\mu = n^\mu \tau + x_\perp^\mu, \quad \tau = n \cdot x, \quad (2.9)$$

где

$$x_\perp^\mu = \Delta^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.10)$$

— поперечная (пространственноподобная) компонента x . С геометрической точки зрения выражение (2.9) означает, что 4-вектор $x_\perp^\mu$ лежит в гиперплоскости $\sigma_{n, \tau}$, проходящей через пространственно-временную точку x . Мы видим, что любой локальный оператор $\hat{O}_H(x)$ можно рассматривать как функцию τ и $x_\perp$, т.е.

$$\hat{O}_H(x) = \hat{O}_H(n\tau + x_\perp) \equiv \hat{O}_H(\tau, x_\perp). \quad (2.11)$$

Предположим, что $\hat{P}^\mu$ не зависит явно от τ . Тогда из хорошо известного уравнения движения для операторов Гайзенбера

$$\partial_\mu \hat{O}_H(x) = -i[\hat{O}_H(x), \hat{P}_\mu] \quad (2.12)$$

сразу же следует, что времениподобная эволюция таких операторов описывается формулой

$$\hat{O}_H(\tau, x_\perp) = e^{i(\tau - \tau_0)\hat{H}(n)} \hat{O}_H(\tau_0, x_\perp) e^{-i(\tau - \tau_0)\hat{H}(n)} \quad (2.13)$$

с гамильтонианом (2.6). Обобщение (2.13) на случай, когда $\hat{H}^\tau$ явно зависит от τ , очевидно. Определяя оператор эволюции $U(\tau, \tau'; n)$ как упорядоченную по τ экспоненту

$$U(\tau, \tau'; n) = T_\tau \exp \left\{ -i \int_{\tau'}^\tau \hat{H}^{\bar{\tau}}(n) d\bar{\tau} \right\}, \quad (2.14)$$

получаем

$$\hat{O}_H(\tau, x_\perp) = U^\dagger(\tau, \tau_0; n) \hat{O}_H(\tau_0, x_\perp) U(\tau, \tau_0; n). \quad (2.15)$$

В представлении Шредингера статистический оператор $\varrho(n, \tau)$ зависит от τ , и его времениподобная эволюция описывается уравнением (2.7), а динамические переменные $\hat{O}_S$ определены на фиксированной гиперплоскости. Если представления Гайзенберга и Шредингера совпадают на гиперплоскости σ_{n, τ_0} , тогда (2.15) означает, что

$$\hat{O}_H(\tau, x_\perp) = U^\dagger(\tau, \tau_0; n) \hat{O}_S(x_\perp) U(\tau, \tau_0; n). \quad (2.16)$$

Средние значения $O(x)$ могут быть вычислены в обоих представлениях. Используя формальное решение уравнения (2.7)

$$\varrho(n, \tau) = U(\tau, \tau_0; n) \varrho(n, \tau_0) U^\dagger(\tau, \tau_0; n), \quad (2.17)$$

находим, что

$$O(x) = \langle \hat{O}_H(\tau, x_\perp) \rangle^{\tau_0} = \langle \hat{O}_S(x_\perp) \rangle^\tau. \quad (2.18)$$

Здесь и далее символом $\langle \cdot \rangle^\tau$ обозначаются средние, вычисленные со статистическим оператором $\varrho(n, \tau)$. Во многих задачах приходится иметь дело с частными производными $\partial_\mu O(x)$, которые входят в уравнения движения для локальных наблюдаемых. В формализме гиперплоскостей удобно выражать их через производные по τ и $x_\perp$. С учетом соотношений (2.9) и (2.10) запишем

$$\partial_\mu = n_\mu \frac{\partial}{\partial \tau} + \nabla_\mu, \quad \nabla_\mu = \Delta^\nu{}_\mu \partial_\nu = \Delta^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\perp^\nu}. \quad (2.19)$$

Тогда в представлении Гайзенберга из (2.18) следует уравнение движения

$$\partial_\mu O(x) = \langle \partial_\mu \hat{O}_H(\tau, x_\perp) \rangle^{\tau_0}, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{O}_H(x) &= n_\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{O}_H(\tau, x_\perp) + \nabla_\mu \hat{O}_H(\tau, x_\perp) \equiv \\ &\equiv -in_\mu [\hat{O}_H(\tau, x_\perp), \hat{H}_H(n, \tau)] + \nabla_\mu \hat{O}_H(\tau, x_\perp). \end{aligned} \quad (2.21)$$

В представлении Шредингера средние значения зависят от τ через статистический оператор, который удовлетворяет релятивистскому уравнению фон Неймана (2.7). В этом представлении уравнение движения для наблюдаемых, формально похожее на (2.20), получается из (2.18):

$$\partial_\mu O(x) = \langle \partial_\mu \hat{O}_S(x_\perp) \rangle^\tau \quad (2.22)$$

с аналогичным определением оператора ∂_μ , действующего на локальные динамические переменные:

$$\partial_\mu \hat{O}_S(x_\perp) = -in_\mu [\hat{O}_S(x_\perp), \hat{H}(n)] + \nabla_\mu \hat{O}_S(x_\perp). \quad (2.23)$$

Описывая эволюцию системы с помощью гиперплоскостей, можно ввести “одновременные” корреляционные функции динамических переменных по отношению к “инвариантному времени” τ . Пусть $\hat{O}_{1H}(x), \hat{O}_{2H}(x), \dots, \hat{O}_{kH}(x)$ – некоторые локальные операторы. Тогда “одновременная” корреляционная функция для этих операторов определяется следующим образом:

$$F_{1\dots k}(x_{1\perp}, \dots, x_{k\perp}; n, \tau) = \langle \hat{O}_{1H}(x_1) \dots \hat{O}_{kH}(x_k) \rangle^{\tau_0}, \quad (2.24)$$

где $n \cdot x_1 = n \cdot x_2 = \dots = n \cdot x_k = \tau$. В представлении Шредингера эта корреляционная функция принимает вид

$$F_{1\dots k}(x_{1\perp}, \dots, x_{k\perp}; n, \tau) = \langle \hat{O}_{1S}(x_{1\perp}) \dots \hat{O}_{kS}(x_{k\perp}) \rangle^{\tau}. \quad (2.25)$$

Из релятивистского уравнения фон Неймана (2.7) следуют уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F_{1\dots k}(x_{1\perp}, \dots, x_{k\perp}; n, \tau) = -i \langle [\hat{O}_{1S}(x_{1\perp}) \dots \hat{O}_{kS}(x_{k\perp}), \hat{H}^{\tau}(n)] \rangle^{\tau}, \quad (2.26)$$

которые можно преобразовать в цепочку уравнений для “одновременных” корреляционных функций по аналогии с хорошо известной цепочкой уравнений в нерелятивистской квантовой статистической механике (см., например, [18]).

3. ГАМИЛЬТониан КЭД ПЛАЗМЫ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Применим теперь изложенную выше схему к релятивистской системе заряженных фермионов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля. Для определенности будем считать эти фермионы электронами и позитронами, так что тяжелые частицы будут рассматриваться как заряженный фон, обеспечивающий электронейтральность системы. Имея в виду приложения теории к релятивистской плазме, создаваемой мощными лазерными импульсами, предположим, что система находится в заданном внешнем электромагнитном поле, которое не обязательно является слабым.

Первым шагом к формулировке кинетической теории КЭД плазмы является построение гамильтониана $\hat{H}(n)$. Начнем с классической плотности лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_D(x) + \mathcal{L}_{EM}(x) + \mathcal{L}_{int}(x) + \mathcal{L}_{ext}(x), \quad (3.1)$$

где $\mathcal{L}_D(x)$ и $\mathcal{L}_{EM}(x)$ – плотности лагранжианов для поля Дирака и электромагнитного поля, $\mathcal{L}_{int}(x)$ – плотность лагранжиана взаимодействия, а член $\mathcal{L}_{ext}(x)$ описывает взаимодействие фермионов с внешним электромагнитным полем. В стандартных обозначениях (см., например, [19]) имеем

$$\mathcal{L}_D(x) = \bar{\psi}(x) \left(\frac{i}{2} \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} - m \right) \psi(x), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_{EM}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -j_\mu(x)A^\mu(x), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(x) = -j_\mu(x)A_{\text{ext}}^\mu(x), \quad (3.5)$$

где $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$. Тензор электромагнитного поля берется в виде $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а 4-вектор плотности тока записывается как $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, где $e < 0$. Отметим, что в нашем подходе 4-потенциал электромагнитного поля есть сумма двух 4-векторов. Переменные $A^\mu(x)$ соответствуют электромагнитному полю, создаваемому зарядами и токами в системе (поляризационное поле), в то время как $A_{\text{ext}}^\mu(x)$ – заданное внешнее поле. Таким образом, будет квантоваться только динамическое поле $A^\mu(x)$.

Процедура канонического квантования предполагает, что на переменные A^μ наложено некоторое дополнительное условие, фиксирующее калибровку. Для многочастичных систем, изучаемых в статистической механике, наиболее естественной является кулоновская калибровка. К сожалению, эта калибровка не является лоренц-инвариантной. Поэтому мы обобщим условие кулоновской калибровки так, чтобы оно было согласовано с ковариантным описанием эволюции на пространственноподобных гиперплоскостях. С этой целью введем для любого 4-вектора V^μ разложение на поперечную и продольную части:

$$V^\mu = n^\mu V_\parallel + V_\perp^\mu, \quad V_\parallel = n_\nu V^\nu, \quad V_\perp^\mu = \Delta^\mu{}_\nu V^\nu, \quad (3.6)$$

где $\Delta^\mu{}_\nu$ – поперечный проектор (2.8). Тогда естественным обобщением условия кулоновской калибровки будет

$$\nabla_\mu A_\perp^\mu = 0. \quad (3.7)$$

В “лабораторной” системе отсчета, где $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ и $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, имеем $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, что является обычным условием кулоновской калибровки.

Чтобы определить канонические переменные для электромагнитного поля на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$, выполним разложение (3.6) полевых переменных A^μ и разложение (2.19) производных в уравнениях Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} = 0. \quad (3.8)$$

Простые алгебраические преобразования показывают, что эти уравнения эквивалентны системе уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\parallel} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\parallel} \right) - \nabla_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\nu A_\parallel)} = 0, \quad (3.9)$$

$$\Delta^{\mu\nu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\perp^\nu} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\perp^\nu} \right) - \nabla_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\lambda A_\perp^\nu)} \right] = 0, \quad (3.10)$$

где использовано обозначение $\dot{f} \equiv \partial f / \partial \tau$ для производных по τ . Покажем теперь, что уравнение (3.9) позволяет исключить переменную $A_\parallel$ в лагранжиане. Сначала перепишем выражения (3.3) и (3.4) в терминах $A_\parallel$ и $A_\perp^\mu$, используя приведенные выше разложения для производных ∂_μ и полей A^μ на продольные и поперечные части. В результате получаем плотность лагранжиана в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\perp\mu\nu} F_{\perp}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\nabla^\mu A_\parallel - \dot{A}_\perp^\mu) (\nabla_\mu A_\parallel - \dot{A}_{\perp\mu}) - j_\parallel A_\parallel - j_{\perp\mu} A_\perp^\mu + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\text{ext}}, \quad (3.11)$$

где

$$F_{\perp}^{\mu\nu} = \nabla^{\mu} A_{\perp}^{\nu} - \nabla^{\nu} A_{\perp}^{\mu}. \quad (3.12)$$

Отметим, что два последних члена в (3.11) не содержат $A_{\parallel}$ и $A_{\perp}^{\mu}$. Используя выражение (3.11) для вычисления производных в (3.9) и учитывая, что $\nabla_{\mu} \dot{A}_{\perp}^{\mu} = 0$ в силу калибровочного условия (3.7), получим

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} A_{\parallel} = j_{\parallel}. \quad (3.13)$$

В “лабораторной” системе отсчета это уравнение сводится к уравнению Пуассона $\nabla^2 A^0 = -j^0$. Решением уравнения (3.13) является

$$A_{\parallel}(\tau, x_{\perp}) = \int_{\sigma_n} d\sigma' G(x_{\perp} - x'_{\perp}) j_{\parallel}(\tau, x'_{\perp}). \quad (3.14)$$

Функция Грина $G(x_{\perp})$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} G(x_{\perp}) = \delta^3(x_{\perp}), \quad (3.15)$$

где

$$\delta^3(x_{\perp}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} \delta(p \cdot n) \quad (3.16)$$

– трехмерная δ -функция на гиперплоскости σ_n .

Легко проверить, что решение уравнения (3.15) для $G(x_{\perp})$ имеет вид

$$G(x_{\perp}) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} \delta(p \cdot n) \frac{1}{p_{\perp}^2}. \quad (3.17)$$

Теперь переменную $A_{\parallel}$ можно исключить из выражения для плотности лагранжиана (3.11) с помощью (3.14). Члены типа $\nabla_{\nu}(\dots)$ можно опустить, поскольку они не дают вклада в лагранжиан $L = \int \mathcal{L} d\sigma$ при выборе подходящих граничных условий. Тогда простые преобразования дают

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\perp\mu\nu} F_{\perp}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \dot{A}_{\perp\mu} \dot{A}_{\perp}^{\mu} - j_{\perp\mu} A_{\perp}^{\mu} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\text{ext}} - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\sigma_n} d\sigma' j_{\parallel}(\tau, x_{\perp}) G(x_{\perp} - x'_{\perp}) j_{\parallel}(\tau, x'_{\perp}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Мы будем рассматривать поля $A_{\perp}^{\mu}$ как динамические переменные для электромагнитного поля и воспользуемся дираковской версией канонического квантования полевых теорий со связями [20], [21]. В нашем случае условие (3.7) является одним из уравнений связи. Другое уравнение связи следует непосредственно из определения (3.6) поперечных компонент 4-векторов:

$$n_{\mu} A_{\perp}^{\mu}(x) = 0. \quad (3.19)$$

Введем теперь переменные $\Pi_{\perp\mu}$, сопряженные полевым переменным $A_{\perp}^{\mu}$:

$$\Pi_{\perp\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\perp}^{\mu}} = -\dot{A}_{\perp\mu}. \quad (3.20)$$

Очевидно, что $\Pi_{\perp\mu}$ не являются независимыми переменными, так как они удовлетворяют уравнениям связи $\nabla_{\mu} \Pi_{\perp}^{\mu} = 0$ и $n_{\mu} \Pi_{\perp}^{\mu} = 0$.

Итак, мы имеем четыре уравнения связи для канонически-сопряженных переменных $A_{\perp}^{\mu}$ и $\Pi_{\perp}^{\mu}$. Теперь, следуя стандартной схеме квантования [21], можно вывести коммутационные соотношения для операторов поля $\hat{A}_{\perp}^{\mu}$ и $\hat{\Pi}_{\perp}^{\mu}$ (см. приложение):

$$[\hat{A}_{\perp}^{\mu}(\tau, x_{\perp}), \hat{\Pi}_{\perp}^{\nu}(\tau, x'_{\perp})] = i c^{\mu\nu}(x_{\perp} - x'_{\perp}), \quad (3.21)$$

$$[\hat{A}_{\perp}^{\mu}(\tau, x_{\perp}), \hat{A}_{\perp}^{\nu}(\tau, x'_{\perp})] = [\hat{\Pi}_{\perp}^{\mu}(\tau, x_{\perp}), \hat{\Pi}_{\perp}^{\nu}(\tau, x'_{\perp})] = 0, \quad (3.22)$$

где

$$c^{\mu\nu}(x_{\perp} - x'_{\perp}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x - x')} \delta(p \cdot n) \left[\Delta^{\mu\nu} - \frac{p_{\perp}^{\mu} p_{\perp}^{\nu}}{p_{\perp}^2} \right]. \quad (3.23)$$

В приложении выведены также антикоммутационные соотношения для операторов поля Дирака на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$. Они даются формулами

$$\{\hat{\psi}_a(\tau, x_{\perp}), \hat{\bar{\psi}}_{a'}(\tau, x'_{\perp})\} = [\gamma_{\parallel}(n)]_{aa'} \delta^3(x_{\perp} - x'_{\perp}), \quad (3.24)$$

$$\{\hat{\psi}_a(\tau, x_{\perp}), \hat{\psi}_{a'}(\tau, x'_{\perp})\} = \{\hat{\bar{\psi}}_a(\tau, x_{\perp}), \hat{\bar{\psi}}_{a'}(\tau, x'_{\perp})\} = 0, \quad (3.25)$$

где a, a' — спинорные индексы. Матрица $\gamma_{\parallel}(n)$ вводится через следующее разложение матриц Дирака γ^{μ} :

$$\gamma^{\mu} = n^{\mu} \gamma_{\parallel}(n) + \gamma_{\perp}^{\mu}(n), \quad \gamma_{\parallel}(n) = n_{\nu} \gamma^{\nu}, \quad \gamma_{\perp}^{\mu}(n) = (\delta^{\mu}_{\perp} - n^{\mu} n_{\perp}) \gamma^{\nu}. \quad (3.26)$$

В “лабораторной” системе отсчета имеем $x^{\mu} = (t, \mathbf{r})$ и $n^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, поэтому $\gamma_{\parallel} = \gamma^0$ и $\delta^3(x_{\perp} - x'_{\perp}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Тогда формула (3.24) сводится к хорошо известному антикоммутационному соотношению для квантованного поля Дирака.

Классический гамильтониан на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$ можно вывести двумя способами. Первый способ позволяет получить гамильтониан $H^{\tau}(n)$ с помощью преобразования Лежандра:

$$H^{\tau}(n) = \int_{\sigma_{n,\tau}} d\sigma \{ \Pi_{\perp\mu} \dot{A}_{\perp}^{\mu} + \bar{\pi} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} \pi - \mathcal{L} \}, \quad (3.27)$$

где $\mathcal{L}$ имеет вид (3.18). Явные выражения для переменных π и $\bar{\pi}$, сопряженных полям ψ и $\bar{\psi}$, легко найти, используя разложение (2.19) для производных в плотности лагранжиана Дирака (3.2). Записав $\mathcal{L}_D$ в виде

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \left(\gamma_{\parallel} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \tau}} + \gamma_{\perp}^{\mu} \overleftrightarrow{\nabla}_{\mu} \right) - m \right] \psi, \quad (3.28)$$

находим, что

$$\bar{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_{\parallel}, \quad \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2} \gamma_{\parallel} \psi. \quad (3.29)$$

Подставляя выражения (3.28) и (3.29) в (3.27), приходим к классическому гамильтониану.

При использовании другого способа исходным является классический аналог выражения (2.6)

$$H^{\tau}(n) = P_{\mu} n^{\mu} \equiv \int_{\sigma_{n,\tau}} d\sigma n^{\mu} T_{\mu\nu} n^{\nu}, \quad (3.30)$$

где $T_{\mu\nu}(x)$ – тензор энергии-импульса. Чтобы квантовый гамильтониан был эрмитовым оператором, тензор энергии-импульса должен быть действительным. Например, можно использовать так называемый тензор Белинфанте [22]. Стандартный способ вывода тензора Белинфанте (см., например, [19]), примененный к лагранжиану (3.1), дает

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) = & -g_{\mu\nu} \left\{ \bar{\psi} \left(\frac{i}{2} \gamma^{\lambda} \overleftrightarrow{\partial}_{\lambda} - m \right) \psi - j_{\lambda} (A^{\lambda} + A_{\text{ext}}^{\lambda}) - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right\} + \\ & + F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} + \frac{i}{4} \bar{\psi} (\gamma_{\nu} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} + \gamma_{\mu} \overleftrightarrow{\partial}_{\nu}) \psi - \frac{1}{2} (j_{\nu} A_{\mu} + j_{\mu} A_{\nu}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Отделяя продольные и поперечные компоненты производных ∂_{μ} и переменных электромагнитного поля, а затем исключая производные по τ с помощью соотношений (3.20) и (3.29), классический гамильтониан на гиперплоскости можно найти из (3.30). Легко проверить, что в обоих случаях мы приходим к одному и тому же гамильтониану $H^{\tau}(n)$.

Опуская простые преобразования, выпишем окончательное выражение для $\hat{H}^{\tau}(n)$, которое получается после замены канонических переменных $A_{\perp}^{\mu}$, $\Pi_{\perp}^{\mu}$, ψ , $\bar{\psi}$ квантовыми операторами:

$$\hat{H}^{\tau}(n) = \hat{H}_D(n) + \hat{H}_{\text{EM}}(n) + \hat{H}_{\text{int}}(n) + \hat{H}_{\text{ext}}^{\tau}(n). \quad (3.32)$$

Здесь $\hat{H}_D(n)$ и $\hat{H}_{\text{EM}}(n)$ – гамильтонианы свободных фермионов и электромагнитного поля, $\hat{H}_{\text{int}}(n)$ – оператор взаимодействия, оператор $\hat{H}_{\text{ext}}^{\tau}(n)$ описывает эффекты внешнего поля. В представлении Шредингера эти операторы имеют вид

$$\hat{H}_D(n) = \int_{\sigma_n} d\sigma \hat{\bar{\psi}} \left(-\frac{i}{2} \gamma_{\perp}^{\mu}(n) \overleftrightarrow{\nabla}_{\mu} + m \right) \hat{\psi}, \quad (3.33)$$

$$\hat{H}_{\text{EM}}(n) = \int_{\sigma_n} d\sigma \left(\frac{1}{4} \hat{F}_{\perp\mu\nu} \hat{F}_{\perp}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{\Pi}_{\perp\mu} \hat{\Pi}_{\perp}^{\mu} \right), \quad (3.34)$$

$$\hat{H}_{\text{int}}(n) = \int_{\sigma_n} d\sigma \hat{j}_{\perp\mu} \hat{A}_{\perp}^{\mu} + \frac{1}{2} \int_{\sigma_n} d\sigma \int_{\sigma_n} d\sigma' \hat{j}_{\parallel}(x_{\perp}) G(x_{\perp} - x'_{\perp}) \hat{j}_{\parallel}(x'_{\perp}), \quad (3.35)$$

$$\hat{H}_{\text{ext}}^{\tau}(n) = \int_{\sigma_n} d\sigma \hat{j}_{\mu}(x_{\perp}) A_{\text{ext}}^{\mu}(\tau, x_{\perp}). \quad (3.36)$$

В гамильтониане электромагнитного поля (3.34) тензорный оператор

$$\hat{F}_{\perp}^{\mu\nu} = \nabla^{\mu} \hat{A}_{\perp}^{\nu} - \nabla^{\nu} \hat{A}_{\perp}^{\mu} \quad (3.37)$$

содержит только поперечные компоненты полевых операторов $\hat{A}^\mu$, которые определяются разложением

$$\hat{A}^\mu = n^\mu \hat{A}_\parallel + \hat{A}_\perp^\mu. \quad (3.38)$$

Продольная компонента $\hat{A}_\parallel$ исключена в операторе взаимодействия (3.35) с помощью уравнения

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \hat{A}_\parallel = \hat{j}_\parallel, \quad (3.39)$$

которое решается совершенно аналогично уравнению (3.13). Как обычно, в выражениях (3.33)–(3.36) предполагается нормальное упорядочение для всех операторов. Вклад самодействия в гамильтониане (3.35) должен быть опущен, поэтому произведение $\hat{j}_\parallel(x_\perp) \hat{j}_\parallel(x'_\perp)$ интерпретируется как $:\hat{j}_\parallel(x_\perp) : :\hat{j}_\parallel(x'_\perp) :$. Приведенный выше гамильтониан КЭД плазмы соответствует случаю, когда подсистема фермионов описывается одним полем Дирака, но обобщение на многокомпонентные системы очевидно.

4. КОНДЕНСАТНАЯ МОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Важной особенностью КЭД плазмы в сильном внешнем поле является то, что средние значения операторов электромагнитного поля¹⁾ $A_\perp^\mu = \langle \hat{A}_\perp^\mu \rangle$ и $\Pi_\perp^\mu = \langle \hat{\Pi}_\perp^\mu \rangle$ отличны от нуля. То же самое относится и к средним значениям бозе-операторов рождения и уничтожения $\hat{a}_\mathbf{k}$ и $\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger$, которые связаны с операторами поля разложениями по плоским волнам. Более того, $A_\perp^\mu$ и $\Pi_\perp^\mu$ являются *макроскопическими величинами*; они соответствуют среднему электромагнитному полю, обусловленному эффектами поляризации в системе. На языке статистической механики это означает, что неравновесное состояние КЭД плазмы *вырождено*, а переменные $A_\perp^\mu(x)$, $\Pi_\perp^\mu(x)$ описывают *конденсатную моду* электромагнитного поля. Это обстоятельство не позволяет применять теорию возмущений по постоянной тонкой структуры непосредственно к гамильтониану (3.32), так как взаимодействие фермионов с конденсатной модой, или, что то же самое, со средним электромагнитным полем, не является слабым.

Другими словами, задача состоит в том, чтобы разделить конденсатную моду и фотонные степени свободы в любой момент времени. Как мы увидим, это можно сделать с помощью зависящего от τ унитарного преобразования статистического оператора

$$\tilde{\rho}(n, \tau) = e^{i\hat{C}(n, \tau)} \rho(n, \tau) e^{-i\hat{C}(n, \tau)}, \quad (4.1)$$

где эрмитов оператор $\hat{C}(n, \tau)$ имеет вид

$$\hat{C}(n, \tau) = \int_{\sigma_n} d\sigma \{ A_\perp^\mu(x) \hat{\Pi}_{\perp\mu}(x_\perp) - \Pi_{\perp\mu}(x) \hat{A}_\perp^\mu(x_\perp) \}. \quad (4.2)$$

Очевидно, что унитарное преобразование (4.1) не затрагивает фермионные операторы. Правила преобразования операторов электромагнитного поля легко найти с помощью

¹⁾Здесь и далее символами $A_\perp^\mu$, $\Pi_\perp^\mu$, j^μ и т.д. обозначаются средние значения соответствующих операторов.

коммутационных соотношений (3.21) и (3.22):

$$\begin{aligned} e^{i\hat{C}(n,\tau)} \hat{A}_\perp^\mu(x_\perp) e^{-i\hat{C}(n,\tau)} &= \hat{A}_\perp^\mu(x_\perp) + A_\perp^\mu(x), \\ e^{i\hat{C}(n,\tau)} \hat{\Pi}_\perp^\mu(x_\perp) e^{-i\hat{C}(n,\tau)} &= \hat{\Pi}_\perp^\mu(x_\perp) + \Pi_\perp^\mu(x). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Заметим теперь, что для любого оператора $\hat{O}$

$$\langle \hat{O} \rangle^\tau = \text{Tr}\{e^{i\hat{C}(n,\tau)} \hat{O} e^{-i\hat{C}(n,\tau)} \tilde{\rho}(n, \tau)\} \equiv \langle e^{i\hat{C}(n,\tau)} \hat{O} e^{-i\hat{C}(n,\tau)} \rangle_\sim^\tau, \quad (4.4)$$

где символ $\langle \cdot \rangle_\sim^\tau$ означает среднее значение, вычисленное со статистическим оператором $\tilde{\rho}(n, \tau)$. С учетом соотношений (4.3) получаем

$$\langle \hat{A}_\perp^\mu(x_\perp) \rangle_\sim^\tau = \langle \hat{\Pi}_\perp^\mu(x_\perp) \rangle_\sim^\tau = 0. \quad (4.5)$$

Итак, в состоянии, которое описывается преобразованным статистическим оператором (4.1), динамические переменные $\hat{A}_\perp^\mu$ и $\hat{\Pi}_\perp^\mu$ имеют нулевые средние значения и, следовательно, они не связаны с конденсатной модой. Иначе говоря, после унитарного преобразования операторы электромагнитного поля соответствуют фотонным степеням свободы.

На основании приведенных выше аргументов удобно использовать $\tilde{\rho}(n, \tau)$ в качестве статистического оператора системы. Следует отметить, однако, что оператор $\tilde{\rho}(n, \tau)$ не удовлетворяет уравнению фон Неймана (2.7), поскольку оператор $\hat{C}$ в выражении (4.1) зависит от τ . Чтобы вывести уравнение эволюции для $\tilde{\rho}(n, \tau)$, продифференцируем соотношение (4.1) по τ . После простых преобразований приходим к модифицированному уравнению фон Неймана

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(n, \tau)}{\partial \tau} - i[\tilde{\rho}(n, \tau), \hat{\mathcal{H}}^\tau(n)] = 0 \quad (4.6)$$

с эффективным гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^\tau(n) &= e^{i\hat{C}(n,\tau)} \hat{H}^\tau(n) e^{-i\hat{C}(n,\tau)} + \\ &+ \int_{\sigma_n} d\sigma \left\{ \frac{\partial \Pi_{\perp\mu}(x)}{\partial \tau} \hat{A}_\perp^\mu(x_\perp) - \frac{\partial A_\perp^\mu(x)}{\partial \tau} \hat{\Pi}_{\perp\mu}(x_\perp) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Преобразование $\hat{H}^\tau(n)$ в первом слагаемом в правой части (4.7) является тривиальным благодаря соотношениям (4.3) и тому обстоятельству, что унитарное преобразование не затрагивает фермионные операторы. Во втором слагаемом удобно исключить производные по τ , используя уравнения для конденсатной моды

$$\frac{\partial A_\perp^\mu(x)}{\partial \tau} = -\Pi_\perp^\mu(x), \quad \frac{\partial \Pi_\perp^\mu(x)}{\partial \tau} = \nabla_\lambda F_\perp^{\lambda\mu}(x) - j_\perp^\mu(x), \quad (4.8)$$

которые легко выводятся с помощью формул (2.22), (2.23) и канонических коммутиационных соотношений (3.21). Тензор $F_\perp^{\mu\nu}$ есть среднее значение оператора (3.37), а $j_\perp^\mu(x)$ — поперечная компонента среднего поляризационного тока

$$j^\mu(x) = \langle \hat{j}^\mu(x_\perp) \rangle^\tau. \quad (4.9)$$

Подставляя производные (4.8) в (4.7), можно записать эффективный гамильтониан в виде суммы

$$\hat{\mathcal{H}}^\tau(n) = \hat{\mathcal{H}}_0^\tau(n) + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^\tau(n). \quad (4.10)$$

Главный член

$$\hat{\mathcal{H}}_0^\tau(n) = \hat{H}_{\text{EM}} + \hat{H}_{\text{D}}(n) + \int_{\sigma_n} d\sigma \hat{j}_\mu(x_\perp) \mathcal{A}^\mu(x) \quad (4.11)$$

описывает свободные фотоны и фермионы, взаимодействующие с полным электромагнитным полем

$$\mathcal{A}^\mu(x) = A_{\text{ext}}^\mu(x) + A^\mu(x), \quad (4.12)$$

где второе слагаемое представляет собой вклад эффектов поляризации в среднее электромагнитное поле:

$$A^\mu(x) = n^\mu \langle \hat{A}_\parallel(x_\perp) \rangle^\tau + \langle \hat{A}_\perp^\mu(x_\perp) \rangle^\tau. \quad (4.13)$$

Новый гамильтониан взаимодействия в (4.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^\tau(n) = & \int_{\sigma_n} d\sigma \Delta \hat{j}_\perp^\mu(x_\perp; \tau) \hat{A}_\perp^\mu(x_\perp) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\sigma_n} d\sigma \int_{\sigma_n} d\sigma' \Delta \hat{j}_\parallel(x_\perp; \tau) G(x_\perp - x'_\perp) \Delta \hat{j}_\parallel(x'_\perp; \tau), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где операторы

$$\Delta \hat{j}^\mu(x_\perp; \tau) = \hat{j}^\mu(x_\perp) - j^\mu(\tau, x_\perp) \quad (4.15)$$

соответствуют квантовым флуктуациям фермионного тока. Важно отметить, что теперь гамильтониан взаимодействия (4.14) не содержит вклада от конденсатной моды и, следовательно, можно использовать разложения по постоянной тонкой структуры.

Заканчивая обсуждение конденсатной моды, покажем, как в нашем подходе выводятся уравнения Максвелла для среднего электромагнитного поля. Согласно (4.12) полный тензор поля можно записать в виде

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu(x) - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu(x) = F_{\text{ext}}^{\mu\nu}(x) + F^{\mu\nu}(x). \quad (4.16)$$

Предполагается, что тензор внешнего поля $F_{\text{ext}}^{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu F_{\text{ext}}^{\mu\nu}(x) = j_{\text{ext}}^\nu(x) \quad (4.17)$$

с некоторой заданной плотностью внешнего тока j_{ext}^ν . С другой стороны, тензор поляризованного поля $F^{\mu\nu}(x)$ есть среднее значение оператора

$$\hat{F}^{\mu\nu}(x_\perp) = \partial^\mu \hat{A}^\nu - \partial^\nu \hat{A}^\mu = \hat{F}_\perp^{\mu\nu} + n^\nu (\hat{\Pi}_\perp^\mu + \nabla^\mu \hat{A}_\parallel) - n^\mu (\hat{\Pi}_\perp^\nu + \nabla^\nu \hat{A}_\parallel). \quad (4.18)$$

Здесь оператор $\hat{A}_\parallel$ можно исключить с помощью уравнения (3.39). Затем, вспоминая уравнения движения (2.22), (2.23) и используя коммутационные соотношения для операторов поля Дирака и электромагнитного поля, которые обсуждались в предыдущем разделе, легко убедиться, что

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x). \quad (4.19)$$

Теперь (4.17) и (4.19) можно объединить в уравнения Максвелла для тензора полного электромагнитного поля:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) + j_{\text{ext}}^\nu(x). \quad (4.20)$$

Решая эти уравнения, получим 4-потенциал $\mathcal{A}^\mu$, выраженный через плотность полного среднего тока.

5. КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КЭД ПЛАЗМЫ

В рамках формализма гиперплоскостей естественно описывать кинетические процессы в подсистеме фермионов с помощью “одновременной” функции Вигнера, зависящей от переменной τ . Поскольку существует свобода в выборе калибровки для $\mathcal{A}^\mu$, введем калибровочно-инвариантную функцию Вигнера на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$. Она является матрицей в спинорном пространстве и определяется соотношением

$$W_{aa'}(x_\perp, p_\perp; \tau) = \int d^4y \, e^{ip \cdot y} \delta(y \cdot n) \times \\ \times \exp \left\{ ie\Lambda \left(x_\perp + \frac{1}{2}y_\perp, x_\perp - \frac{1}{2}y_\perp; \tau \right) \right\} N_{aa'} \left(x_\perp + \frac{1}{2}y_\perp, x_\perp - \frac{1}{2}y_\perp; \tau \right), \quad (5.1)$$

где

$$\Lambda(x_\perp, x'_\perp; \tau) = \int_{x'_\perp}^{x_\perp} \mathcal{A}_{\perp\mu}(\tau, R_\perp) dR_\perp^\mu \equiv \\ \equiv \int_0^1 ds (x_\perp^\mu - x'_\perp^\mu) \mathcal{A}_{\perp\mu}(\tau, x'_\perp + s(x_\perp - x'_\perp)) \quad (5.2)$$

— калибровочная функция, а одночастичная матрица плотности $N_{aa'}$ есть среднее значение

$$N_{aa'}(x_\perp, x'_\perp; \tau) = \langle \hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) \rangle^\tau = \langle \hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) \rangle_\sim^\tau \quad (5.3)$$

некоторого оператора плотности $\hat{N}_{aa'}$. В литературе можно найти различные определения для этого оператора; наиболее часто используются следующие:

$$\hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) = -\frac{1}{2}[\hat{\psi}_a(x_\perp), \hat{\psi}_{a'}(x'_\perp)], \quad (5.4)$$

$$\hat{N}'_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) = :\hat{\psi}_{a'}(x'_\perp)\hat{\psi}_a(x_\perp):. \quad (5.5)$$

Эти два оператора связаны соотношением

$$\hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) = \hat{N}'_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) + K_{aa'}(x_\perp, x'_\perp), \quad (5.6)$$

где последний c -числовой член представляет собой вакуумное среднее $\hat{N}$, поскольку вакуумное среднее $\hat{N}'$ равно нулю. Можно показать, однако, что вакуумный член в соотношении (5.6) не дает вклада в локальные наблюдаемые типа средней плотности тока $j^\mu(x)$.

Достоинство определения (5.5) состоит в том, что средние значения одночастичных динамических переменных

$$\widehat{O} = \int_{\sigma_n} d\sigma \int_{\sigma_n} d\sigma' O_{a'a}(x'_\perp, x_\perp) : \hat{\psi}_{a'}(x'_\perp) \hat{\psi}_a(x_\perp) : \quad (5.7)$$

(суммирование по повторяющимся спинорным индексам) выражаются через матрицу плотности $N' = \langle \hat{N}' \rangle^\tau$ соотношением

$$\langle \widehat{O} \rangle^\tau = \int_{\sigma_n} d\sigma \int_{\sigma_n} d\sigma' O_{a'a}(x'_\perp, x_\perp) N'_{aa'}(x_\perp, x'_\perp; \tau), \quad (5.8)$$

которое не содержит вакуумного вклада. К сожалению, уравнение движения для оператора (5.5) содержит вакуумные (расходящиеся) члены. С другой стороны, такие члены не появляются в уравнении движения для оператора (5.4). По этой причине мы выберем выражение (5.4) в качестве одночастичного оператора плотности в (5.3). Ранее аналогичное определение функции Вигнера в “лабораторной” системе отсчета использовалось для изучения дираковского вакуума в сильном внешнем поле [7]. Отметим, что вакуумный вклад в функцию Вигнера всегда можно исключить, выбирая подходящие начальные условия.

Функция Вигнера (5.1) определена на семействе гиперплоскостей $\sigma_{n,\tau}$ и, следовательно, параметрически зависит от 4-вектора нормали n . Однако локальные наблюдаемые, вычисленные с помощью функции Вигнера, не зависят от выбора n . В качестве иллюстрации запишем среднюю плотность поляризованного тока (4.9) через функцию Вигнера:

$$j^\mu(x) = e \langle : \hat{\psi}(x_\perp) \gamma^\mu \hat{\psi}(x_\perp) : \rangle^\tau = e \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p \cdot n) \text{tr} \{ \gamma^\mu W(x_\perp, p_\perp; \tau) |_{\tau=x \cdot n} \}, \quad (5.9)$$

где “tr” – след по спинорным индексам. Геометрически это соотношение означает, что при вычислении плотности тока переменная τ принимает такое значение, при котором пространственно-временная точка x лежит на гиперповерхности $\sigma_{n,\tau}$.

Еще одной важной величиной в кинетической теории КЭД плазмы является фотонная матрица плотности. Чтобы определить ее в формализме гиперплоскостей, будем исходить из разложения операторов $\hat{A}_\perp^\mu$ по плоским волнам. Аналогично хорошо известному представлению для свободного электромагнитного поля в системе отсчета, где $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, запишем

$$\begin{aligned} \hat{A}_\perp^\mu(\tau, x_\perp) &= \int \frac{d^4 q}{\sqrt{2\omega_n(q_\perp)}(2\pi)^3} \delta(q_\parallel - \omega_n(q_\perp)) \times \\ &\times \sum_{l=1,2} e^\mu(q_\perp, l) \{ \hat{a}_l(q_\perp) e^{-iq \cdot x} + \hat{a}_l^\dagger(q_\perp) e^{iq \cdot x} \}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Здесь $e^\mu(q_\perp, l)$ – действительные 4-векторы поляризации, а

$$\omega_n(q_\perp) = \omega_n(-q_\perp) = (-q_\perp^\mu q_{\perp\mu})^{1/2} \quad (5.11)$$

– закон дисперсии для фотонов на гиперплоскости. Чтобы удовлетворить условиям $\nabla_\mu \hat{A}_\perp^\mu = n_\mu \hat{A}_\perp^\mu = 0$, векторы поляризации должны обладать следующими свойствами:

$$q_{\perp\mu} e^\mu(q_\perp, l) = n_\mu e^\mu(q_\perp, l) = 0. \quad (5.12)$$

Разложение операторов $\hat{\Pi}_\perp^\mu$ по плоским волнам можно получить из (5.10) с помощью соотношения $\hat{\Pi}_\perp^\mu = -\dot{\hat{A}}_\perp^\mu$:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_\perp^\mu(\tau, x_\perp) = & \int \frac{d^4 q}{\sqrt{2\omega_n(q_\perp)}(2\pi)^3} i\omega_n(q_\perp) \delta(q_\parallel - \omega_n(q_\perp)) \times \\ & \times \sum_{l=1,2} e^\mu(q_\perp, l) \{ \hat{a}_l(q_\perp) e^{-iq \cdot x} - \hat{a}_l^\dagger(q_\perp) e^{iq \cdot x} \}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Предполагая, что коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения даются формулами

$$[\hat{a}_l(q_\perp), \hat{a}_{l'}^\dagger(q'_\perp)] = \delta_{ll'} \delta^3(q_\perp - q'_\perp), \quad [\hat{a}_l(q_\perp), \hat{a}_{l'}(q'_\perp)] = [\hat{a}_l^\dagger(q_\perp), \hat{a}_{l'}^\dagger(q'_\perp)] = 0, \quad (5.14)$$

и используя условие полноты для векторов поляризации

$$\sum_{l=1,2} e^\mu(q_\perp, l) e^\nu(q_\perp, l) = - \left(\Delta^{\mu\nu} - \frac{q_\perp^\mu q_\perp^\nu}{q_\perp^2} \right), \quad (5.15)$$

легко убедиться, что выполняются коммутационные соотношения (3.21) и (3.22) для операторов поля. Отметим, что выражения (5.10) и (5.13) справедливы для операторов поля в представлении взаимодействия. Соответствующие разложения в представлении Шредингера получаются при подстановке $\tau = 0$. Тогда δ -функцию $\delta(q_\parallel - \omega_n(q_\perp))$ можно заменить на $\delta(q_\parallel)$.

Приведенное выше представление операторов поля подсказывает, что фотонную матрицу плотности естественно построить с помощью операторов

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_l(x_\perp) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^{3/2}} \delta(q_\parallel) e^{-iq \cdot x} \hat{a}_l(q_\perp), \\ \hat{\phi}_l^\dagger(x_\perp) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^{3/2}} \delta(q_\parallel) e^{iq \cdot x} \hat{a}_l^\dagger(q_\perp), \end{aligned} \quad (5.16)$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}_l(x_\perp), \hat{\phi}_{l'}^\dagger(x'_\perp)] &= \delta_{ll'} \delta^3(x_\perp - x'_\perp), \\ [\hat{\phi}_l(x_\perp), \hat{\phi}_{l'}(x'_\perp)] &= [\hat{\phi}_l^\dagger(x_\perp), \hat{\phi}_{l'}^\dagger(x'_\perp)] = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Определим фотонную матрицу плотности как среднее значение

$$N_{ll'}^{(\text{ph})}(x_\perp, x'_\perp; \tau) = \langle \hat{N}_{ll'}^{(\text{ph})}(x_\perp, x'_\perp) \rangle_\tau, \quad (5.18)$$

где

$$\hat{N}_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}) = \hat{\varphi}_{l'}^{\dagger}(x'_{\perp}) \hat{\varphi}_l(x_{\perp}). \quad (5.19)$$

Отметим, что среднее в (5.18) вычисляется с преобразованным статистическим оператором $\tilde{\varrho}(n, \tau)$, в котором исключена конденсатная мода. Если записать фотонную матрицу плотности через среднее со статистическим оператором $\varrho(n, \tau)$, то она примет вид

$$N_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) = \langle \hat{N}_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}) \rangle^{\tau} - \langle \hat{\varphi}_l(x_{\perp}) \rangle^{\tau} \langle \hat{\varphi}_{l'}^{\dagger}(x'_{\perp}) \rangle^{\tau}, \quad (5.20)$$

где второй член соответствует вкладу конденсатной моды.

Чтобы вывести кинетические уравнения для функции Вигнера (5.1) и фотонной матрицы плотности (5.18), можно исходить из очевидных уравнений движения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) = -i \text{Tr} \{ [\hat{N}_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}), \hat{\mathcal{H}}_0^{\tau}(n) + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\tau}(n)] \tilde{\varrho}(n, \tau) \}, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) = -i \text{Tr} \{ [\hat{N}_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}), \hat{\mathcal{H}}_0^{\tau}(n) + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\tau}(n)] \tilde{\varrho}(n, \tau) \}, \quad (5.22)$$

где правые части нужно выразить через фермионную и фотонную матрицы плотности. Один из способов сделать это состоит в построении цепочки уравнений для корреляционных функций, которые возникают при вычислении коммутаторов с гамильтонианом взаимодействия $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\tau}(n)$, и использовании некоторой процедуры расщепления. Другой подход состоит в построении решения уравнения (4.6) для статистического оператора, которое выражается через матрицы плотности $N_{aa'}$ и $N_{ll'}^{(\text{ph})}$. В обоих случаях необходимо наложить некоторые граничные условия, которые отбирают запаздывающие решения уравнений для корреляционных функций или статистического оператора.

В методе Зубарева (см., например, [18]) граничные условия к уравнению фон Неймана формулируются с помощью бесконечно малых источников, нарушающих симметрию этого уравнения относительно отражения времени. Следуя этому методу, введем источник в релятивистское уравнение фон Неймана (4.6) и запишем его в виде

$$\frac{\partial \tilde{\varrho}(n, \tau)}{\partial \tau} - i[\tilde{\varrho}(n, \tau), \hat{\mathcal{H}}^{\tau}(n)] = -\varepsilon \{ \tilde{\varrho}(n, \tau) - \varrho_q(n, \tau) \}, \quad (5.23)$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$ после перехода к термодинамическому пределу в средних значениях, вычисленных с неравновесным статистическим оператором. Так называемый *квазиравновесный статистический оператор* $\varrho_q(n, \tau)$ описывает обобщенное гиббсовское состояние, которое характеризуется некоторым набором базисных переменных (наблюдаемых). В кинетической теории КЭД плазмы этими переменными являются функция Вигнера (5.1) (или, что то же самое, одночастичная матрица плотности $N_{aa'}$) и фотонная матрица плотности (5.18). Поэтому, следуя стандартному методу построения квазиравновесных распределений [18], получаем $\varrho_q(n, \tau)$ в виде

$$\varrho_q(n, \tau) = \frac{1}{Z_q(n, \tau)} \exp \left\{ - \int_{\sigma_n} d\sigma \int_{\sigma_n} d\sigma' [\lambda_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) : \hat{\psi}_a(x_{\perp}) \hat{\psi}_{a'}(x'_{\perp}) : + \right. \\ \left. + \lambda_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) \hat{\varphi}_l^{\dagger}(x_{\perp}) \hat{\varphi}_{l'}(x'_{\perp}) \right\}, \quad (5.24)$$

где предполагается суммирование по спинорным и поляризационным индексам, $Z_q(n, \tau)$ – статистическая сумма для квазиравновесного ансамбля. Параметры $\lambda_{aa'}(x_\perp, x'_\perp; \tau)$ и $\lambda_{ll'}^{(\text{ph})}(x_\perp, x'_\perp; \tau)$ находятся из условий самосогласования

$$\begin{aligned} N_{aa'}(x_\perp, x'_\perp; \tau) &= \text{Tr}\{\hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp)\varrho_q(n, \tau)\}, \\ N_{ll'}^{(\text{ph})}(x_\perp, x'_\perp; \tau) &= \text{Tr}\{\hat{N}_{ll'}^{(\text{ph})}(x_\perp, x'_\perp)\varrho_q(n, \tau)\}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где неравновесные матрицы плотности в левых частях считаются заданными величинами.

Используя (5.23), получаем цепочку уравнений для “одновременных” корреляционных функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{F}_{1\dots k}(x_{1\perp}, \dots, x_{k\perp}; n, \tau) &= -i\langle [\hat{O}_1(x_{1\perp}) \dots \hat{O}_k(x_{k\perp}), \hat{\mathcal{H}}^\tau(n)] \rangle_\sim^\tau - \\ &- \varepsilon \{ \tilde{F}_{1\dots k}(x_{1\perp}, \dots, x_{k\perp}; n, \tau) - \langle \hat{O}_1(x_{1\perp}) \dots \hat{O}_k(x_{k\perp}) \rangle_q^\tau \}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где $\hat{O}_i(x_{i\perp})$ – операторы Шредингера, построенные из фермионных операторов и операторов электромагнитного поля, а символ $\langle \cdot \rangle_q^\tau$ обозначает квазиравновесные средние. Напомним, что корреляционные функции

$$\tilde{F}_{1\dots k}(x_{1\perp}, \dots, x_{k\perp}; n, \tau) = \langle \hat{O}_1(x_{1\perp}) \dots \hat{O}_k(x_{k\perp}) \rangle_\sim^\tau \quad (5.27)$$

вычисляются в состоянии, где исключена конденсатная мода электромагнитного поля.

Поскольку квазиравновесный статистический оператор (5.24) допускает применение теоремы Вика, то последний член в (5.26) обеспечивает выполнение граничного условия ослабления начальных корреляций, которое является стандартным граничным условием в кинетической теории. Отметим, что при рассмотрении цепочки уравнений для корреляционных функций не требуется иметь явное выражение для неравновесного статистического оператора $\tilde{\varrho}(n, \tau)$.

Вместо того чтобы использовать цепочку уравнений для корреляционных функций, можно вычислить средние значения в (5.21) и (5.22) с формальным решением уравнения (5.23)

$$\tilde{\varrho}(n, \tau) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' e^{-\varepsilon(\tau-\tau')} \mathcal{U}(\tau, \tau') \varrho_q(n, \tau') \mathcal{U}^\dagger(\tau, \tau'), \quad (5.28)$$

где оператор эволюции $\mathcal{U}(\tau, \tau')$ есть упорядоченная экспонента

$$\mathcal{U}(\tau, \tau') = T_\tau \exp \left\{ -i \int_{\tau'}^{\tau} \hat{\mathcal{H}}^{\bar{\tau}}(n) d\bar{\tau} \right\}. \quad (5.29)$$

После интегрирования по частям формула (5.28) принимает вид

$$\tilde{\varrho}(n, \tau) = \varrho_q(n, \tau) + \Delta \varrho(n, \tau), \quad (5.30)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \varrho(n, \tau) = & - \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' e^{-\varepsilon(\tau-\tau')} \mathcal{U}(\tau, \tau') \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial \varrho_q(n, \tau')}{\partial \tau'} - i[\varrho_q(n, \tau'), \hat{\mathcal{H}}^{\tau'}(n)] \right\} \mathcal{U}^{\dagger}(\tau, \tau') \end{aligned} \quad (5.31)$$

– корреляционная часть статистического оператора. Подставляя выражение (5.30) в (5.21) и (5.22), приходим к обобщенным кинетическим уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) = -i \langle [\hat{N}_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}), \hat{\mathcal{H}}_0^{\tau}(n)] \rangle_q^{\tau} + I_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau), \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) = -i \langle [\hat{N}_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}), \hat{H}_{\text{ЕМ}}^{\tau}] \rangle_q^{\tau} + I_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau). \quad (5.33)$$

Первый член в правой части (5.32) описывает фермионы, взаимодействующие со средним электромагнитным полем, а первый член в правой части (5.33) описывает распространение свободных фотонов. Последние члены в этих уравнениях представляют собой интегралы столкновений:

$$\begin{aligned} I_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) = & -i \langle [\hat{N}_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}), \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\tau}(n)] \rangle_q^{\tau} - \\ & - i \text{Tr} \{ [\hat{N}_{aa'}(x_{\perp}, x'_{\perp}), \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\tau}(n)] \Delta \varrho(n, \tau) \}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$I_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}; \tau) = -i \text{Tr} \{ [\hat{N}_{ll'}^{(\text{ph})}(x_{\perp}, x'_{\perp}), \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\tau}(n)] \Delta \varrho(n, \tau) \}. \quad (5.35)$$

Если пренебречь интегралом столкновений в (5.32), то мы сразу же получим ковариантное кинетическое уравнение для функции Вигнера (5.1) в приближении среднего поля. Это уравнение, а также интегралы столкновений для фермионов и фотонов будут рассмотрены в последующих статьях.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что формализм гиперплоскостей может служить основой для построения кинетической теории КЭД плазмы в присутствии сильного электромагнитного поля. Достоинство этого формализма состоит в том, что он является явно ковариантным и дает возможность формулировать различные приближения в ковариантной форме. Следует также отметить, что изложенная схема содержит лишь незначительные изменения по сравнению с нерелятивистским методом матрицы плотности. Поэтому многие хорошо развитые методы нерелятивистской статистической механики можно применить к КЭД плазме. Например, явное построение неравновесного статистического оператора на гиперплоскостях позволяет учесть многочастичные корреляции путем расширения базисного набора параметров состояния точно так же, как в нерелятивистском случае [18], [23]. Используя представление Гайзенберга на гиперплоскостях и вводя неравновесные функции Грина, которые зависят от “инвариантного времени” τ , можно построить диаграммную технику по аналогии с хорошо известной техникой для нерелятивистских систем [24].

Подход, изложенный в данной работе, применим к другим полевым теориям, например к теории процессов переноса в кварк-глюонной плазме. Однако в этом случае из-за неабелевой структуры квантовой хромодинамики возникают дополнительные проблемы, которые требуют специального исследования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем вывод коммутационных соотношений (3.21), (3.22) для операторов электромагнитного поля и антикоммутационных соотношений (3.24), (3.25) для фермионных операторов. Начнем с канонического квантования электромагнитного поля на гиперплоскостях $\sigma_{n,\tau}$ и запишем уравнения связей для переменных $A_\perp^\mu$ и $\Pi_\perp^\mu$ в виде $\chi_N(x_\perp)=0$, где

$$\begin{aligned}\chi_1(x_\perp) &= \nabla_\mu A_\perp^\mu(x_\perp), & \chi_2(x_\perp) &= \nabla_\mu \Pi_\perp^\mu(x_\perp), \\ \chi_3(x_\perp) &= n_\mu A_\perp^\mu(x_\perp), & \chi_4(x_\perp) &= n_\mu \Pi_\perp^\mu(x_\perp).\end{aligned}\quad (\text{П.1})$$

Для любых функционалов Φ_1 и Φ_2 от $A_\perp^\mu$ и $\Pi_\perp^\mu$ определим скобку Пуассона

$$[\Phi_1, \Phi_2]_P \equiv \int_{\sigma_{n,\tau}} d\sigma \left\{ \frac{\delta \Phi_1}{\delta A_\perp^\mu(x_\perp)} \frac{\delta \Phi_2}{\delta \Pi_{\perp\mu}(x_\perp)} - \frac{\delta \Phi_2}{\delta A_\perp^\mu(x_\perp)} \frac{\delta \Phi_1}{\delta \Pi_{\perp\mu}(x_\perp)} \right\}, \quad (\text{П.2})$$

где связи игнорируются при вычислении функциональных производных. Применяя эту формулу к каноническим переменным $A_\perp^\mu$ и $\Pi_\perp^\mu$, получим

$$[A_\perp^\mu(x_\perp), \Pi_{\perp\nu}(x'_\perp)]_P = \delta^\mu_\nu \delta^3(x_\perp - x'_\perp) \quad (\text{П.3})$$

с трехмерной δ -функцией (3.16). Остальные скобки Пуассона канонических переменных равны нулю. По терминологии Дирака функции (П.1) соответствуют *связям второго рода*, поскольку матрица

$$C_{NN'}(x_\perp, x'_\perp) = [\chi_N(x_\perp), \chi_{N'}(x'_\perp)]_P \quad (\text{П.4})$$

является неособенной. Прямое вычисление скобок Пуассона показывает, что ненулевыми элементами $C_{NN'}$ являются

$$\begin{aligned}C_{12}(x_\perp, x'_\perp) &= -C_{21}(x_\perp, x'_\perp) = -\nabla_\mu \nabla^\mu \delta^3(x_\perp - x'_\perp), \\ C_{34}(x_\perp, x'_\perp) &= -C_{43}(x_\perp, x'_\perp) = \delta^3(x_\perp - x'_\perp).\end{aligned}\quad (\text{П.5})$$

Согласно общей схеме квантования [20], [21] коммутационные соотношения для канонических операторов определяются скобками Дирака соответствующих классических переменных. В нашем случае скобка Дирака записывается в виде

$$\begin{aligned}[\Phi_1, \Phi_2]_D &= \\ &= [\Phi_1, \Phi_2]_P - \int_{\sigma_{n,\tau}} d\sigma \int_{\sigma_{n,\tau}} d\sigma' [\Phi_1, \chi_N(x_\perp)]_P C_{NN'}^{-1}(x_\perp, x'_\perp) [\chi_{N'}(x'_\perp), \Phi_2]_P\end{aligned}\quad (\text{П.6})$$

с суммированием по повторяющимся индексам. Обратная матрица $C_{NN'}^{-1}(x_\perp, x'_\perp)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{\sigma_{n,\tau}} d\sigma'' C_{NN''}(x_\perp, x''_\perp) C_{N''N'}^{-1}(x''_\perp, x'_\perp) = \delta_{NN'} \delta^3(x_\perp - x'_\perp). \quad (\text{П.7})$$

Поскольку матричные элементы (П.5) зависят от разности $x_\perp - x'_\perp$, это уравнение можно решить с помощью преобразования Фурье на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$, которое определяется для любой функции $f(x)$ следующим образом:

$$\tilde{f}(\tau, p_\perp) = \int d^4x e^{ip_\perp \cdot x_\perp} \delta(x \cdot n - \tau) f(x). \quad (\text{П.8})$$

Обратное преобразование дается формулой

$$f(x) \equiv f(\tau, x_\perp) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} \delta(p \cdot n) \tilde{f}(\tau, p_\perp). \quad (\text{П.9})$$

Выполняя в (П.7) преобразование Фурье и подставляя выражения (П.5), находим ненулевые элементы обратной матрицы $C_{NN'}^{-1}$:

$$\begin{aligned} C_{12}^{-1}(x_\perp, x'_\perp) &= -C_{21}^{-1}(x_\perp, x'_\perp) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x - x')} \delta(p \cdot n) \frac{1}{p_\perp^2}, \\ C_{34}^{-1}(x_\perp, x'_\perp) &= -C_{43}^{-1}(x_\perp, x'_\perp) = -\delta^3(x_\perp - x'_\perp). \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Теперь скобки Дирака (П.6) канонических переменных легко вычисляются, и мы получаем

$$[A_\perp^\mu(x_\perp), \Pi_\perp^\nu(x'_\perp)]_D = c^{\mu\nu}(x_\perp - x'_\perp), \quad (\text{П.11})$$

$$[A_\perp^\mu(x_\perp), A_\perp^\nu(x'_\perp)]_D = [\Pi_\perp^\mu(x_\perp), \Pi_\perp^\nu(x'_\perp)]_D = 0, \quad (\text{П.12})$$

где функция $c^{\mu\nu}(x_\perp - x'_\perp)$ имеет вид (3.23). Отсюда следует, что коммутационные соотношения для операторов электромагнитного поля даются формулами (3.21) и (3.22). Очевидно, что эти коммутационные соотношения справедливы в представлениях Шредингера и Гейзенберга.

Чтобы найти антикоммутационные соотношения для фермионных операторов на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$, достаточно рассмотреть свободное поле Дирака. Будем исходить из стандартной процедуры квантования в “лабораторной” системе отсчета, где $x^\mu = (t, \mathbf{r})$ и $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ (см., например, [19]). В этом случае операторы поля $\hat{\psi}_a$ и $\hat{\bar{\psi}}_a$ можно записать через операторы рождения и уничтожения посредством разложений по плоским волнам

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_a(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\delta(p^0 - E_p)}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=\pm 1} [\hat{b}_s(p) u_{as}(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{d}_s^\dagger(p) v_{as}(p) e^{ip \cdot x}], \\ \hat{\bar{\psi}}_a(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\delta(p^0 - E_p)}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=\pm 1} [\hat{d}_s(p) \bar{v}_{as}(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_s^\dagger(p) \bar{u}_{as}(p) e^{ip \cdot x}], \end{aligned}$$

где $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Составляя выражение $\{\hat{\psi}_a(x), \hat{\bar{\psi}}_{a'}(x')\}$ для двух произвольных пространственно-временных точек, а затем используя антикоммутиационные соотношения

$$\{\hat{b}_s(\mathbf{p}), \hat{b}_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \{\hat{d}_s(\mathbf{p}), \hat{d}_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (\text{П.13})$$

и хорошо известные соотношения для дираковских спиноров

$$\sum_{s=\pm 1} u_{as}(p) \bar{u}_{a's}(p) = [\gamma^\mu p_\mu + m]_{aa'}, \quad \sum_{s=\pm 1} v_{as}(p) \bar{v}_{a's}(p) = [\gamma^\mu p_\mu - m]_{aa'},$$

получаем

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_a(x), \hat{\bar{\psi}}_{a'}(x')\} &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \{[\gamma^\mu p_\mu + m]_{aa'} e^{-ip \cdot (x-x')} + \\ &+ [\gamma^\mu p_\mu - m]_{aa'} e^{ip \cdot (x-x')}\}, \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

где $p^0 = E_p$. Поскольку

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0}, \quad (\text{П.15})$$

выражение (П.14) можно переписать в лоренц-инвариантной форме:

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_a(x), \hat{\bar{\psi}}_{a'}(x')\} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \{[\gamma^\mu p_\mu + m]_{aa'} e^{-ip \cdot (x-x')} \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0} + \\ &+ [\gamma^\mu p_\mu - m]_{aa'} e^{ip \cdot (x-x')} \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0}\}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Теперь искомое антикоммутиационное соотношение на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$ легко получается путем подстановки $x = n\tau + x_\perp$, $x' = n\tau + x'_\perp$. При вычислении интегралов удобно воспользоваться разложением $p^\mu = n^\mu p_\parallel + p_\perp^\mu$, $p_\parallel > 0$. Тогда находим

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_a(\tau, x_\perp), \hat{\bar{\psi}}_{a'}(\tau, x'_\perp)\} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \frac{\delta(p_\parallel - \epsilon(p_\perp))}{2\epsilon(p_\perp)} \times \\ &\times \{[\gamma_\parallel p_\parallel + \gamma_\perp^\mu p_{\perp\mu} + m]_{aa'} e^{-ip_{\perp\mu}(x_\perp^\mu - x_{\perp'}^\mu)} + \\ &+ [\gamma_\parallel p_\parallel + \gamma_\perp^\mu p_{\perp\mu} - m]_{aa'} e^{ip_{\perp\mu}(x_\perp^\mu - x_{\perp'}^\mu)}\} \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

с законом дисперсии для фермионов на гиперплоскости

$$\epsilon(p_\perp) = \sqrt{-p_{\perp\mu} p_\perp^\mu + m^2}. \quad (\text{П.18})$$

Наконец, производя замену переменной $p_\perp \rightarrow -p_\perp$ во втором слагаемом в фигурных скобках в правой части формулы (П.17), приходим к соотношению (3.24). Соотношение (3.25) выводится аналогичным образом.

Благодарности. В. Г. Морозов и А. Хёлль признательны фонду Deutsche Forschungsgemeinschaft за поддержку этой работы. А. Хёлль выражает благодарность фонду Studienstiftung des deutschen Volkes за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] *P. Sprangle, A. Esarey, A. Ting.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2011.
- [2] *P. Gibbon, E. Förster.* Plasma Phys. Control. Fusion. 1996. V. 38. P. 769.
- [3] *T. Brabec, F. Krausz.* Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72. P. 545.
- [4] *C. de Гроот, В. ван Леувеи, Х. ван Верт.* Релятивистская кинетическая теория. М.: Мир, 1983.
- [5] *P. Carruthers, F. Zachariasen.* Rev. Mod. Phys. 1983. V. 55. P. 245.
- [6] *D. Vasak, M. Gyulassy, H.-T. Elze.* Ann. Phys. (N. Y.). 1987. V. 173. P. 462.
- [7] *I. Bialynicki-Birula, P. Górnicki, J. Rafelski.* Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1825.
- [8] *P. Zhuang, U. Heinz.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 6525.
- [9] *S. Ochs, U. Heinz.* Ann. Phys. (N. Y.). 1998. V. 266. P. 351.
- [10] *P. Lipavský, V. Špička, B. Velický.* Phys. Rev. B. 1986. V. 34. P. 6933.
- [11] *B. Bezzerides, D. F. DuBois.* Ann. Phys. (N. Y.). 1972. V. 70. P. 10.
- [12] *Н. Н. Бозолюбов.* ДАН СССР. 1951. Т. 81. С. 757.
- [13] *G. N. Fleming.* Phys. Rev. B. 1965. V. 137. P. 188.
- [14] *G. N. Fleming.* J. Math. Phys. 1966. V. 7. P. 1959.
- [15] *J. M. Jauch, F. Rohrlich.* The Theory of Photons and Electrons. New York: Springer, 1976.
- [16] *Ch. G. van Weert.* Ann. Phys. (N. Y.). 1982. V. 140. P. 133.
- [17] *С. Шеебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: ИЛ, 1963.
- [18] *D. N. Zubarev, V. G. Morozov, G. Röpke.* Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. V. 1. Berlin: Akademie, 1996.
- [19] *W. Greiner, J. Reinhardt.* Field Quantization. Berlin–Heidelberg: Springer, 1996.
- [20] *P. A. M. Dirac.* Can. J. Math. 1950. V. 2. P. 129.
- [21] *S. Weinberg.* The Quantum Theory of Fields. V. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [22] *F. J. Belinfante.* Physica. 1939. V. 6. P. 887.
- [23] *V. G. Morozov, G. Röpke.* J. Stat. Phys. 2001. V. 102. P. 285.
- [24] *P. Danielewicz.* Ann. Phys. (N. Y.). 1984. V. 152. P. 239.

Поступила в редакцию 11.I.2002 г.