Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Грибова, Е. Е. Тареева, Нарушение репличной симметрии в аксиальной модели квадрупольного стекла, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 3, 479–490

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf341>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 02:40:13

© 2002 г.

Н. В. Грибова*, Е. Е. Тареева*

НАРУШЕНИЕ РЕПЛИЧНОЙ СИММЕТРИИ В АКСИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КВАДРУПОЛЬНОГО СТЕКЛА

Для модели аксиальных квадрупольных со случайными связями исследовано нарушение репличной симметрии (НРС) в окрестности температуры неустойчивости репликасимметричного решения. Оказалось, что решение, соответствующее первому этапу НРС (1НРС), устойчиво относительно дальнейшего нарушения репличной симметрии (РС). При этом, несмотря на отсутствие отражательной симметрии, 1НРС-решение отделяется от РС-решения непрерывным образом. Совокупность этих фактов означает, что рассматриваемая модель не может быть отнесена ни к одному из двух классов, на которые принято делить спиновые стекла.

1. В последнее время снова возрос интерес к неизинговым спиновым стеклам с нарушенной отражательной симметрией, теорию которых связывают с теорией реальных структурных стекол. На сегодняшний день удовлетворительной микроскопической модели перехода жидкость–стекло не существует, несмотря на огромное количество данных реальных и компьютерных экспериментов, а также ряд феноменологических теорий. В то же время активно ведущиеся исследования спиновых стекол, ориентационных стекол и других моделей с замороженным беспорядком породили множество идей и методов, которые используются при изучении других систем, в том числе нейронных сетей, белков, резин и собственно реальных стекол.

Когда говорят о связи теории спиновых стекол с теорией реальных структурных стекол, обычно подразумевают два аспекта. Во-первых, теория переходов в определенном классе спиновых стекол рассматривается как дающая возможный сценарий стеклования в реальных многочастичных системах (см., например, [1]–[3]). Во-вторых, делаются попытки создания модельной теории перехода жидкость–стекло в системах частиц с центральным взаимодействием [4]–[6], используя методы теории спиновых стекол.

В действительности существует и третий аспект указанной связи: развиваются подходы, в которых переход в мультипольное стекло появляется как составная часть перехода жидкость–стекло [7], [8], причем в сценариях разных авторов физический смысл

*Институт физики высоких давлений, г. Троицк, Московская обл., Россия.
E-mail: etare@ns.hppi.troitsk.ru

упорядочивающихся переменных различен. Рассматриваемая в настоящей работе задача может быть полезна в связи с первым и третьим аспектами.

Как показали работы последних лет, экспериментально наблюдаемые характеристики релаксационных процессов в реальных стеклах достаточно хорошо описываются уравнениями теории взаимодействующих мод [9]. Подобные уравнения получаются и в результате исследования динамики спиновых стекол. Наиболее близким по сценарию к реальным стеклам (на что впервые было указано в работах [10]) является класс среднеполевых спиновых стекол с отсутствием отражательной симметрии, в которых статический переход (нарушение репличной симметрии – НРС) сопровождается скачком параметра порядка при температуре T_c , причем решение, возникающее в результате первого этапа НРС (1НРС), оказывается устойчивым, а полная схема Паризи не работает. Отсутствие отражательной симметрии, т.е. тот факт, что во внутренней группе симметрии нет операции, которая бы переводила динамическую переменную $\mathbf{Q}$ в $-\mathbf{Q}$, приводит к наличию кубических членов в функционале Гинзбурга–Ландау соответствующей регулярной задачи [11] и специальному виду НРС-функционала свободной энергии для случайных связей [12]. Динамический переход в этих моделях происходит при температуре $T_d > T_c$. В результате этого динамического перехода система оказывается “пойманной” в состоянии, менее энергетически выгодном, чем достигаемое в результате НРС, и остается в нем надолго. К таким моделям (являющимся как бы прототипом реального стекла) относятся, в частности, p -спиновая модель, ориентационные стекла, модель Поттса с беспорядком и др. Некоторые из этих моделей (особенно p -спиновая сферическая модель) были подробно исследованы уже в середине 90-х годов (см., например, обзор [1]), исследование других активно ведется и в настоящее время [13]–[15]. Существенно, что во всех исследованных моделях целый набор специфических свойств (отсутствие отражательной симметрии, скачок параметра порядка, устойчивость решения, полученного в результате 1НРС, несовпадение статической и динамической критических температур и др.) либо полностью присутствует, либо полностью отсутствует (как в модели Шеррингтона–Киркпатрика с решением Паризи), так что принято говорить о двух классах моделей [1], [2], [16].

Существуют, однако, некоторые указания на то, что такое строгое разделение на классы не обосновано. Так, не вполне ясна ситуация с моделью Поттса с тремя состояниями (см. [17]–[19]). Без скачка появляется 1НРС-решение и в трехспиновой сферической модели при определенных значениях внешнего поля [20].

В настоящей работе мы будем исследовать модель квадрупольного стекла с бесконечным случайным дальновдействием [21], [22] с отсутствием отражательной симметрии [11]. Мы покажем, что в отличие от общепринятой квазиуниверсальности в этой модели 1НРС не приводит к скачку параметра порядка. Это является, по-видимому, следствием того, что в силу определенной алгебры операторов квадрупольного момента в системе имеются внутренние поля, которые вызывают эффект, подобный эффекту внешнего поля, рассмотренному в [20]. (Подробнее про внутренние поля в квадрупольном стекле см. [23], [24].)

2. Итак, мы будем рассматривать систему N аксиальных квадрупольей, находящихся в узлах i, j правильной решетки, с гамильтонианом [21], [22]

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} Q_i Q_j, \quad (1)$$

где $Q = 3J_z^2 - 2$, $J = 1$, $J_z = 1, 0, -1$, а константы связи распределены с вероятностью

$$P(J_{ij}) = (\sqrt{2\pi}J)^{-1} \exp \left[-\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2} \right],$$

причем $J_0 = \tilde{J}_0/N$, $J = \tilde{J}/N^{1/2}$.

Используя метод реплик стандартным способом, получим выражение для свободной энергии, отвечающей гамильтониану (1) [21], [22]:

$$\begin{aligned} \frac{\langle F \rangle_J}{NkT} = & - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \max \left\{ \frac{\tilde{J}^2 n}{(kT)^2} - \frac{1}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q^{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (x^{\alpha})^2 + \right. \\ & + \ln \text{Tr} \exp \left[\frac{\tilde{J}}{kT} \sum_{(\alpha\beta)} q^{\alpha\beta} Q^{\alpha} Q^{\beta} + \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} + \frac{\tilde{J}^2}{2(kT)^2} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} Q^{\alpha} x^{\alpha} - \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\tilde{J}}{kT} \right)^2 \sum_{\alpha} Q^{\alpha} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $(\alpha\beta)$ означает суммирование по парам реплик, n — число реплик, а $x^{\alpha} \sim \langle \langle Q^{\alpha} \rangle_T \rangle_J$ и $q^{\alpha\beta} \sim \langle \langle Q^{\alpha} Q^{\beta} \rangle_T \rangle_J$. Мы будем считать для простоты $J_0 = 0$.

В тех же работах был подробно рассмотрен случай симметричных реплик и получены решения уравнений для параметров порядка. Оказалось, что эти решения плавно возрастают с понижением температуры, не обнаруживая фазового перехода в привычном понимании, что согласуется с экспериментом в смеси N_2 –Ar [25]. Было получено также поведение теплоемкости с широким максимумом и линейной зависимостью от температуры в низкотемпературной области, соответствующее результатам экспериментов того времени, не достигавших области сверхнизких температур.

Эта модель была подробно исследована затем в ряде работ (см., например, [23]–[30] и ссылки в них), однако нарушение репличной симметрии рассмотрено не было, видимо, из-за сложности задачи. В то же время исследование устойчивости репликосимметричного решения по методу Альмейды–Таулесса [31] показало наличие неустойчивости по отношению к НРС [24], [30].

В настоящей работе мы проведем нарушение репличной симметрии для модели (1) в окрестности точки неустойчивости РС-решения, найдем в этой окрестности решение, соответствующее 1НРС, и покажем, что оно устойчиво относительно дальнейшего нарушения репличной симметрии. Существенно, что, несмотря на отсутствие отражательной симметрии, 1НРС-решение ответвляется от РС-решения непрерывным образом. Это свидетельствует против указанной выше квазиуниверсальности.

Для проведения 1НРС разобьем n реплик на n/m групп по m реплик в каждой и положим величину $q^{\alpha\beta}$ равной q_1 , если α и β принадлежат одной и той же группе, и q_0 — если разным группам.

Тогда

$$\sum_{\alpha \neq \beta} (q^{\alpha\beta})^2 = q_1^2 n(m-1) + q_0^2 n(n-m), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \neq \beta} (q^{\alpha\beta}) Q^\alpha Q^\beta &= q_0 \left(\sum_1^n Q^\alpha \right)^2 + (q_1 - q_0) \left[\left(\sum_1^m Q^\alpha \right)^2 + \dots + \left(\sum_{n-m+1}^n Q^\alpha \right)^2 \right] - \\ &- 2nq_1 + q_1 \sum_1^n Q^\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (2), воспользовавшись формулой линейаризации экспоненты

$$\exp(\lambda a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \exp \left[-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2\lambda} ax \right] \quad (5)$$

и сделав замену $q_1 \rightarrow t(p+v)$, $q_0 \rightarrow tp$, $x \rightarrow \sqrt{\frac{t^2}{2}}x$, где $t = \frac{\bar{J}}{kT}$, получим выражение для свободной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{F}{NkT} &= -t^2 + \frac{t^2 x^2}{4} + \frac{t^2}{4} (-mp^2 + (p+v)^2(m-1) + 4(p+v)) - \\ &- \frac{1}{m} \int dy^G \ln \int dz^G \Psi^m(\theta), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} da^G &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} da e^{-a^2/2}, \quad \Psi = 2e^\theta + e^{-2\theta}, \\ \theta &= ty\sqrt{p} + tz\sqrt{v} + \frac{t^2}{2}(p+v-2+x), \end{aligned}$$

а x , p , v и m удовлетворяют уравнениям, выражающим условие экстремума функционала (6) по этим переменным:

$$x = \int dy^G \frac{\int dz^G \Psi^{m-1} \Psi'}{\int dz^G \Psi^m}, \quad (7)$$

$$p+v = \int dy^G \frac{\int dz^G \Psi^{m-2} (\Psi')^2}{\int dz^G \Psi^m}, \quad (8)$$

$$p = \int dy^G \left[\frac{\int dz^G \Psi^{m-1} \Psi'}{\int dz^G \Psi^m} \right]^2, \quad (9)$$

$$-\frac{t^2}{4} m((p+v)^2 - p^2) = \frac{1}{m} \int dy^G \ln \int dz^G \Psi^m - \int dy^G \frac{\int dz^G \Psi^m \ln \Psi}{\int dz^G \Psi^m}. \quad (10)$$

Из выражения для свободной энергии (6) получим выражение для энтропии:

$$\begin{aligned} \frac{S}{Nk} = & -t^2 - \frac{3}{4}t^2x^2 - \frac{3}{4}t^2[-mp^2 + (p+v)^2(m-1)] - t^2(p+v) + 2t^2x + \\ & + \frac{1}{m} \int dy^G \ln \int dz^G \Psi^m(\theta). \end{aligned}$$

3. Раскладывая уравнения (7)–(10) по t при $t \rightarrow 0$, нетрудно показать, что при высоких температурах существует только одно решение для системы новых уравнений, и оно совпадает с решением системы РС-уравнений [21], [22], которое получается из (6)–(10) при $v = 0$, а именно:

$$x' = 2 \int dy^G \left[\frac{e^{\theta'} - e^{-2\theta'}}{2e^{\theta'} + e^{-2\theta'}} \right], \quad (11)$$

$$p' = 4 \int dy^G \left[\frac{e^{\theta'} - e^{-2\theta'}}{2e^{\theta'} + e^{-2\theta'}} \right]^2, \quad (12)$$

$$\theta' = ty\sqrt{p'} + \frac{t^2}{2}(p' + x' - 2).$$

Величины $x = x'$, $p = p'$, $v = 0$ при всех значениях температуры являются решением системы уравнений (7)–(10) для любого значения m .

Исследуем поведение 1НРС-системы около возможной точки неустойчивости. Для этого разложим свободную энергию (6) около РС-решения в произвольной точке t_c :

$$\begin{aligned} F = & F_0 + \frac{1}{2}x_1^2(F_{xx} + \tau F_{xxt}) + \frac{1}{2}p_1^2(F_{pp} + \tau F_{ppt}) + \\ & + x_1p_1(F_{xp} + \tau F_{xpt}) + \frac{1}{2}v^2(F_{vv} + \tau F_{vvt}) + \\ & + x_1v(F_{vx} + \tau F_{vxt}) + p_1v(F_{vp} + \tau F_{vpt}) + \\ & + \frac{1}{6}x_1^3F_{xxx} + \frac{1}{6}p_1^3F_{ppp} + \frac{1}{6}v^3F_{vvv} + \\ & + \frac{1}{2}x_1^2(p_1F_{x xp} + vF_{x xv}) + \frac{1}{2}x_1^2(p_1F_{x xp} + vF_{x xv}) + \\ & + \frac{1}{2}p_1^2(x_1F_{ppx} + vF_{ppv}) + \frac{1}{2}v^2(x_1F_{vvx} + p_1F_{vvp}) + \\ & + x_1p_1vF_{xpv}, \end{aligned} \quad (13)$$

где F_0 – свободная энергия РС-решения, $\tau = t - t_c$, а x_1 , p_1 , v – отклонения от РС-решения ($p = p' + p_1$, $x = x' + x_1$), и будем искать малые решения уравнений, выражающих условия экстремума функционала (13), в соответствии с общей теорией ветвления решений нелинейных уравнений (см., например, [32]). Обозначая $F/(Nkt) = A$ и используя

выражения для A_{ab} , приведенные в приложении 1, запишем условия экстремума по переменным x , p и v в виде:

$$x_1 A_{xx} + p_1 A_{px} - v(m-1)A_{px} = B_x, \quad (14)$$

$$x_1 A_{px} + p_1 A_{pp} - v(m-1)A_{pp} = B_p, \quad (15)$$

$$x_1 A_{px} + p_1 A_{pp} + v(A_{pp} - 2mD) = B_v, \quad (16)$$

где D определяется соотношением

$$A_{vv} = -(m-1)(A_{pp} - 2mD),$$

а B_x , B_p , B_v билинейны по x_1 , p_1 , v , τ . Уравнения (14)–(16) всегда имеют тривиальное решение, соответствующее РС-решению, а в особой точке, определяемой условием обращения в нуль детерминанта линейной однородной системы

$$\det \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xp} & A_{xv} \\ A_{px} & A_{pp} & A_{pv} \\ A_{vx} & A_{vp} & A_{vv} \end{pmatrix} = 0, \quad (17)$$

это решение перестает быть единственным. Условие (17) можно переписать в виде

$$m(m-1)(A_{pp} - 2D)(A_{xx}A_{pp} - A_{px}^2) = 0.$$

Напомним, что здесь все коэффициенты относятся к РС-решению. Используя результаты [21], [22], нетрудно убедиться в том, что

$$D' = A_{xx}A_{pp} - A_{px}^2$$

нигде не обращается в нуль (см. также [30]), а условие

$$A_{pp} - 2D = 0 \quad (18)$$

определяет температуру возможного ответвления 1НРС-решения:

$$t = t_c = \frac{1}{1.367}.$$

В этой точке РС-решение принимает значения

$$x'(t_c) = -0.581; \quad p'(t_c) = 1.449. \quad (19)$$

При выполнении условия (18) четвертое уравнение системы – условие экстремума по m – принимает вид

$$x_1 A_{px} + p_1 A_{pp} - v(m-1)A_{pp} = B_m, \quad (20)$$

так что фактически оно играет роль условия совместности.

4. Чтобы найти теперь малые решения системы (14)–(16), (20) в окрестности t_c , мы должны (см. [32]) решить систему двух уравнений с отличным от нуля детерминантом D' для переменных x_1 и p_1 , а затем определить v и m из уравнений разветвления. Из системы

$$x_1 A_{xx} + p_1 A_{px} = v(m-1)A_{px} + B_x, \quad (21)$$

$$x_1 A_{px} + p_1 A_{pp} = v(m-1)A_{pp} + B_p \quad (22)$$

получаем

$$x_1 = \frac{B_p A_{px} - B_x A_{pp}}{D'}, \quad (23)$$

$$p_1 = v(m-1) + \frac{B_x A_{px} - B_p A_{xx}}{D'}, \quad (24)$$

т.е. в главном порядке

$$x_1 = 0, \quad p_1 = v(m-1). \quad (25)$$

Подставляя далее полученные решения в исходные уравнения (причем в левые части следует подставлять полные решения (23) и (24), а в правые – достаточно (25)), получим уравнения разветвления, которые в нашем случае сводятся просто к

$$B_p = B_v, \quad B_m = B_v \quad (26)$$

или

$$\tau G_1 = -v \frac{t^6}{16} (G_2 + m G_3), \quad (27)$$

$$\tau \frac{2m-1}{m} G_1 = -v \frac{t^6}{48} [-G_2 + 2m(G_2 - G_3) + 3m^2 G_3]. \quad (28)$$

Выражения для коэффициентов G_i и их числовые значения на РС-решении приведены в приложении 1. Решая (27), (28), окончательно получаем:

$$m = \frac{G_2}{2G_2 + G_3} = 0.427, \quad (29)$$

$$v = \tilde{v}\tau, \quad \tilde{v} = -\frac{16}{t_c^6} \frac{G_1}{G_2 + mG_3} = 3.13. \quad (30)$$

Таким образом, нам удалось найти 1НРС-решение системы (7)–(10) вблизи T_c . 1НРС-решение $x = x'$, $p = p' + \tilde{v}\tau(m-1)$, $v = \tilde{v}\tau$ при $m = 0.427$ непрерывно ответвляется от РС-решения.

5. Исследуем теперь устойчивость 1НРС-решения относительно дальнейшего нарушения репличной симметрии (2НРС). Теперь каждую прежнюю группу реплик из m элементов мы делим на m/m_1 групп по m_1 элементов в каждой. Параметр $q_{\alpha\beta}$ будем обозначать p_3 , если реплики α и β принадлежат одной и той же наименьшей группе (количество p_3 равно $n(m-1)/2$), p_2 – если реплики принадлежат одной и той же, но не наименьшей, группе (их $n(m-m_1)/2$), и p_0 – если α и β принадлежат разным группам по m реплик (их $n(n-m)/2$ штук). Как обычно (см., например, [33]), мы имеем дело с флуктуациями внутри одной группы из m реплик и межгрупповыми флуктуациями, связанными с соответствующими перекрываниями реплик $q_{\alpha\beta}$. Член в выражении для свободной энергии, соответствующий внутригрупповой репликонной моде, которая определяет в нашем случае устойчивость 1НРС-решения, имеет вид

$$\Delta F_1 = \frac{1}{2}v_1^2(m-1)(m-m_1)(m_1-1)(P_0 - 2Q_4 + R_5), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} P_0 &= 2 - 2t^2[4 - 4x + p + v - (p+v)^2], \\ Q_4 &= -2t^2[2(p+v) - (p+v)^2 - t_3], \\ R_5 &= -2t^2[r_4 - (p+v)^2], \end{aligned}$$

а v_1 и w_1 (см. приложение 2) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} p_3 &= w_1 - (m-m_1)v_1, \\ p_2 &= w_1 + (m_1-1)v_1. \end{aligned}$$

Собственное значение

$$\Lambda' = P_0 - 2Q_4 + R_5 = 2 - 2t^2[4 - 4x - 3(p+v) + 2t_3 + r_4],$$

где

$$t_3 = \int dy^G \frac{\int dz^G \Psi^{m-3}(\Psi')^3}{\int dz^G \Psi^m}, \quad (32)$$

$$r_4 = \int dy^G \frac{\int dz^G \Psi^{m-4}(\Psi')^4}{\int dz^G \Psi^m}. \quad (33)$$

Остальные слагаемые свободной энергии приведены в приложении 2 (формула (34)). С помощью РС- и 1НРС-решений нетрудно получить значение Λ' вблизи точки t_c . Учитывая, что $\Lambda'(t_c) = 0$, и раскладывая t_3 и r_4 по переменным p , v и t с помощью формул

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_3}{\partial p} &= 3t^2 \langle \alpha W (W + \alpha^2) \rangle, \\ \frac{\partial t_3}{\partial v} &= \frac{\partial t_3}{\partial p} - 3mt^2 \langle \alpha^3 W \rangle, \\ \frac{\partial r_4}{\partial p} &= 2t^2 \langle \alpha^2 W (3W + 2\alpha^2) \rangle, \\ \frac{\partial r_4}{\partial v} &= \frac{\partial r_4}{\partial p} - 4mt^2 \langle \alpha^4 W \rangle, \end{aligned}$$

получим для решения (25), (29), (30):

$$\Lambda' = 6t_c^2 m \tau \ddot{v} (1 - 2t_c^2 G_4).$$

Здесь G_4 берется уже для РС-решения и равно

$$G_4 = \langle W(\alpha^4 + 2\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha) \rangle = 0.27,$$

так что окончательно

$$\Lambda' = 2.97\tau,$$

что для $m_1 < m < 1$ означает устойчивость 1НРС-решения в этой окрестности при $T < T_c$.

6. Итак, мы рассмотрели поведение модели (1) вблизи точки t_c неустойчивости ее репликосимметричного решения. Мы показали, что вблизи t_c существует более выгодное решение, соответствующее первому этапу нарушения репличной симметрии. Мы показали также, что это новое решение устойчиво относительно дальнейшего нарушения репличной симметрии, т.е. полная схема Паризи в данном случае не работает, по крайней мере, в своем классическом варианте. Существенно, что, несмотря на отсутствие отражательной симметрии, 1НРС-решение ответвляется от РС-решения непрерывным образом. Это свидетельствует против общепринятого разделения на классы квазиуниверсальности.

Можно, однако, ожидать, что при дальнейшем понижении температуры наше 1НРС-решение станет неустойчивым. Для полного исследования этого вопроса необходимо решить систему уравнений (7)–(10) для всех значений температуры и использовать полученное решение для определения знака $\Lambda_{1НРС}$ везде. Возможно, низкотемпературный ход 1НРС-решений объяснит поведение экспериментальных данных при самых низких температурах $T \approx 0.05$ К, когда наблюдаются отклонения от хода РС-решения, а именно, линейная зависимость теплоемкости от T сменяется квадратичной.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Учтем, что для РС-решения $v = 0$. Поэтому Ψ не зависит от z , так что внутренние интегралы в (6)–(9) берутся непосредственно. Обозначим

$$\begin{aligned} \frac{\Psi'}{\Psi} \Big|_{t=t_c, x=x_0, p=p_0, v=0} &= \alpha, \\ W &= \alpha^2 + \alpha - 2, \\ \langle \dots \rangle &= \int dy^G \dots \end{aligned}$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned}
 A_{xx} &= 1 + \frac{t^2}{2} \langle W \rangle, \\
 A_{px} &= -\frac{t^2}{2} \langle W \alpha \rangle, \\
 A_{pp} &= -1 + t^2 \langle W(W + 2\alpha^2) \rangle, \\
 A_{vx} &= -(m-1)A_{px}, \\
 A_{pv} &= -(m-1)A_{pp}, \\
 A_{vv} &= -(m-1)[A_{pp} - 2mD], \\
 D &= t^2 \langle W \alpha^2 \rangle, \\
 A_{pp} - 2D &= -1 + t^2 \langle W^2 \rangle.
 \end{aligned}$$

На РС-решении в точке ветвления $t_c = 1/1.367$, $x' = -0.581$, $p' = 1.449$ получаем

$$\begin{aligned}
 \langle W \rangle &= -1.132, \\
 \langle W \alpha \rangle &= 0.6035, \\
 \langle W \alpha^2 \rangle &= -0.997, \\
 \langle W \alpha^3 \rangle &= 1.232, \\
 \langle W \alpha^4 \rangle &= -1.981.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты B_x , B_p , B_v выражаются через третьи, а B_m — через четвертые производные от A в точке t_c , числовые значения которых получаются из РС-решения. С их помощью получим:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= -t + t^5 \langle W[(x'(t_c) - 2)(2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 2) + \\
 &\quad + p'(t_c)(-10\alpha^4 + 18\alpha^3 + 15\alpha^2 + 19\alpha - 6)] \rangle = -0.4, \\
 G_2 &= 4 \langle W(4\alpha^4 + 8\alpha^3 - 3\alpha^2 - 7\alpha - 2) \rangle = 11.8, \\
 G_3 &= 4 \langle W(-10\alpha^4 - 20\alpha^3 + 12\alpha^2 + 22\alpha + 10) \rangle = 4.
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Свободная энергия для 2НРС состоит из двух частей. Первая представлена в (31), а вторая имеет вид

$$\begin{aligned}
 4\Delta F_2 &= p_0^2 m [-2P_1 + 4mQ_1 - 4(m-1)Q_3 - 6m^2 R_1 + 8m(m-1)R_3 - 2(m-1)^2 R_7] + \\
 &\quad + w_1^2 (m-1) [2P_0 + 4Q_4(m-2) + R_5(m-2)(m-3) - R_6 m(m-1)] + \\
 &\quad + p_0 w_1 4m(m-1) [-2Q_2 + mR_2 - (m-2)R_4].
 \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь все коэффициенты P , Q , R относятся к 1НРС-решению и определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
P_1 &= 2 - 2t^2(4 - 4x + p - p^2), \\
Q_1 &= -2t^2(2p - p^2 - t_{111}), \\
Q_2 &= -2t^2[2p - p(p + v) - t_{21}], \\
Q_3 &= -2t^2[2(p + v) - p^2 - t_{21}], \\
R_1 &= -2t^2(r_{1111} - p^2), \\
R_2 &= -2t^2[r_{211} - p(p + v)], \\
R_3 &= -2t^2(r_{211} - p^2), \\
R_4 &= -2t^2[r_{31} - p(p + v)], \\
R_6 &= -2t^2[r_{22} - (p + v)^2], \\
R_7 &= -2t^2(r_{22} - p^2),
\end{aligned}$$

где

$$t_{111} = \int dy^G \left[\frac{\int dz^G \Psi^{m-1} \Psi'}{\int dz^G \Psi^m} \right]^3, \quad (35)$$

$$t_{21} = \int dy^G \left[\frac{\int dz^G \Psi^{m-1} \Psi' \int dz^G \Psi^{m-2} (\Psi')^2}{[\int dz^G \Psi^m]^2} \right], \quad (36)$$

$$r_{1111} = \int dy^G \left[\frac{\int dz^G \Psi^{m-1} \Psi'}{\int dz^G \Psi^m} \right]^4, \quad (37)$$

$$r_{31} = \int dy^G \left[\frac{\int dz^G \Psi^{m-1} \Psi' \int dz^G \Psi^{m-3} (\Psi')^3}{[\int dz^G \Psi^m]^2} \right], \quad (38)$$

$$r_{22} = \int dy^G \left[\frac{\int dz^G \Psi^{m-2} (\Psi')^2}{\int dz^G \Psi^m} \right]^2. \quad (39)$$

Благодарности. Авторы благодарят В. Н. Рыжова и Т. И. Шелкачеву за полезные обсуждения и ценные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 02-02-16621).

Список литературы

- [1] *J.-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, M. Mézard.* Physica A. 1996. V. 226. P. 243.
- [2] *M. Mézard.* First steps in glass theory. cond-mat/0005173.
- [3] *A. Crisanti, F. Ritort.* Physica A. 2000. V. 280. P. 155.
- [4] *M. Mézard, G. Parisi.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 6515; Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 747.
- [5] *B. Coluzzi, G. Parisi, P. Verrocchio.* J. Chem. Phys. 2000. V. 112. P. 2933.
- [6] *G. Parisi, F. Slanina.* Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 6554.
- [7] *S. T. Chui, G. O. Williams, H. L. Frisch.* Phys. Rev. B. 1982. V. 26. P. 171.
- [8] *E. E. Tareyeva, V. N. Ryzhov.* ЭЧАЯ. 2000. Т. 31. С. 184.

- [9] W. Götze. Structural glass transitions. In: Liquid, freezing and glass transition. Eds. J. P. Hansen, D. Levesque and J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland, 1991. P. 287.
- [10] T. R. Kirkpatrick, D. Thirumalai. Phys. Rev. B. 1987. V. 36. P. 5388; Phys. Rev. B. 1988. V. 37. P. 5342; T. R. Kirkpatrick, P. G. Wolynes. Phys. Rev. B. 1987. V. 36. P. 8552.
- [11] Е. Е. Тареева. ДАН СССР. 1977. Т. 234. С. 572; Е. Е. Тареева, Т. И. Щелкачева. ТМФ. 1977. Т. 31. С. 359.
- [12] P. Goldbart, D. Elderfield. J. Phys. C. 1985. V. 18. P. L229.
- [13] G. Franzese, A. Coniglio. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 2753; Philos. Mag. B. 1999. V. 79. P. 1807.
- [14] J. M. de Araújo, F. A. da Costa, F. D. Nobre. Eur. J. Phys. B. 2000. V. 14. P. 661.
- [15] J. M. de Araújo, F. A. da Costa. Eur. J. Phys. B. 2000. V. 15. P. 313.
- [16] M. Campellone, B. Coluzzi, G. Parisi. Phys. Rev. B. 1998. V. 58. P. 12081.
- [17] Е. А. Лучинская, Е. Е. Тареева. ТМФ. 1991. Т. 87. С. 473; ТМФ. 1992. Т. 91. С. 157.
- [18] E. De Santis, G. Parisi, F. Ritort. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 3025.
- [19] D. J. Gross, I. Kanter, H. Sompolinsky. Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 304; I. Kanter, H. Sompolinsky. Phys. Rev. B. 1986. V. 33. P. 2073.
- [20] V. M. de Oliveira, J. F. Fontanari. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 2285.
- [21] E. A. Lutchinskaia, V. N. Ryzhov, E. E. Tareeva. J. Phys. C. 1984. V. 17. P. L665.
- [22] Е. А. Лучинская, В. Н. Рыжов, Е. Е. Тареева. ТМФ. 1986. Т. 67. С. 463.
- [23] М. И. Владимир, С. П. Кожухарь, В. А. Москаленко. ТМФ. 1987. Т. 71. С. 417.
- [24] В. А. Москаленко, М. И. Владимир, С. П. Кожухарь. Метод самосогласованного поля в теории стекольного состояния спиновых и квадрупольных систем. Кишинев: Штиинца, 1990.
- [25] N. S. Sullivan, C. M. Edwards, J. R. Brookeman. Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1986. V. 139. P. 365.
- [26] E. A. Lutchinskaia, E. E. Tareeva. Phys. Rev. B. 1995. V. 52. P. 366.
- [27] L. De Cesare, K. Lukerska-Walasek, I. Rubuffo, K. Walasek. Phys. Rev. B. 1992. V. 45. P. 1041; K. Walasek, K. Lukerska-Walasek. Phys. Rev. B. 1994. V. 49. P. 9960.
- [28] K. Walasek. Phys. Rev. B. 1992. V. 46. P. 14480.
- [29] T. K. Kopec. Phys. Rev. B. 1993. V. 48. P. 3698; Phys. Rev. B. 1994. V. 48. P. 15658; Phys. Rev. B. 1994. V. 48. P. 16792.
- [30] K. Walasek. Phys. Rev. B. 1993. V. 51. P. 9314.
- [31] J. R. L. Almeida, D. J. Thouless. J. Phys. A. 1978. V. 11. P. 983.
- [32] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [33] A. Crisanti, H. J. Sommers. Z. Phys. B. 1992. V. 87. P. 341.

Поступила в редакцию 28.I.2002 г.