Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маршаков, Об уравнениях ассоциативности, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 1, 3–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 09:16:47

ОБ УРАВНЕНИЯХ АССОЦИАТИВНОСТИ

Рассматриваются уравнения ассоциативности, или уравнения Виттена–Дийкграфа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ), и обсуждается один из наиболее важных в непертурбативной физике классов их решений, связанный с существованием так называемых формул вычетов. Показано, что для этого класса решений доказательство справедливости уравнений ассоциативности сводится к проблеме решения системы линейных алгебраических уравнений. Детально рассматриваются примеры решений, связанные с топологическими теориями Гинзбурга–Ландау, теориями Виттена–Зайберга и тау-функциями квазиклассических иерархий. Обсуждаются также некоторые другие вопросы: ковариантность уравнений ассоциативности, их связь с бездисперсионными соотношениями Хироты, а также вспомогательная линейная задача для уравнений ВДВВ.

Ключевые слова: уравнения ассоциативности, теория Виттена–Зайберга, интегрируемые системы, топологические теории, специальная кэлерова геометрия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. От ассоциативных алгебр и формул вычетов к уравнениям ВДВВ	7
2.1. Ассоциативные алгебры и формулы вычетов	7
2.2. К уравнениям ВДВВ от решения системы линейных уравнений	9
3. Уравнения ВДВВ в топологических теориях	11
3.1. Аксиоматика топологических теорий	11
3.2. Модели Гинзбурга–Ландау	13
4. Уравнения ассоциативности в теории Виттена–Зайберга	17
4.1. Теория Виттена–Зайберга: матрицы периодов и формулы вычетов	17
4.2. Уравнения ассоциативности в теории Виттена–Зайберга и алгебры форм	21
4.3. Согласованность для препотенциалов Виттена–Зайберга	23
5. Дуальность и уравнения ВДВВ	26

Статья написана по заказу Редколлегии.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: mars@lpi.ru, andrei@heron.itep.ru

5.1. Специальная кэлерова геометрия и S -дуальность	26
5.2. Электромагнитная дуальность и уравнения ВДВВ	28
6. Уравнения ассоциативности в бездисперсионных интегрируемых иерархиях	31
6.1. От соотношений Хироты к уравнениям ВДВВ	31
6.2. Вывод конечных уравнений ВДВВ из бесконечных	36
6.3. Бездисперсионная иерархия Тоды и конформные отображения	38
7. Вспомогательная линейная задача	43
7.1. Формула для препотенциала и топологические потомки	43
7.2. Линейная задача и связь между случаями Гинзбурга–Ландау и Виттена–Зайберга	45
7.3. Вспомогательная линейная задача и уравнения Хироты	47
8. Заключение	48

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемые системы играют важную роль в непертурбативной физике. В случае, когда неприменимы традиционная квантовая теория поля и пертурбативная теория струн, интегрируемые уравнения возникают как один из наиболее эффективных инструментов исследования структуры эффективных действий, несущих информацию о точных корреляционных функциях. Несмотря на то что природа возникающей интегрируемой структуры пока не ясна с точки зрения первопринципов, сам факт того, что некоторые непертурбативные величины или их производящие функции удовлетворяют системам интегрируемых уравнений, обычно отражает наличие некоторой скрытой геометрической структуры, что позволяет надеяться на лучшее понимание данных непертурбативных объектов в общем контексте современной теории струн.

Настоящая работа посвящена одному из наиболее интересных примеров нелинейных интегрируемых уравнений, возникающих в данном контексте, – уравнениям ассоциативности, или уравнениям Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ) [1], роль которых в исследовании топологических струнных теорий и непертурбативных суперсимметричных калибровочных теорий поля еще не осознана окончательно. Тем не менее область применения этих уравнений в последнее время постоянно расширяется, и в настоящий момент уже представляется возможным проследить некоторую единую картину, объединяющую все различные и, на первый взгляд, несвязанные примеры появления уравнений ВДВВ в современной физике. Ниже мы попытаемся сначала описать эту общую картину, а затем разберем некоторые примеры.

Начнем с введения основных понятий и обозначений. Рассмотрим функцию $\mathcal{F}$, определенную (локально) как функцию, вообще говоря, комплексных переменных $\mathbf{t} \equiv \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$, которые будем называть *временами*; в зависимости от контекста их количество может быть как конечным, так и бесконечным. Иногда эти же переменные, будучи отождествленными с периодами некоторых дифференциальных форм на гладких римановых поверхностях, будут также традиционно обозначаться как $\mathbf{a} \equiv \{a_i\}$. Уравнения ассоциативности, или ВДВВ [1], в их наиболее общей форме [2] могут быть пред-

ставлены в виде

$$F_i F_j^{-1} F_k = F_k F_j^{-1} F_i \quad \forall i, j, k, \quad (1)$$

т.е. компактно записаны для матриц F_i , матричные элементы которых

$$\|F_i\|_{jk} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} \equiv \mathcal{F}_{ijk} \quad (2)$$

отождествлены с третьими производными функции $\mathcal{F}(\mathbf{t})$. Везде ниже будет предполагаться, что эти матрицы и их линейные комбинации общего вида невырождены. Введем также краткие обозначения для вторых производных функции $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j} \quad (3)$$

и сделаем несколько существенных замечаний.

1. Любая функция $\mathcal{F}(t)$ единственной переменной $t \equiv t_1$, а также любая функция двух переменных $\mathcal{F}(t_1, t_2)$ являются решением уравнений (1). Другими словами, для функций одной или двух переменных уравнения ВДВВ (1) удовлетворяются тривиально. Действительно, в случае единственной переменной всегда $i = j = k$, а при наличии лишь двух переменных с необходимостью или $j = i$, или $j = k$. Однако для функций более чем двух переменных уравнения ассоциативности (1) являются совершенно нетривиальными.

2. Уравнения (1), очевидно, ковариантны относительно линейных замен переменных и линейных преобразований $F_i \rightarrow \sum_k A_{ik} F_k$. В частности, это означает, что их можно переписать в виде

$$F_i \eta^{-1} F_k = F_k \eta^{-1} F_i, \quad (4)$$

где в роли матрицы

$$\eta = \sum_l \eta_l(\mathbf{t}) F_l \quad (5)$$

можно выбрать *любую* обратимую линейную комбинацию F_i с, вообще говоря, зависящими от времен коэффициентами $\eta_l(\mathbf{t})$. Вводя так называемые структурные константы

$$C_i(\eta) = \eta^{-1} F_i \quad \text{или} \quad C_{ij}^k(\eta) = \sum_l (\eta^{-1})^{kl} \mathcal{F}_{ijl}, \quad (6)$$

уравнения (1) можно переписать в виде

$$[C_i(\eta), C_k(\eta)] = 0. \quad (7)$$

3. Ковариантность относительно линейных преобразований означает, в частности, что достаточно потребовать выполнения уравнений ВДВВ хотя бы для одного фиксированного индекса $j = j_0$ при произвольных i, k . Например, уравнения ассоциативности изначально были написаны в работах [1] только для фиксированного значения $j_0 = 1$, при этом матрица $F_1 = \eta^{(1)}$ была названа “метрикой”. Однако, если мы знаем, что уравнения (1) выполняются только для фиксированного j_0 , их легко преобразовать к общему

виду (4), взяв *любой* другой индекс и определив в качестве “метрики” $\eta^{(j)} = F_j$ (если эта матрица невырождена), а также структурные константы (6), что эквивалентно восстановлению наиболее общей формы уравнений ассоциативности (1). Действительно, поскольку $F_i = \eta^{(j_0)} C^{(0)}$, легко получить, что

$$F_i F_j^{-1} F_k = \eta^{(j_0)} C_i^{(0)} (\eta^{(j_0)} C_j^{(0)})^{-1} \eta^{(j_0)} C_k^{(0)} = \eta^{(j_0)} (C_i^{(0)} (C_j^{(0)})^{-1} C_k^{(0)}), \quad (8)$$

а правая часть этого равенства, очевидно, симметрична относительно перестановки $i \leftrightarrow k$, так как

$$[C_i^{(0)}, C_k^{(0)}] = 0 \quad \forall i, k. \quad (9)$$

4. Уравнения ВДВВ не ковариантны относительно произвольных замен переменных, или времен, так как производные в формулах (2) и (3) являются обыкновенными, а не ковариантными производными. Мы вернемся к проблеме ковариантности уравнений (1) в разделе 5.

5. Формулу (6) иногда полезно переписать в виде

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_l C_{ij}^l \eta_{kl} \quad (10)$$

и интерпретировать как производную некоторого соотношения для *вторых* производных (3). Действительно, зафиксируем одно из времен, скажем t_1 , и положим $\eta_l(\mathbf{t}) = \delta_{l1}$, предполагая, что матрица F_1 невырождена. Тогда можно сделать замену переменных и перейти от времен $\{t_i\}$ к новым переменным $\{\mathcal{F}_{j1}\}$, определив при этом матрицу, линейно связывающую $\mathcal{F}_{ijk}$ и $\eta_{ij} = \mathcal{F}_{ij1}$:

$$\mathcal{F}_{ijk} = \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial t_k} = \sum_l \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial \mathcal{F}_{l1}} \frac{\partial \mathcal{F}_{l1}}{\partial t_k} = \sum_l C_{ij}^l \mathcal{F}_{kl1}, \quad (11)$$

$$C_{ij}^l = \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial \mathcal{F}_{l1}}. \quad (12)$$

Более того, последнее равенство может служить определением величин C_{ij}^l , даже если матрица η (5) не обратима, и это будет существенно использовано, например, в бесконечномерном случае.

6. Уравнения ВДВВ (1) в эквивалентной форме могут быть переписаны как

$$\sum_l C_{ij}^l \mathcal{F}_{lkn} = \sum_l C_{ik}^l \mathcal{F}_{ljn}, \quad (13)$$

или, другими словами, величины

$$X_{ijkn} \equiv \sum_l C_{ij}^l \mathcal{F}_{lkn} \quad (14)$$

симметричны по отношению к перестановке любых двух индексов. Уравнения (1) (или (13) с величинами C_{ij}^l , определенными формулами (11) и (12)) совершенно нетривиальны, так как являются переопределенной системой нелинейных дифференциальных уравнений на функцию $\mathcal{F}$, записанных в виде соотношений для ее третьих производных.

Таким образом, мы перечислили наиболее общие свойства уравнений (1), которые не зависят от того или иного конкретного решения. Ниже мы сначала опишем некоторые общие свойства достаточно широкого класса решений уравнений (1), определяемого существованием так называемых формул вычетов. В разделе 2 мы обсудим формулы вычетов и докажем, что если такие формулы существуют, то доказательство выполнения уравнений (1) сводится к исследованию и решению системы линейных алгебраических уравнений.

2. ОТ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР И ФОРМУЛ ВЫЧЕТОВ К УРАВНЕНИЯМ ВДВВ

2.1. Ассоциативные алгебры и формулы вычетов. Уравнения ВДВВ изначально возникли [1] как следствия кроссинг-соотношений

$$\sum_k C_{ij}^k C_{kl}^n = \sum_k C_{il}^k C_{kj}^n \quad (15)$$

для структурных констант операторной алгебры примарных, или “вакуумных”, операторов в двумерных топологических теориях

$$\Phi_i \cdot \Phi_j = \sum_k C_{ij}^k \Phi_k, \quad (16)$$

где $\{\Phi_i\}$ могут быть представлены некоторыми операторами, действующими обычно в конечномерном гильбертовом пространстве топологической теории. Это означает, в частности, что в контексте двумерных топологических теорий (так же, как и в теориях Виттена–Зайберга, см. раздел 4) обычно рассматриваются решения уравнений ВДВВ с конечным числом переменных, т.е. суммы в формуле (13) конечны, хотя в принципе можно рассматривать и “бесконечномерные” топологические теории. Уравнения (15) являются просто алгебраическими соотношениями и превращаются в систему нелинейных дифференциальных уравнений (1) только при отождествлении трехточечных корреляционных функций операторов $\{\Phi_i\}$ с третьими производными некоторой производящей функции $\mathcal{F}(\mathbf{t})$

$$\langle \Phi_i \Phi_j \Phi_k \rangle = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}. \quad (17)$$

Действительно, используя (16) и (17), можно формально записать

$$\langle \Phi_i \Phi_j \Phi_k \rangle = \sum_l C_{ij}^l \langle \Phi_1 \Phi_l \Phi_k \rangle, \quad (18)$$

явно введя единичный оператор $\Phi_1 \equiv \mathbf{1}$, поскольку только трехточечные (и высшие) корреляторы определены на двумерных мировых листах простейшей сферической топологии. Интерпретируя трехточечный коррелятор в правой части (18) как выделенную “метрику” $\eta^{(1)} = F_1$, мы приходим к соотношению (10) в специальной форме (11), которая вместе с формулой (15) приводит к уравнениям (1).

Приведенный выше эвристический вывод и фиксация выделенного единичного оператора, или оператора прокола, $\Phi_1 \equiv 1$, подсказывают, что на решение можно наложить два дополнительных естественных условия, потребовав, чтобы выделенная “метрика”, т.е. матрица $\eta_{ij} = \|\mathbf{F}_1\|_{ij}$, не зависела от времен $\{t_k\}$, а также наложив некоторое условие квазиоднородности на функцию $\mathcal{F}$. Иногда эти условия включаются даже в определение самого термина *уравнения ВДВВ* [3], однако в данной работе система уравнений (1) не будет дополняться никакими условиями, за исключением требования невырожденности матриц в общем положении.

В топологических теориях трехточечные функции (17) часто могут быть представлены в виде так называемых *формул вычетов*, которые являются следствием некоторого явления “локализации”, характерного для таких теорий. До сих пор не существует общего вывода формул вычетов с использованием локализации, но эвристически основная идея может быть легко продемонстрирована на базовом примере моделей Гинзбурга–Ландау (подробнее см. п. 3.2), в которых конечномерная алгебра (16) может быть реализована как кольцо всех полиномов, по модулю обращающихся в нуль в критических точках некоторого суперпотенциала $dW(\lambda_\alpha) = 0$, а формула (17) также “локализуется” в этих критических точках, принимая вид формулы вычетов [1], [3], [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ijk} &= \sum_{\alpha} \frac{\phi_i(\lambda_{\alpha})\phi_j(\lambda_{\alpha})\phi_k(\lambda_{\alpha})}{W''(\lambda_{\alpha})Q'(\lambda_{\alpha})} = \sum_{\alpha} \operatorname{res}_{|\lambda_{\alpha}} \frac{\phi_i(\lambda)\phi_j(\lambda)\phi_k(\lambda)}{W'(\lambda)Q'(\lambda)} = \\ &= \sum_{\alpha} \operatorname{res}_{|\lambda_{\alpha}} \frac{dH_i dH_j dH_k}{dW dQ} = \oint_{dW=0} \frac{dH_i dH_j dH_k}{dW dQ}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $dQ(\lambda_{\alpha}) \neq 0$ и суммы по вычетам берутся только по части полюсов (иначе результат равнялся бы нулю). Операторы Φ_i (16) в формуле (19) представлены полиномами $\phi_i(\lambda) \equiv dH_i/d\lambda$. Для простоты мы ограничимся случаем, когда суперпотенциал является функцией единственной переменной, и поэтому можно ввести обозначения $W'(\lambda) = dW/d\lambda$ и $Q'(\lambda) = dQ/d\lambda$. Однако свойства формулы (19), которые будут использованы ниже, по-видимому, не зависят от числа переменных, а в случае единственной переменной (рассматриваемом в данной работе) универсальность формулы (19) выходит далеко за рамки примера моделей Гинзбурга–Ландау.

Формула (19) в наиболее общем случае была постулирована Кричевером [4]. В данном разделе мы будем предполагать, что такая формула верна для некоторой функции $\mathcal{F}$, и воспользуемся этим фактом для доказательства того, что эта функция удовлетворяет уравнениям ВДВВ (1), продемонстрировав, в частности, что *единственным* дополнительным требованием являются некоторые условия согласования и невырожденности, и это является одним из основных утверждений данной работы. После этого мы рассмотрим несколько конкретных примеров, в которых формула вычетов (19) может быть получена различными методами.

Подчеркнем, что как алгебра (16), так и формула вычетов (19) необходимы, для того чтобы выполнялись уравнения ВДВВ (1). В п. 2.2 будет продемонстрировано, что этих двух ингредиентов *достаточно*, чтобы доказать выполнение уравнений (1), и практически ничего дополнительного (кроме уже упоминавшихся условий согласования и не-

вырожденности) требовать не нужно. В разных моделях алгебра (16) может быть реализована различными способами, но для класса решений, основанных на существовании формулы вычетов (19), эту алгебру *всегда* можно представить как алгебру функций (в общем случае не обязательно полиномиальных) по модулю функций, обращающихся в нуль на некотором подмногообразии. Если это подмногообразие реализовано как дивизор или множество нулей некоторого мероморфного дифференциала $dW = 0$, то соответствующая алгебра функций оказывается конечномерной и приводит вместе с формулой вычетов (19) (с тем же самым dW в знаменателе) к конечной системе дифференциальных уравнений на функцию $\mathcal{F}$ конечного числа переменных. В п. 2.2 будет показано, что если верна формула вычетов (19), то доказательство выполнимости уравнений ВДВВ сводится к проблеме решения системы обыкновенных (алгебраических) линейных уравнений, и при этом все дополнительные элементы конструкции решений уравнений ассоциативности, возникающие в контексте двумерных топологических теорий [3] (постоянство “метрики”, существование единичного оператора, структуры Фробениуса или Дарбу–Егорова и т.п.), совершенно не существенны.

2.2. К уравнениям ВДВВ от решения системы линейных уравнений. Забудем о специфике теорий Гинзбурга–Ландау и рассмотрим формулу (19) для функции $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ в наиболее общей постановке [5], т.е. потребуем, чтобы дифференциал $dW(\lambda)$ в формуле (19) просто был *мероморфным* дифференциалом (например, на произвольной римановой поверхности) с конечным числом нулей в некоторых точках $\{\lambda_\alpha\}$, характеризующихся значениями некоторой адекватной для этих целей координаты λ , т.е.

$$W'(\lambda_\alpha) \equiv \frac{dW}{d\lambda} = 0 \quad (20)$$

при $Q'(\lambda_\alpha) \neq 0$. Для того чтобы показать, что такая функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет системе уравнений (1), следует наложить единственное дополнительное условие, которое заключается в том, что матрица $\|\phi_i(\lambda_\beta)\|$ невырождена, т.е.

$$\det_{i\alpha} \|\phi_i(\lambda_\alpha)\| \neq 0. \quad (21)$$

В частности, формула (21) предполагает условие согласованности $\#(i) = \#(\alpha)$, т.е. число “гамильтонианов” $\{dH_i\}$ или “полей” $\{\phi_i\}$ должно быть *в точности* равно числу нулей $\{\lambda_\alpha\}$ дифференциала dW . Тогда можно определить структурные константы C_{ij}^k соответствующей конечномерной алгебры (16) (где сумма конечна) из системы *линейных* уравнений

$$\phi_i(\lambda_\alpha)\phi_j(\lambda_\alpha) = \sum_k C_{ij}^k \phi_k(\lambda_\alpha) \quad \forall \lambda_\alpha, \quad (22)$$

выполняющихся для *всех* нулей $\{\lambda_\alpha\}$ дифференциала dW . Формула (22) представляет собой реализацию конечномерной ассоциативной алгебры (16), определяемой произвольным мероморфным дифференциалом dW . С учетом условий согласованности и невырожденности (21) система уравнений (22) элементарно решается и приводит к формуле

$$C_{ij}^k = \sum_\alpha \phi_i(\lambda_\alpha)\phi_j(\lambda_\alpha)(\phi_k(\lambda_\alpha))^{-1}, \quad (23)$$

где последний фактор обозначает матрицу, обратную матрице $\|\phi_i(\lambda_\alpha)\|$.

Рассуждение совершенно не меняется, если вместо (22) мы рассмотрим *изоморфную* алгебру¹⁾

$$\phi_i(\lambda_\alpha)\phi_j(\lambda_\alpha) = \sum_k C_{ij}^k(\xi)\phi_k(\lambda_\alpha) \cdot \xi(\lambda_\alpha) \quad \forall \lambda_\alpha \quad (24)$$

с единственным условием, что $\xi(\lambda_\alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha$ (при этом формула (22) является частным случаем более общей формулы (24) при $\xi(\lambda) \equiv 1$). Тогда вместо (23) мы немедленно получим

$$C_{ij}^k(\xi) = \sum_\alpha \frac{\phi_i(\lambda_\alpha)\phi_j(\lambda_\alpha)}{\xi(\lambda_\alpha)} (\phi_k(\lambda_\alpha))^{-1}. \quad (25)$$

Чтобы понять, когда алгебра (24) приводит к уравнениям ВДВВ (1), следует проверить согласованность между формулами (25) и (19), а именно

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_l C_{ij}^l(\xi)\eta_{kl}(\xi). \quad (26)$$

Здесь “метрика” $\eta_{kl}(\xi)$ (зависимость от ξ выбрана так, чтобы “сократить” эту зависимость в структурных константах) невырождена и удовлетворяет условию

$$\eta_{kl}(\xi) = \sum_a \xi_a \mathcal{F}_{kla}, \quad (27)$$

где третьи производные $\mathcal{F}_{kla}$ (17) могут быть представлены в виде формулы вычетов (19), а $\{\xi_a\} = \{\xi_a(t)\}$ — некоторые коэффициенты, вообще говоря, зависящие от времен. Подставляя (19) в (27), получим

$$\eta_{kl}(\xi) = \sum_\alpha \operatorname{res}_{|\lambda_\alpha} \frac{\phi_k(\lambda)\phi_l(\lambda)\xi(\lambda)}{W'(\lambda)Q'(\lambda)} = \sum_\alpha \frac{\phi_k(\lambda_\alpha)\phi_l(\lambda_\alpha)\xi(\lambda_\alpha)}{W''(\lambda_\alpha)Q'(\lambda_\alpha)}, \quad (28)$$

где

$$\xi(\lambda) = \sum_a \xi_a \phi_a(\lambda). \quad (29)$$

Так как мы уже потребовали, чтобы функция $\xi(\lambda)$ не имела нулей в точках $\{\lambda_\alpha\}$, используя условие (21), из формулы (29) можно всегда определить соответствующие коэффициенты

$$\xi_a = \sum_\alpha \xi(\lambda_\alpha) (\phi_a(\lambda_\alpha))^{-1}, \quad (30)$$

решив систему линейных уравнений.

Оставшаяся часть представляет собой простую матричную алгебру, снова требующую *только* условия согласованности $\#(\alpha) = \#(i)$. Запишем равенство

$$\sum_k C_{ij}^k(\xi)\eta_{kl}(\xi) = \sum_{k,\alpha,\beta} \frac{\phi_i(\lambda_\alpha)\phi_j(\lambda_\alpha)}{\xi(\lambda_\alpha)} \cdot (\phi_k(\lambda_\alpha))^{-1} \cdot \phi_k(\lambda_\beta) \cdot \frac{\phi_l(\lambda_\beta)\xi(\lambda_\beta)}{W''(\lambda_\beta)Q'(\lambda_\beta)} \quad (31)$$

¹⁾ Ситуация здесь очень похожа на ту, что возникает в контексте алгебр 1-дифференциалов на римановых поверхностях, рассмотренных в [2], [6]. Однако, в отличие от алгебры форм, алгебра функций (24) *всегда* ассоциативна.

и посмотрим на его правую часть как на произведение четырех матриц. Два взаимно обратных множителя в середине сокращаются, и с учетом этого получаем

$$\begin{aligned}\sum_k C_{ij}^k(\xi) \eta_{kl}(\xi) &= \sum_{\alpha} \frac{\phi_i(\lambda_{\alpha}) \phi_j(\lambda_{\alpha})}{\xi(\lambda_{\alpha})} \frac{\phi_l(\lambda_{\alpha}) \xi(\lambda_{\alpha})}{W''(\lambda_{\alpha}) Q'(\lambda_{\alpha})} = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\phi_i(\lambda_{\alpha}) \phi_j(\lambda_{\alpha}) \phi_l(\lambda_{\alpha})}{W''(\lambda_{\alpha}) Q'(\lambda_{\alpha})} = \mathcal{F}_{ijl},\end{aligned}\quad (32)$$

что означает, что алгебра (24) приводит к уравнениям ВДВВ (1). Заметим, что представленный вывод верен для *любой* функции $\xi(\lambda)$ с единственным ограничением, состоящим в том, что $\xi(\lambda_{\alpha}) \neq 0$ и, таким образом, дополнительные условия типа постоянства “метрики” совершенно несущественны. Когда вся зависимость от времен заключена в выражении для дифференциала dW , условие согласованности выполняется автоматически, по крайней мере в том случае, если $W(\lambda)$ является полиномом (случай моделей Гинзбурга–Ландау, см. п. 3.2). Ниже будут рассмотрены также два других примера, когда, в отличие от случая моделей Гинзбурга–Ландау, условие согласованности $\#(\alpha) = \#(i)$ нарушается в ту или иную сторону. В одном случае (например, для препотенциала теории Виттена–Зайберга для мягко нарушенной $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, см. п. 4.3) необходимо добавлять дополнительные переменные к периодам Виттена–Зайберга, а в другом случае (например, для тау-функций конформных отображений [7], см. п. 6.3) ситуация еще более впечатляющая: функция $\mathcal{F} = \ln \tau$ удовлетворяет уравнениям ВДВВ как функция лишь *части* своих аргументов, когда остальные переменные фиксированы.

3. УРАВНЕНИЯ ВДВВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ

3.1. Аксиоматика топологических теорий. Двумерные топологические теории можно представлять как струнные модели или теории на мировых листах, в которых почти нет возбуждений, или, говоря более точно, в которых имеется лишь (обычно) конечное число “вакуумных состояний”. Например, в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных моделях Гинзбурга–Ландау, определяемых суперпотенциалом W , эти “вакуумные состояния” отождествляются с критическими точками суперпотенциала $dW = 0$. Лучший способ построить двумерные топологические теории – начать с суперконформных моделей с двумерной твистованной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией на мировом листе, а результат этой конструкции, который только и будет представлять для нас интерес в дальнейшем, может быть сформулирован следующим аксиоматическим способом.

1. Существует (обычно конечный) набор так называемых примарных операторов Φ_i и соответствующих (“вакуумных”) состояний $|i\rangle = \Phi_i|0\rangle$.

2. Среди этих состояний имеется “тривиальный” или нейтральный вакуум $|0\rangle$, а соответствующий оператор $\Phi_1 = \mathbf{1}$ называется единичным или оператором прокола, в том смысле, что оператор, соответствующий отмеченной точке на мировом листе, обладает нулевыми квантовыми числами.

3. Все корреляционные функции могут быть выражены через трехточечные функции (17), среди которых имеется “пропагатор”

$$\eta_{ij} = \langle \Phi_i \Phi_j \rangle \equiv \langle \Phi_i \Phi_j \mathbf{1} \rangle. \quad (33)$$

4. Формула (33) идентифицирует наивно двухточечную функцию η_{ij} с трехточечной функцией $\langle \Phi_i \Phi_j \mathbf{1} \rangle$ с дополнительным оператором прокола. Как уже отмечалось, причиной этого является то, что с точки зрения струнной теории пропагатор является корреляционной функцией на сфере – мировом листе простейшей возможной топологии, а на сфере не существует хорошо определенных корреляционных функций с менее чем тремя отмеченными точками.

Приняв представленное выше аксиоматическое определение топологических теорий, можно понять, что вся информация о такой теории содержится в некоторой функции конечного числа переменных $\mathcal{F}(\mathbf{t})$, которую обычно называют препотенциалом. Для двумерных топологических моделей такая функция удовлетворяет также дополнительному условию

$$\eta_{ij} = \partial_i \partial_j \partial_1 \mathcal{F}(\mathbf{t}) = \text{const}_{ij}, \quad (34)$$

и именно в этом смысле время t_1 называется *выделенным*. Однако ниже мы увидим, что в обсуждении уравнений ВДВВ ничто в действительности не зависит от условия (34). Главное требование на функцию $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ возникает при рассмотрении операторной алгебры (16), имеющей структуру *коммутативного кольца*, со структурными константами $C_{ij}^k = C_{ij}^k(\mathbf{t}) = C_{ji}^k(\mathbf{t})$. Применяя (16) к четырехточечной функции $\langle \Phi_i \Phi_j \Phi_n \Phi_m \rangle$ и предполагая типичную для теории струн кроссинг-симметрию

$$\langle \Phi_i \Phi_j \Phi_n \Phi_m \rangle = C_{ij}^k \langle \Phi_k \Phi_n \Phi_m \rangle = C_{in}^k \langle \Phi_k \Phi_j \Phi_m \rangle, \quad (35)$$

мы получаем соотношения (15) (где индексы поднимаются и опускаются с помощью пропагатора η_{ij} , играющего роль “метрики”), приводящие к уравнениям ВДВВ (1). Таким образом, решения уравнений ВДВВ, относящиеся к двумерным топологическим теориям, должны удовлетворять дополнительному условию (34), эти решения были классифицированы в работе [3].

Интегрируемая структура, лежащая в основе двумерных топологических моделей, может быть элегантно описана в терминах следующего условия нулевой кривизны [3], [8]:

$$[\nabla_i, \nabla_j] = 0, \quad \nabla_i = \mathbf{1} \cdot \frac{\partial}{\partial t_i} - \zeta \mathbf{C}_i, \quad (36)$$

где $\|\mathbf{1}\|_j^k = \delta_j^k$ – единичная матрица, а $\|\mathbf{C}_i\|_j^k = C_{ij}^k$. Благодаря явной зависимости от дополнительного спектрального параметра ζ , задача (36) эквивалентна системе двух независимых условий: квадратичный по ζ член дает

$$[\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_j] = 0, \quad (37)$$

или кроссинг-соотношения (15), в то время как линейный по ζ член приводит к условию

$$\zeta(\partial_i C_{jk}^l - \partial_j C_{ik}^l) = 0. \quad (38)$$

Используя (6), (10) и тот факт, что “метрика” η (34) постоянна, формулу (38) можно переписать в виде

$$\partial_{[j} \mathcal{F}_{i]kl} = 0, \quad (39)$$

что означает (по крайней мере, локально), что $\mathcal{F}_{ijk} = \partial_i \mathcal{F}_{jk}$, или, принимая во внимание тот факт, что величины $\mathcal{F}_{ijk}$ симметричны по всем индексам, соотношение (39) может быть проинтегрировано:

$$\mathcal{F}_{ijk} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}, \quad (40)$$

т.е. из условий (39) мы получаем, что трехточечные функции $\mathcal{F}_{ijk}$ (17), связанные со структурными константами топологической теории, являются третьими производными некоторой функции $\mathcal{F}$. Это означает, что уравнения ВДВВ в топологических теориях (с постоянной “метрикой”) в самом деле содержатся в формулах (36). Мы вернемся к обсуждению вспомогательной линейной задачи (36) в разделе 7.

3.2. Модели Гинзбурга–Ландау. Эти топологические теории определяются полиномиальным суперпотенциалом, вообще говоря, нескольких комплексных переменных. В простейшем случае суперпотенциал является полиномом от комплексной переменной λ степени N :

$$W(\lambda) = \lambda^N + \sum_{k=0}^{N-2} u_k \lambda^k, \quad (41)$$

у которого $N - 1$ параметров, или “степеней свободы”. Примарные поля определяются формулами

$$\phi_k(\lambda) = \frac{\partial W}{\partial t_k} = \left(\frac{d}{d\lambda} W^{k/N} \right)_+, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (42)$$

где $(\cdot)_+$ означает полиномиальную по λ часть выражения, заключенного в скобках. В частности, поле

$$\phi_1(\lambda) = \frac{\partial W}{\partial t_1} = 1 \quad (43)$$

отвечает единичному оператору $\Phi_1 = \mathbf{1}$. Соответствующие времена, или “плоские координаты”, определяются как

$$t_k = -\frac{N}{k(N-k)} \operatorname{res} |_{\infty} (W^{1-k/N} d\lambda). \quad (44)$$

Легко проверить, что формулы (44) действительно согласованы с (42). Дифференцируя (44), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_k}{\partial t_j} &= -\frac{1}{k} \operatorname{res} |_{\infty} \left(W^{-k/N} \frac{\partial W}{\partial t_j} \right) = -\frac{1}{k} \operatorname{res} |_{\infty} (W^{-k/N} \partial_{\lambda} W_+^{j/N}) = \\ &= -\frac{1}{k} \operatorname{res} |_{\infty} (W^{-k/N} \partial_{\lambda} W^{j/N}) = \delta_{jk}, \end{aligned} \quad (45)$$

где использовано равенство $\operatorname{res} |_{\infty} (d\lambda/\lambda) = -\operatorname{res} |_0 (d\lambda/\lambda) = -1$.

Примарные поля (42) образуют ассоциативную алгебру (16)

$$\phi_i(\lambda) \phi_j(\lambda) = \sum_{k=1}^{N-1} C_{ij}^k \phi_k(\lambda) + R_{ij}(\lambda) W'(\lambda), \quad (46)$$

которая является не чем иным, как фактором кольца всех полиномов по идеалу $W'(\lambda) = 0$, т.е. полиномы $\phi_k(\lambda)$, определенные в (42), являются некоторым базисом в факторпространстве $\mathbb{C}[\lambda]/W'(\lambda)^2$. Это означает, что кроссинг-соотношения (15) для коммутативного кольца (46) выполняются автоматически.

Доказательство выполнения уравнений ВДВВ сводится тем самым к проверке согласованности формул (46) и частного случая формулы (19) при $Q'(\lambda) = 1$

$$\mathcal{F}_{ijk} = \text{res}|_{W'(\lambda)=0} \frac{\phi_i(\lambda)\phi_j(\lambda)\phi_k(\lambda)}{W'(\lambda)} \equiv \sum_{\alpha} \frac{\phi_i\phi_j\phi_k(\lambda_{\alpha})}{W''(\lambda_{\alpha})}, \quad (47)$$

а также

$$\eta_{kl} \equiv \eta_{kl}^{(\text{GL})} = \sum_{\alpha} \text{res}|_{\lambda_{\alpha}} \frac{\phi_k(\lambda)\phi_l(\lambda)}{W'(\lambda)} \equiv \sum_{\alpha} \frac{\phi_k\phi_l(\lambda_{\alpha})}{W''(\lambda_{\alpha})} \quad (48)$$

и (10), где λ_{α} – критические точки суперпотенциала Гинзбурга–Ландау $W'(\lambda_{\alpha}) = 0$.

В дополнение к согласованности формул (46)–(48), (10) следует также помнить о том, что величины $\mathcal{F}_{ijk}$ в формуле (47) являются третьими производными некоторой функции $\mathcal{F}(\mathbf{t})$. Эта функция может быть определена, например, если потребовать, чтобы ее первые производные задавались “дуальной” к (44) формулой

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = \frac{N}{N+k} \text{res}|_{\infty} (W^{1+k/N} d\lambda). \quad (49)$$

Легко проверить, что в этом случае для вторых производных получается выражение

$$\mathcal{F}_{ik} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_k} = \text{res}|_{\infty} \left(W^{k/N} \frac{\partial W}{\partial t_i} \right) = \text{res}|_{\infty} (W^{k/N} \partial_{\lambda} W_+^{i/N}), \quad (50)$$

правая часть которого действительно симметрична относительно замены $i \leftrightarrow k$.

²⁾Конечно, с точки зрения алгебры (16), (46) базис (42) является лишь одним из многих возможных базисов. Выделен он лишь с точки зрения формулы вычетов (19), которая, как и уравнения ВДВВ (1), существенным образом зависит от выбора базиса (см. ниже).

Для третьих производных, используя элементарную алгебру, получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{ijk} &= \text{res}|_{\infty} \left(\frac{i}{N} W^{i/N-1} \frac{\partial W}{\partial t_k} \partial_{\lambda} W_+^{j/N} \right) + \\
&\quad + \text{res}|_{\infty} \left(W^{i/N} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{j}{N} W^{j/N-1} \frac{\partial W}{\partial t_k} \right)_+ \right) = \\
&= \text{res}|_{\infty} \left(\frac{i}{N} W^{i/N-1} \partial_{\lambda} W_+^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N} \right) - \\
&\quad - \text{res}|_{\infty} \left(\partial_{\lambda} W^{i/N} \left(\frac{j}{N} W^{j/N-1} \partial_{\lambda} W_+^{k/N} \right)_+ \right) = \\
&= \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W^{i/N} \partial_{\lambda} W_+^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'} - \\
&\quad - \text{res}|_{\infty} \left(\partial_{\lambda} W^{i/N} \frac{j}{N} W^{j/N-1} \partial_{\lambda} W_+^{k/N} \right) + \\
&\quad + \text{res}|_{\infty} \left(\partial_{\lambda} W^{i/N} \left(\frac{j}{N} W^{j/N-1} \partial_{\lambda} W_+^{k/N} \right)_- \right) = \\
&= \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W^{i/N} \partial_{\lambda} W_+^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'} - \\
&\quad - \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W^{i/N} \partial_{\lambda} W^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'} + \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W_+^{i/N} \partial_{\lambda} W^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'} = \\
&= \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W^{i/N} \partial_{\lambda} W_+^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'} - \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W_-^{i/N} \partial_{\lambda} W^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'} = \\
&= \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W_+^{i/N} \partial_{\lambda} W_+^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'} - \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W_-^{i/N} \partial_{\lambda} W_-^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'} = \\
&= \text{res}|_{\infty} \frac{\partial_{\lambda} W_+^{i/N} \partial_{\lambda} W_+^{j/N} \partial_{\lambda} W_+^{k/N}}{W'}, \tag{51}
\end{aligned}$$

т.е. формулу вычетов (47) (общий знак в которой и/или численный коэффициент являются несущественными)

$$\mathcal{F}_{ijk} = \text{res}|_{\infty} \frac{\phi_i(\lambda) \phi_j(\lambda) \phi_k(\lambda)}{W'} = -\text{res}|_{W'=0} \frac{\phi_i(\lambda) \phi_j(\lambda) \phi_k(\lambda)}{W'}. \tag{52}$$

После этого доказательство соотношения (10) очевидно, поскольку с учетом (46)

$$\sum_l \eta_{kl} C_{ij}^l = \sum_{l, \alpha} \frac{\phi_k \phi_l(\lambda_{\alpha})}{W''(\lambda_{\alpha})} C_{ij}^l = \sum_{\alpha} \frac{\phi_k(\lambda_{\alpha})}{W''(\lambda_{\alpha})} \phi_i(\lambda_{\alpha}) \phi_j(\lambda_{\alpha}) = \mathcal{F}_{ijk}. \tag{53}$$

Отметим, что алгебра (46) определена по модулю $W'(\lambda)$, но $W'(\lambda_{\alpha}) = 0$ во всех точках λ_{α} .

Здесь следует сказать особо о *топологической метрике*, или *метрике Гинзбурга-Ландау*, которая определяется формулой (48) и является выделенной в контексте

двумерных моделей Гинзбурга–Ландау (например, как и должно быть в топологической теории, является константой). Сравнивая (48) и (28), легко видеть, что метрика Гинзбурга–Ландау является лишь частным случаем формулы (28) $\eta_{kl}^{(\text{GL})} = \eta_{kl}(\xi^{(\text{GL})})$, отвечающим выбору

$$\xi^{(\text{GL})}(\lambda_\alpha) = \sum_b \xi_b^{(\text{GL})} \phi_b(\lambda_\alpha) = Q'(\lambda_\alpha) \quad \forall \lambda_\alpha, \quad (54)$$

а величины $\{\xi_b^{(\text{GL})}\}$ легко найти при выполнении единственного условия (21). Естественно, ничто не гарантирует постоянства метрики Гинзбурга–Ландау (48) в общей ситуации, когда “включаются” гравитационные “потомки” и нетривиальная функция $Q'(\lambda) \neq 1$ зависит от гравитационных времен. Однако на “малом фазовом пространстве”, когда все гравитационные времена равны нулю, $\xi^{(\text{GL})}(\lambda) = Q'(\lambda) = 1$ и мы возвращаемся к формулам (22), (23), (47) и (48).

Заметим, наконец, что соотношение Гаусса–Манина (см., например, [9])

$$\partial_\lambda R_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial t_i \partial t_j}, \quad (55)$$

где $R_{ij}(\lambda)$ определены в формуле (46), является тривиальным следствием приведенных выше формул для моделей Гинзбурга–Ландау (верных, конечно, лишь при использовании выделенных переменных (44)). Действительно, смысл формулы (46) чрезвычайно прост и заключается в том, что выражение

$$\frac{\phi_i(\lambda)\phi_j(\lambda)}{W'(\lambda)} - R_{ij}(\lambda) \quad (56)$$

является дробью с W' в знаменателе, числитель которой представляет собой полином степени менее $N - 1$, который тем самым может быть представлен в виде линейной комбинации $\sum_{k=1}^{N-1} C_{ij}^k \phi_k$. С помощью соотношения (42) легко проделать это простое упражнение. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i(\lambda)\phi_j(\lambda)}{W'(\lambda)} &= \frac{\left(\frac{d}{d\lambda}W^{i/N}\right)_+ \left(\frac{d}{d\lambda}W^{j/N}\right)_+}{W'(\lambda)} = \frac{\left(\frac{i}{N}W^{i/N-1}W'\right)_+ \left(\frac{j}{N}W^{j/N-1}W'\right)_+}{W'} \equiv \\ &\equiv \frac{(AW')_+ (BW')_+}{W'} \equiv \frac{(AW')_+ R}{W'}, \end{aligned} \quad (57)$$

где для простоты обозначений введены ряды Лорана

$$A(\lambda) \equiv \frac{i}{N}W^{i/N-1}(\lambda) = \frac{i}{N}\lambda^{i-N} + \dots, \quad (58)$$

$$B(\lambda) \equiv \frac{j}{N}W^{j/N-1}(\lambda) = \frac{j}{N}\lambda^{j-N} + \dots, \quad (59)$$

а также полином

$$R(\lambda) \equiv (BW')_+ = \frac{j}{N}\lambda^j + \dots. \quad (60)$$

Разделив полином на полином, легко получить

$$\begin{aligned}
 \frac{(AW')_+ R}{W'} &= \frac{AW'R - (AW')_- R}{W'} = AR - \frac{(AW')_- R}{W'} = \\
 &= (AR)_+ + \left((AR)_- - \frac{(AW')_- R}{W'} \right) = \\
 &= (AR)_+ + \frac{W'(AR)_- - (AW')_- R}{W'}, \tag{61}
 \end{aligned}$$

откуда видно, что числитель второго члена в последнем выражении $W'(AR)_- - (AW')_- R$ является полиномом степени не более чем $N - 2$ (а значит, отвечает $\sum_{k=1}^{N-1} C_{ij}^k \phi_k$). Действительно, это сразу следует из вида слагаемых в (58)–(60), содержащих старшие степени. Таким образом, первый член отвечает полиномиальной части результата деления (61) и приводит к соотношению

$$R_{ij}(\lambda) = (AR)_+ = \left(\frac{i}{N} W^{i/N-1} \left(\frac{j}{N} W^{j/N-1} W' \right)_+ \right)_+, \tag{62}$$

которое и позволяет доказать формулу (55), так как из (42) легко получить

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 W}{\partial t_i \partial t_j} &= \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial t_j} W_+^{i/N} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{i}{N} W^{i/N-1} \frac{\partial W}{\partial t_j} \right)_+ = \\
 &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{i}{N} W^{i/N-1} \frac{d}{d\lambda} (W^{j/N})_+ \right)_+ = \\
 &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{i}{N} W^{i/N-1} \left(\frac{j}{N} W^{j/N-1} W' \right)_+ \right)_+. \tag{63}
 \end{aligned}$$

Сравнение формул (62) и (63) приводит к (55).

4. УРАВНЕНИЯ АССОЦИАТИВНОСТИ В ТЕОРИИ ВИТТЕНА–ЗАЙБЕРГА

4.1. Теория Виттена–Зайберга: матрицы периодов и формулы вычетов. В теории Виттена–Зайберга [10] роль функции $\mathcal{F}$ играет препотенциал, определяемый с помощью семейства вспомогательных римановых поверхностей, оснащенных некоторым специальным мероморфным дифференциалом dS . Препотенциал удовлетворяет системе уравнений ВДВВ (1), если отождествить времена $\{t_i\}$ с периодами

$$a_i = \oint_{A_i} dS \tag{64}$$

производящего мероморфного дифференциала [2]. Препотенциал $\mathcal{F}$ неявно определяется формулами

$$a_i^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i}, \tag{65}$$

где

$$a_i^D = \oint_{B_i} dS \quad (66)$$

– дуальные периоды. В частности, в специальных координатах $\{a_i\}$ матрица вторых производных функции $\mathcal{F}$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j} = T_{ij}(\mathbf{a}) \quad (67)$$

играет роль *матрицы периодов* римановой поверхности Σ (напомним, что используются нековариантные производные, а поэтому это утверждение зависит от выбора координат). Например, в случае чистой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории с калибровочной группой $SU(N)$ вспомогательная риманова поверхность и мероморфный дифференциал имеют вид [11]

$$w + \frac{\Lambda^{2N}}{w} = P_N(\lambda), \quad dS = \lambda \frac{dw}{w} \quad (68)$$

или

$$y^2 = P_N(\lambda)^2 - 4\Lambda^{2N}, \quad dS = \lambda \frac{dP_N}{y}. \quad (69)$$

На римановой поверхности Σ_g рода $g = N - 1$ (68) существуют $2g$ независимых нестягиваемых контуров, которые можно разбить на так называемые $\mathbf{A} \equiv \{A_i\}$ и $\mathbf{B} \equiv \{B_i\}$ ($i = 1, \dots, g$) циклы с формой пересечений $A_i \circ B_j = \delta_{ij}$. Переобозначение $\mathbf{A}$ - и $\mathbf{B}$ -циклов называется *преобразованием дуальности*, ковариантность уравнений ВДВВ (1) относительно преобразований дуальности [12] будет обсуждаться в разделе 5. Голоморфные дифференциалы обычно выбираются нормированными на $\mathbf{A}$ -циклы:

$$\oint_{A_j} d\omega_i = \delta_{ij}, \quad (70)$$

при этом их интегралы вдоль $\mathbf{B}$ -циклов дают матрицу периодов:

$$\oint_{B_j} d\omega_i = T_{ij}. \quad (71)$$

Матрица периодов (71) симметрична, что проверяется прямым применением формулы Стокса к интегралу по поверхности

$$0 = \int_{\Sigma_g} d\omega_i \wedge d\omega_j = \sum_{k=1}^g \oint_{A_k} d\omega_i \oint_{B_k} d\omega_j - (i \leftrightarrow j) = T_{ij} - T_{ji}. \quad (72)$$

Производящий дифференциал (в частном случае приведенный в (68)) должен удовлетворять основному свойству

$$\delta_{\text{moduli}} dS = \text{голоморфный дифференциал}. \quad (73)$$

Легко видеть, что голоморфный дифференциал (73) становится канонически нормированным (70), если в качестве координат на пространстве модулей взять **A**-периоды дифференциала dS (64).

В самом деле,

$$\delta a_j = \oint_{A_j} \frac{\partial dS}{\partial a_i} \delta a_i, \quad (74)$$

и, сравнив (74) с (70), получаем

$$\frac{\partial dS}{\partial a_i} = d\omega_i, \quad (75)$$

где равенство на самом деле означает равенство с точностью до полных производных, исчезающих из интегралов по замкнутым контурам. По сложившейся традиции дуальные **B**-периоды принято обозначать $\mathbf{a}^D$ (см. (66)). Дифференцируя обе части равенства (66) по a_i и используя формулы (75), (71), легко получить

$$\frac{\partial a_j^D}{\partial a_i} = \oint_{B_j} \frac{\partial dS}{\partial a_i} = \oint_{B_j} d\omega_i = T_{ij}. \quad (76)$$

В случае теории Виттена–Зайберга у нас нет выделенного индекса i : все аргументы препотенциала a_i совершенно равноправны. Таким образом, в данном случае уравнения ВДВВ могут возникнуть только в симметричной форме – инвариантной относительно перестановок индексов i, j, k , и этому критерию удовлетворяет система уравнений (1). Формулы (76) и (72) приводят к (65) и (67).

В случае гиперэллиптических римановых поверхностей существование формулы вычетов можно доказать, используя соотношения между производными матричных элементов матрицы периодов по положению точек ветвления и значениями *канонических* голоморфных дифференциалов в точках ветвления гиперэллиптических кривых. Действительно, легко проверить, что производные матриц периодов гиперэллиптических кривых по положению любой из точек ветвления λ_I уравнения (69) могут быть представлены в виде [13]

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \lambda_I} = \widehat{\omega}_i(\lambda_I) \widehat{\omega}_j(\lambda_I). \quad (77)$$

Это следует из частного случая билинейных соотношений Римана – аналога уравнения (72)

$$0 = \int d\omega_i \wedge \frac{\partial d\omega_j}{\partial \lambda_I} = \sum_k \left(\oint_{B_k} \frac{\partial d\omega_j}{\partial \lambda_I} \oint_{A_k} d\omega_i - \oint_{A_k} \frac{\partial d\omega_j}{\partial \lambda_I} \oint_{B_k} d\omega_i \right) - \text{res}_{|\lambda_I} \left(\omega_i \frac{\partial d\omega_j}{\partial \lambda_I} \right). \quad (78)$$

Последний член в этой формуле появляется из-за того, что производная голоморфного дифференциала по положению точки ветвления λ_I приобретает полюс при $\lambda = \lambda_I$. Определим координаты точек ветвления λ_I , переписав (69) в виде произведения по всем $2N = 2g + 2$ корням:

$$y^2 = P_N^2(\lambda) - 4\Lambda^{2N} = \prod_{I=1}^{2N} (\lambda - \lambda_I), \quad (79)$$

и обозначим $\hat{y}^2(\lambda_I) \equiv \prod_{J \neq I} (\lambda_I - \lambda_J)$. Действительно, в окрестности точки λ_I можно использовать локальные координаты $\sqrt{\lambda - \lambda_I}$ и разложение

$$\begin{aligned} d\omega_i &= 2\hat{\omega}_i(\lambda_I) d\sqrt{\lambda - \lambda_I} + \dots, \\ \frac{\partial \omega_j}{\partial \lambda_I} &= -\frac{\hat{\omega}_j(\lambda_I)}{\sqrt{\lambda - \lambda_I}} + \dots, \end{aligned} \quad (80)$$

где

$$\hat{\omega}_i(\lambda_I) = \frac{\phi_i(\lambda_I)}{\sqrt{\prod_{J \neq I} (\lambda_I - \lambda_J)}}. \quad (81)$$

Таким образом, билинейные соотношения (78) вместе с условиями (70) и (71) приводят к равенству

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \lambda_I} = \text{res}_{|\lambda_I} \left(\omega_i \frac{\partial d\omega_j}{\partial \lambda_I} \right). \quad (82)$$

Использование разложения (80) в окрестности точки λ_I и вычисление вычета в формуле (82) приводят к уравнению (77).

Однако для семейства кривых (79) все $2N = 2g + 2$ точек ветвления $\{\lambda_I\}$ зависят только от g модулей $\{u_k\}$ или $\{a_i\}$. Это означает, что

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial a_k} = \sum_I \frac{\partial T_{ij}}{\partial \lambda_I} \frac{\partial \lambda_I}{\partial a_k} = \sum_I \hat{\omega}_i(\lambda_I) \hat{\omega}_j(\lambda_I) \frac{\partial \lambda_I}{\partial a_k}. \quad (83)$$

Вариация уравнения кривой (68) (при фиксированном w) дает

$$\delta \lambda = -\frac{\sum_k \lambda^k \delta u_k}{P'_N(\lambda)}, \quad (84)$$

что в точке $\lambda = \lambda_I$ с учетом (96) (см. ниже) приводит к соотношению

$$\frac{\partial \lambda_I}{\partial a_i} = -\frac{\sum_k \lambda_I^k \frac{\partial u_k}{\partial a_i}}{P'_N(\lambda_I)} = -\frac{\phi_i(\lambda_I)}{P'_N(\lambda_I)} = -\frac{\hat{\omega}_i(\lambda_I) \hat{y}(\lambda_I)}{P'_N(\lambda_I)}. \quad (85)$$

Подставляя (85) в (83), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ijk} &= \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial a_k} = \sum_I \frac{\hat{\omega}_i(\lambda_I) \hat{\omega}_j(\lambda_I) \hat{\omega}_k(\lambda_I)}{P'_N(\lambda_I) / \hat{y}(\lambda_I)} = \\ &= \text{res}_{|d\lambda=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda dP_N/y} = \text{res}_{|d\lambda=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda (dw/w)}. \end{aligned} \quad (86)$$

Заметим, что суммирование в формуле (86) производится по всем $2N = 2g + 2$ точкам ветвления λ_I гиперэллиптической кривой (79). Мы вернемся к этому вопросу в п. 4.3.

Поскольку подынтегральное выражение в (86) голоморфно, формулу вычетов можно переписать в виде

$$\mathcal{F}_{ijk} = -\text{res}_{|\frac{dw}{w}=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda (dw/w)}, \quad (87)$$

который будет использован при дальнейшем обсуждении в п. 4.3.

Гиперэллиптический случай выделен существованием чрезвычайно удобных координат на пространстве модулей – положений точек ветвления $\{\lambda_I\}$ (79). В общем случае не существует их полезных аналогов. Однако идейно ситуация совершенно такая же, и производные по модулям приводят к появлению дополнительных сингулярностей. Это означает, что если взять в качестве координат на пространстве модулей, скажем, коэффициенты полинома из спектрального уравнения кривой, то аналог формулы (82) должен существовать в виде (см., например, обсуждение в работе [6] случая модели Калоджеро–Мозера)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial u_s} = \text{res} \left(\omega_i \frac{\partial d\omega_j}{\partial u_s} \right). \quad (88)$$

Формулы вида (88) обычно приводят к равенствам [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ij}}{\partial s^k} &= \text{res} \Big|_{dz=0} \frac{d\omega_i d\omega_j dv_k}{dz d\lambda}, \\ \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial a^i \partial a^j \partial a^k} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial a^k} = \text{res} \Big|_{dz=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{dz d\lambda}, \end{aligned} \quad (89)$$

но доказательство таких формул в общем виде выходит за рамки данной работы. Как мы увидим ниже, в общем случае недостаточно ограничивать формулы вида (89) лишь на подмножество голоморфных дифференциалов.

4.2. Уравнения ассоциативности в теории Виттена–Зайберга и алгебры форм. Допустим, что в топологических моделях Гинзбурга–Ландау (46)–(48), (10) изменилось определение “метрики”

$$\eta_{kl}^{(\text{GL})} \rightarrow \eta_{kl}(\xi) = \sum_{\alpha} \frac{\phi_k \phi_l(\lambda_{\alpha})}{W''(\lambda_{\alpha})} \xi(\lambda_{\alpha}), \quad (90)$$

т.е. на некоторое новое, эквивалентное общему определению (27) и зависящее от функции $\xi(\lambda)$ (29), которую в данном разделе будем считать полиномом. Как было показано в п. 2.2, при этом не меняется доказательство справедливости уравнений ВДВВ, если одновременно алгебру (46) заменить на (24) или на алгебру полиномов

$$\phi_i(\lambda) \phi_j(\lambda) = C_{ij}^k(\xi) \phi_k(\lambda) \xi(\lambda) \pmod{W'(\lambda)}. \quad (91)$$

Это уравнение описывает ассоциативную алгебру, если только полиномы $\xi(\lambda)$ и $W'(\lambda)$ взаимно просты, т.е. не имеют совпадающих корней. Как и в общей ситуации в п. 2.2, остаются неизменными формула (47) и, следовательно, тот факт, что величины $\mathcal{F}_{ijk}$ являются третьими производными той же самой функции $\mathcal{F}$.

В теории Виттена–Зайберга полиномы $\phi_i(\lambda)$ (42) заменяются каноническими голоморфными дифференциалами $d\omega_i(\lambda)$ на римановой поверхности [2] (в гиперэллиптическом случае описываемой, скажем, уравнением (69)). Вместо соотношений (46) и (91), заменив полином $\xi(\lambda)$ некоторым дифференциалом dG , в этом случае можно формально определить некоторую *алгебру форм* [6], [14]

$$d\omega_i(\lambda) d\omega_j(\lambda) = C_{ij}^k(dG) d\omega_k(\lambda) dG(\lambda) \pmod{\frac{dP_N(\lambda) d\lambda}{y^2}}. \quad (92)$$

В отличие от (46) и (91), в алгебре форм нельзя просто положить $dG = 1$, чтобы воспроизвести аналог формулы (46), так как dG представляет собой 1-форму. Вместо этого можно потребовать, например, чтобы dG представлял собой некоторый голоморфный дифференциал. Поскольку в g -параметрическом семействе не существует выделенного голоморфного дифференциала, в качестве дифференциала dG можно выбрать *любой* из них с единственным условием взаимной простоты с дифференциалом $dw/w = dP_N(\lambda)/y$.

Если алгебра (92) существует и является ассоциативной (что уже нетривиально для алгебры форм и, более того, в общем случае неверно, см. [6]), то структурные константы $C_{ij}^k(\xi) \equiv C_{ij}^k(dG)$ удовлетворяют условиям ассоциативности (15) (при взаимно простых dG и dP_N/y). Легко показать, что в случае гиперэллиптических поверхностей такая алгебра в действительности существует, т.е. для данного дифференциала dG можно построить структурные константы $C_{ij}^k(dG)$, так как все канонические голоморфные дифференциалы $d\omega_i$ (70) являются линейными комбинациями дифференциалов

$$dv_k(\lambda) = \frac{\lambda^{k-1} d\lambda}{y}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (93)$$

т.е.

$$d\omega_i = \frac{\phi_i(\lambda) d\lambda}{y} = \sum_k (\sigma^{-1})_{ik} dv_k, \quad (94)$$

где $\{\phi_i(\lambda)\}$ – некоторые полиномы степени не более $N - 2$. Коэффициенты σ_{ki} можно определить соотношениями

$$\sigma_{ki} = \oint_{A_i} dv_k = \frac{\partial a_i}{\partial u_k}, \quad (95)$$

где $\{u_k\}$ – коэффициенты полинома $P_N(\lambda)$ из формул (68) и (69). Последнее соотношение следует из формул (64), (73) и (75). Другими словами, для полиномов $\{\phi_i(\lambda)\}$, отвечающих каноническим голоморфным дифференциалам (94), можно записать

$$\phi_i(\lambda) = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \lambda^k. \quad (96)$$

Таким образом, алгебра (92) на гиперэллиптических поверхностях действительно изоморфна кольцу полиномов (91), в котором роль образующих играют полиномы $\phi_i = y d\omega_i/d\lambda$ (94), а роль производной суперпотенциала – полином $W'(\lambda) = P'_N(\lambda) = y(dw/w)/d\lambda$:

$$\phi_i(\lambda)\phi_j(\lambda) = \sum_k C_{ij}^k \phi_k(\lambda)\xi(\lambda) + R_{ij}(\lambda)P'_N(\lambda), \quad (97)$$

где мы также положили $\xi(\lambda) = y dG/d\lambda$. В левой части уравнения (97) возникает полином степени $2(g - 1)$, и, так как $P'_N(\lambda)$ – полином степени $N - 1 = g$, $R_{ij}(\lambda)$ должны быть полиномами степени $2(g - 1) - g = g - 2$. Если отождествить два полинома степени $2(g - 1)$ в левой и правой частях равенства (97), возникнет система $2g - 1$ линейных уравнений на коэффициенты. Можно также сказать, что мы имеем возможность “подогнать” параметры C_{ij}^k и $R_{ij}(\lambda)$ (с фиксированными i, j), т.е. у нас есть ровно $g + (g - 1) = 2g - 1$ свободных параметров, в точности столько, сколько нужно для однозначного решения

системы линейных уравнений. Соответствующая система невырождена при взаимно простых dG и dP_N/y .

Таким образом, мы доказали, что алгебра форм (92) существует и является ассоциативной в теории Виттена–Зайберга, построенной по кривым (68), а значит структурные константы $C_{ij}^k(dG)$ удовлетворяют условию ассоциативности

$$C_i(dG)C_j(dG) = C_j(dG)C_i(dG). \quad (98)$$

Это всегда так для теорий Виттена–Зайберга, построенных по гиперэллиптическим кривым, в таких теориях алгебры форм (92) изоморфны кольцам полиномов и изоморфизм практически задается соотношениями вида (94). Гораздо менее тривиальным является случай негиперэллиптических кривых. Некоторые примеры существования замкнутых и ассоциативных алгебр форм известны и в этом случае (см., например, [15]). Однако, как мы увидим в п. 4.3, вообще говоря, нет никакой специальной причины существования замкнутых и ассоциативных алгебр форм в общей ситуации. Этот факт был впервые установлен в работе [6], в которой было явно проверено, что алгебра голоморфных дифференциалов для теории Виттена–Зайберга, отвечающей системе Калоджеро–Мозера, неассоциативна.

Как следует из общего рассмотрения в разделе 2 (и будет еще раз продемонстрировано специально для теории Виттена–Зайберга в п. 4.3), алгебры форм не являются простейшим инструментом для изучения этой проблемы. Всегда возможно определить алгебру форм, следуя [14], но гораздо проще ограничиться рассмотрением кольца функций, которое *всегда* ассоциативно. Тогда проблема решения уравнений ВДВВ сводится к решению системы линейных уравнений, если только существует формула вычетов, а существование формул вычетов в теории Виттена–Зайберга следует из аргументов п. 4.1.

4.3. Согласованность для препотенциалов Виттена–Зайберга. Перейдем теперь к обсуждению формул вычетов в теории Виттена–Зайберга в общем контексте п. 2.2. При этом оказывается чрезвычайно важно, что выведенная первоначально в форме (86), предполагающей суммирование по всем $2g + 2$ точкам ветвления гиперэллиптической римановой поверхности (79), формула вычетов тем не менее может быть переписана в форме (87) или, более того, в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ijk} &= \oint_{\frac{dw}{w}=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda \frac{dw}{w}} = \sum_{\alpha} \operatorname{res} |_{\lambda_{\alpha}} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda \frac{P'_N(\lambda) d\lambda}{y}} = \\ &= \sum_{\alpha} \operatorname{res} |_{\lambda_{\alpha}} \frac{\phi_i(\lambda) \phi_j(\lambda) \phi_k(\lambda)}{y^2 P'_N(\lambda)} = \sum_{\alpha} \operatorname{res} |_{\lambda_{\alpha}} \frac{\phi_i(\lambda) \phi_j(\lambda) \phi_k(\lambda)}{(P_N(\lambda)^2 - 4) P'_N(\lambda)}, \end{aligned} \quad (99)$$

где роль гамильтонианов $\{dH_i\}$ из (19) играют канонические голоморфные дифференциалы (94) на римановой поверхности (68), (69). Заметим, что при переходе от формулы (86) к формуле (99) мы сначала заменили сумму по $2g + 2$ точкам λ_I в (86) на сумму по $2g$ точкам (нулям dw/w) в (87), а потом, используя симметрию между двумя листами гиперэллиптической кривой (69), ограничили ее еще более в формуле (99) до суммы по $g = N - 1$ точкам λ_{α} , которые являются нулями дифференциала $dw/w = dP_N(\lambda)/y$

(точнее проекциями этих нулей на λ -плоскость), т.е. решениями уравнения $P'_N(\lambda_\alpha) = 0$. Предполагается, что базис полиномов $\{\phi_i(\lambda)\}$ невырожден в точках $\{\lambda_\alpha\}$.

Мы знаем, что несмотря на различие между формулами (19) и (86), уравнения ВДВВ (1) выполняются в теории Виттена–Зайберга [2]. Причина этого становится совершенно ясной после того, как мы перешли от формулы (86) к формуле (99) – как и в п. 2.2, условие согласования между числом голоморфных дифференциалов $d\omega_i$ и числом нулей полинома $P'_N(\lambda)$ *в точности* выполнено, так как оба эти числа равны роду римановой поверхности (68), (69), равному $g = N - 1$. Это (вместе с условием (21)) позволяет вывести уравнения (1) из формулы (99), поэтому доказательство для чистой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории и, более того, для любой теории Виттена–Зайберга с гиперэллиптическими кривыми практически дословно повторяет общее доказательство из п. 2.2.

Обсудим теперь, почему могут возникнуть проблемы в общей (не гиперэллиптической) ситуации в теории Виттена–Зайберга [6]. Причиной является то, что формула (99) является в некотором смысле “случайной”, поскольку реально в п. 4.1 была выведена формула (86), или

$$\mathcal{F}_{ijk} = - \oint_{d\lambda=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda \frac{dw}{w}} = \oint_{\frac{dw}{w}=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda \frac{dw}{w}}, \quad (100)$$

где второй интеграл (использованный в (99), для того чтобы получить окончательно формулу (19)) является следствием первого интеграла и голоморфности подынтегрального выражения. Вспомним, что именно первое равенство в формуле (100) (или же формула (86)) было изначально получено с помощью дифференцирования матрицы периодов $T_{ij} = \mathcal{F}_{ij}$ римановой поверхности (68), (69) и использования соотношений (77) для значений канонических голоморфных дифференциалов (94) в точках ветвления гиперэллиптической кривой (79), отвечающих условию $d\lambda = 0$ (но не условию $dw/w = 0$). Однако число точек ветвления гиперэллиптической поверхности, как следует из (79), равно $2N$, и условие согласованности, примененное наивно, было бы нарушено! Спасает положение то, что подынтегральное выражение в формуле (100) голоморфно, а значит, тот же самый интеграл можно вычислить по контуру вокруг нулей $dw/w = dP_N(\lambda)/y = 0$ (87), чего еще недостаточно, так как число нулей дифференциала dw/w равно $2g = 2(N - 1)$. Однако, благодаря гиперэллиптической $\mathbb{Z}_2$ -симметрии перестановки λ -плоскостей, можно окончательно привести формулу вычетов к виду (99), т.е. к сумме по $g = N - 1$ нулям полинома $P'_N(\lambda)$ (каждый из которых отвечает паре точек на кривой (68), (69)). Это означает, что условие согласованности для теории Виттена–Зайберга, связанной с цепочкой Тоды, в конце концов выполняется, но совершенно нетривиальным образом!

Теперь благодаря этому выводу становится ясно, что для других препотенциалов, отвечающих римановым поверхностям, условие согласованности может нарушаться. Например, в случае эллиптической модели Калоджеро–Мозера или теории Виттена–Зайберга с нарушенной $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией производящим дифференциалом вместо

$\lambda dw/w$ (68) является λdz , где dz — канонический голоморфный дифференциал на затравочном торе, а функция λ является решением уравнения Лакса

$$\det_{N \times N}(\lambda - L(z)) = 0 \quad (101)$$

с введенным в [16] оператором Лакса

$$L(z) = \begin{pmatrix} p_1 & \Phi(q_1 - q_2 | z) & \dots & \Phi(q_1 - q_N | z) \\ \Phi(q_2 - q_1 | z) & p_2 & \dots & \Phi(q_2 - q_N | z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi(q_N - q_1 | z) & \Phi(q_N - q_2 | z) & \dots & p_N \end{pmatrix}, \quad (102)$$

матричные элементы которого

$$\Phi(q|z) = m \frac{\sigma(q+z)}{\sigma(q)\sigma(z)} e^{\zeta(q)z}$$

выражаются через сигма-функции Якоби на затравочной эллиптической кривой. Число нулей $d\lambda$ или dz может быть легко вычислено по теореме Римана–Роха, утверждающей, в частности, что для любого мероморфного дифференциала

$$\#(\text{нулей}) - \#(\text{полюсов}) = 2g - 2 = 2N - 2, \quad (103)$$

поскольку род кривой (101) равен $g = N$. Дифференциал dz является голоморфным (он голоморфен на затравочном торе и не приобретает сингулярностей, переходя на накрытие), таким образом, получаем

$$\#(\text{нулей } dz) = 2N - 2, \quad (104)$$

что очень похоже на ситуацию с дифференциалом dw/w для цепочки Тоды (68). Однако в данном случае у нас уже нет гиперэллиптической симметрии, позволяющей сократить лишний множитель 2 и, скажем, переписать формулу (99) в виде суммы только по $N - 1$ точкам (половине от $2N - 2$). Что касается второго дифференциала $d\lambda$, то, как следует из формулы (101) и свойств оператора Лакса эллиптической модели Калоджеро–Мозера (102), у этого дифференциала

$$d\lambda \sim \frac{dz}{z^2} \quad (105)$$

N полюсов второго порядка, а значит,

$$\#(\text{нулей } d\lambda) - \#(\text{полюсов } d\lambda) = \#(\text{нулей } d\lambda) - 2N = 2N - 2, \quad (106)$$

или

$$\#(\text{нулей } d\lambda) = 4N - 2, \quad (107)$$

т.е. у него нулей еще больше, чем у дифференциала dz (104). Это означает, что ограничивая формулу (19) только на голоморфные дифференциалы:

$$\mathcal{F}_{ijk} = - \oint_{d\lambda=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda dz} = \oint_{dz=0} \frac{d\omega_i d\omega_j d\omega_k}{d\lambda dz}, \quad (108)$$

мы получим $\#(\alpha) > \#(i)$, и для того чтобы замкнуть алгебру, отвечающую (108), необходимо добавить к N голоморфным дифференциалам по крайней мере $N - 2$ дополнительных “гамильтонианов”. Представляется, что существуют по крайней мере две непосредственные возможности сделать это – добавить к голоморфным дифференциалам мероморфные или же неоднозначные голоморфные дифференциалы в духе работы [4]. При этом, однако, следует проверить существование (расширенной) формулы вычетов (108) с учетом добавления мероморфных или неоднозначных дифференциалов. С точки зрения суперсимметричной квантовой теории основным вопросом является физический смысл соответствующих дополнительных переменных или времен, играющих роль “скрытых” модулей в соответствующей теории Виттена–Зайберга.

5. ДУАЛЬНОСТЬ И УРАВНЕНИЯ ВДВВ

5.1. Специальная кэлерова геометрия и S -дуальность. Преобразования дуальности играют важную роль в современной теоретической физике. В теории Виттена–Зайберга [10] электромагнитная дуальность является основным руководящим принципом для получения точного вида эффективного низкоэнергетического действия. Тем самым дуальность является важным средством для изучения непертурбативной физики, и любой действительно непертурбативный результат не должен противоречить электромагнитной дуальности.

Основываясь на электромагнитной дуальности, теория Виттена–Зайберга позволяет определить голоморфную функцию $\mathcal{F}(\mathbf{a})$, в терминах которой формулируется низкоэнергетическое эффективное действие. Вектор $\mathbf{a}$ является вектором комплексных скалярных полей, принимающих значения в алгебре Картана калибровочной группы, а функция $\mathcal{F}$ является препотенциалом соответствующей специальной кэлеровой геометрии. Конструкция Виттена–Зайберга содержит вспомогательную комплексную кривую, модули комплексной структуры которой являются функциями на некотором специальном кэлеровом многообразии³⁾, так что компоненты вектора $\mathbf{a}$ играют роль локальных координат. Эта конструкция наиболее адекватно описывается на языке интегрируемой системы [17], отождествляющей функцию $\mathcal{F}(\mathbf{a})$ с логарифмом тау-функции так называемой квазиклассической иерархии, или универсальной иерархии Уизема [4], которая тем самым удовлетворяет некоторой системе нетривиальных дифференциальных уравнений (подробности этого соответствия и библиографию по данному вопросу можно найти, например, в [18], [19]).

³⁾ Строго говоря, термин *специальная геометрия* отвечает кэлеровой геометрии для случая локальной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории, взаимодействующей с супергравитацией. В случае глобальной суперсимметрии иногда применяют термин *глобальная специальная геометрия*. Ниже мы не будем делать различия между этими двумя терминами.

В теории Виттена–Зайберга вторые производные функции $\mathcal{F}(\mathbf{a})$ (67) отождествляются с матричными элементами матрицы периодов (71) соответствующей вспомогательной комплексной кривой, например (68) или (101). Мнимая часть матрицы периодов является кэлеровой метрикой, как следует непосредственно из выражения для кэлерова потенциала

$$K(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) = \text{Im} \left(\sum_i \bar{a}_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} \right). \quad (109)$$

Производные матричных элементов матрицы периодов $\partial T_{ij} / \partial a_k = \mathcal{F}_{ijk}$ являются тем самым полностью симметричными голоморфными тензорами, которые непосредственно входят в уравнения ВДВВ (1).

Согласно концепции электромагнитной дуальности две дуальные голоморфные функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^S$ описывают ту же самую геометрию и находятся в одном и том же классе эквивалентности. Мы уже отмечали, что эта дуальность является основой теории Виттена–Зайберга. Следовательно, можно утверждать, что физически значимые результаты, если они выражаются в терминах функции $\mathcal{F}$, должны одинаково выполняться для всех представителей класса эквивалентности. В частности, функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^S$ должны одновременно удовлетворять одним и тем же соотношениям. Поэтому можно заключить, что уравнения ассоциативности должны выполняться для всех представителей данного класса эквивалентности.

Понятие метрики в том виде, в котором оно появляется в контексте уравнений ассоциативности, продолжает вызывать проблемы. Мы уже отмечали, что специальная кэлерова метрика не имеет ничего общего с “метрикой”, введенной в контексте двумерных топологических теорий, где изначально были обнаружены уравнения ВДВВ. Последняя связана с третьими производными функции $\mathcal{F}$ и в случае двумерной топологической теории может быть выбрана постоянной. Заметим, однако, что условие постоянства метрики, вообще говоря, не сохраняется при преобразованиях дуальности, или тем самым преобразования дуальности, вообще говоря, выводят за класс топологических решений в смысле работы [3]. Специальная кэлерова метрика выражается через вторые производные и при дуальности преобразуется не голоморфно (см. формулу (130) ниже). В отличие от специальной кэлеровой метрики, метрика, возникающая в уравнениях ассоциативности (1), очевидно, непостоянна и голоморфна, и это, как уже говорилось, чрезвычайно важный момент.

Ковариантность уравнений ВДВВ относительно преобразований дуальности выходит за рамки теории Виттена–Зайберга, так как ковариантность применима ко всем случаям, в которых выполняются уравнения ВДВВ, независимо от того, можно ли привести физические аргументы в пользу существования электромагнитной дуальности для того или иного решения. Напомним, что все решения Виттена–Зайберга описываются в терминах интегрируемых систем, так что функция $\mathcal{F}$ является тау-функцией универсальной иерархии Уизема (ограниченной на конечный набор переменных) [17] (см. также [18] и приведенную там литературу). Однако, насколько известно в настоящий момент, существуют тау-функции, которые не отвечают решениям Виттена–Зайберга, но тем не менее являются решениями уравнений ВДВВ (1). Таким образом, применяя преобразование

дуальности к некоторой тау-функции, мы получим другую тау-функцию, удовлетворяющую уравнениям ВДВВ даже в отсутствие изначальных аргументов о том, что преобразования дуальности устанавливают некоторые классы эквивалентности для этих тау-функций.

Еще один круг вопросов касается связи между уравнениями ВДВВ в теории Виттена–Зайберга с геометрией пространств модулей римановых поверхностей и интегрируемыми системами. Безусловно, дуальные матрицы периодов неразличимы с точки зрения геометрии комплексных кривых. С этой точки зрения они эквивалентны, и эквивалентность уравнений ассоциативности является следствием этого факта. С другой стороны, хорошо известно, что когда две разные функции $F(\mathbf{a})$ и $\tilde{F}(\tilde{\mathbf{a}})$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{a}_i \partial \tilde{a}_j} \quad (110)$$

и мы знаем, что одна из них, скажем $F(\mathbf{a})$, является решением уравнений ВДВВ, тогда другая функция $\tilde{F}(\tilde{\mathbf{a}})$ тривиально удовлетворяет тому же уравнению. В работе [12] мы распространили это соотношение эквивалентности на случай функций, вторые производные которых (т.е. матрицы периодов) связаны преобразованиями дуальности. Заметим при этом, что, представляя ту же самую геометрию и принадлежа к одному и тому же классу эквивалентности, эти две функции, которые являются одновременно решениями уравнений ВДВВ, будут, вообще говоря, совершенно различными функциями своих аргументов.

5.2. Электромагнитная дуальность и уравнения ВДВВ. Следуя работе [12], рассмотрим теперь преобразования электромагнитной дуальности

$$a_i \rightarrow a_i^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i}, \quad a_i^D \rightarrow -a_i = \frac{\partial \mathcal{F}^D(\mathbf{a}^D)}{\partial a_i^D} \quad (111)$$

с дуальной функцией $\mathcal{F}^D(\mathbf{a}^D)$. Как хорошо известно, это преобразование можно представить в виде преобразования Лежандра

$$\mathcal{F}^D(\mathbf{a}^D) = \mathcal{F}(\mathbf{a}) - \sum_i a_i a_i^D. \quad (112)$$

В качестве очевидного следствия имеем

$$\frac{\partial a_i^D}{\partial a_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j} = T_{ij}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial a_j^D} = -\frac{\partial^2 \mathcal{F}^D}{\partial a_i^D \partial a_j^D} = -T_{ij}^D, \quad (113)$$

так что дуальная матрица периодов T_{ij}^D с точностью до знака является обратной к первоначальной матрице периодов (71), т.е.

$$\sum_j T_{ij}^D T_{jk} = -\delta_{ik}. \quad (114)$$

Рассмотрим теперь величины

$$\|F_i^D\|_{jk} \equiv \mathcal{F}_{ijk}^D = -\frac{\partial T_{ij}^D}{\partial a_k^D} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}^D}{\partial a_i^D \partial a_j^D \partial a_k^D}. \quad (115)$$

Непосредственным вычислением получаем

$$\frac{\partial T_{ij}^D}{\partial T_{kl}} = T_{ik}^D T_{lj}^D, \quad (116)$$

а также

$$\frac{\partial T_{ij}^D}{\partial a_k^D} = \sum_{l,m,n} T_{il}^D \frac{\partial T_{mn}}{\partial a_l} T_{nj}^D \frac{\partial a_l}{\partial a_k^D}. \quad (117)$$

Следовательно, третьи производные $\mathcal{F}_{ijk}$ преобразуются при этом как третьи производные функции при соответствующей (линейной) репараметризации:

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}^D}{\partial a_i^D \partial a_j^D \partial a_k^D} = \sum_{l,m,n} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial a_l \partial a_m \partial a_n} \frac{\partial a_i}{\partial a_l^D} \frac{\partial a_j}{\partial a_m^D} \frac{\partial a_k}{\partial a_n^D}, \quad (118)$$

или в матричной форме

$$\|F_i^D\| = \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial a_j^D} \|T^D \cdot F_j \cdot T^D\|. \quad (119)$$

Из этих формул очевидно, что уравнения (1) выполняются и для дуальной функции $\mathcal{F}^D(\mathbf{a}^D)$, так как

$$F_i^D \cdot (F_j^D)^{-1} \cdot F_k^D - (i \leftrightarrow k) = \sum_{l,m,n} \frac{\partial a_i}{\partial a_m^D} \frac{\partial a_k}{\partial a_n^D} \frac{\partial a_j^D}{\partial a_l} (F_m \cdot F_l^{-1} \cdot F_n - (m \leftrightarrow n)) = 0, \quad (120)$$

где в правой части мы использовали соотношения (1) для всех индексов l, m, n .

Та же самая логика справедлива в случае обобщенной электромагнитной дуальности, преобразования которой образуют арифметическую подгруппу $Sp(2r, \mathbb{R})$ и обобщают преобразования дуальности, задаваемые формулой (111); буквой r мы обозначили ранг калибровочной группы. На пертурбативном уровне группа преобразований дуальности становится непрерывной. Обсуждаемые в работе свойства ковариантности, установленные в работе [12], от этого не зависят.

В дуальном базисе (который для общих преобразований дуальности мы будем обозначать индексом S) мы переходим к новым переменным $\mathbf{a}^S$ и новой функции $\mathcal{F}^S(\mathbf{a}^S)$ с помощью формул

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^S &= U \cdot \mathbf{a} + Z \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right), \\ \left(\frac{\partial \mathcal{F}^S}{\partial \mathbf{a}^S} \right) &= V \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right) + W \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (121)$$

где матрицы U, V, W, Z (размера $r \times r$) объединяются в матрицу из группы $Sp(2r, \mathbb{Z})$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} U & Z \\ W & V \end{pmatrix}, \quad (122)$$

если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} U^t \cdot V - W^t \cdot Z &= V \cdot U^t - Z \cdot W^t = 1, \\ U^t \cdot W &= W^t \cdot U, \quad Z^t \cdot V = V^t \cdot Z, \end{aligned} \quad (123)$$

означающие, что у матрицы $\mathcal{O}$ детерминант равен единице, а кроме того, она удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{O}^{-1} = \Omega \mathcal{O}^t \Omega^{-1} \quad (124)$$

с $(2r \times 2r)$ -матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Обобщение формулы (112) на общий случай имеет вид

$$\mathcal{F}^S(\mathbf{a}^S) = \mathcal{F}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \mathbf{a}^t \cdot U^t \cdot W \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a}^t \cdot W^t \cdot Z \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right)^t \cdot Z^t \cdot V \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right). \quad (126)$$

Отметим, что эта формула является (частичным) преобразованием Лежандра только в случае, когда $U^t \cdot W = Z^t \cdot V = 0$.

Пользуясь этими формулами, легко показать, что матрица периодов, как и раньше определяемая формулами (71), и ее дуальный аналог в общем случае

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}^S}{\partial a_i^S \partial a_j^S} = T_{ij}^S \quad (127)$$

связаны соотношением

$$T^S = (V \cdot T + W) \cdot S^{-1}(T). \quad (128)$$

Специальная кэлерова метрика, построенная по кэлерову потенциалу (109),

$$G_{\bar{i}j} = \frac{\partial^2 K(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})}{\partial \bar{a}_{\bar{i}} \partial a_j} = \text{Im } T_{ij} \quad (129)$$

преобразуется согласно формуле

$$G^S = [S^\dagger]^{-1}(\bar{T}) \cdot G \cdot S^{-1}(T), \quad (130)$$

где матрица $S(T)$ определена соотношением

$$S_{ij}(T) = \frac{\partial a_i^S}{\partial a_j} = \|U + Z \cdot T\|_{ij}. \quad (131)$$

Покажем теперь, что третьи производные функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^S$ связаны соотношением вида (118), т.е.

$$\mathcal{F}_{ijk}^S = \sum_{l,m,n} \mathcal{F}_{lmn} (S^{-1})_{li} (S^{-1})_{mj} (S^{-1})_{nk}, \quad (132)$$

или

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}^S}{\partial a_i^S \partial a_j^S \partial a_k^S} = \sum_{l,m,n} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial a_l \partial a_m \partial a_n} \frac{\partial a_i}{\partial a_l^S} \frac{\partial a_j}{\partial a_m^S} \frac{\partial a_k}{\partial a_n^S}. \quad (133)$$

Сначала можно показать, что

$$\delta T^S = (V - (V \cdot T + W) \cdot S^{-1} \cdot Z) \cdot \delta T \cdot S^{-1} = (S^t)^{-1} \cdot \delta T \cdot S^{-1}. \quad (134)$$

Эта формула непосредственно следует из уравнений (128), (131) и (123). Аналогично можно показать, что $S^{-1}(T) \cdot Z$ является симметричной матрицей.

Заменив в формуле (134) вариацию общего вида на производные по компонентам вектора $\mathbf{a}^S$ и используя равенство $\mathcal{F}_{ijk} = \partial T_{ij} / \partial a_k$ вместе с формулой (131), можно доказать формулу (132) в общем случае. Далее, следуя тем же рассуждениям, что и выше, мы приходим к выводу, что уравнения ВДВВ (1) остаются ковариантными относительно *общих* преобразований дуальности (128), т.е. функция $\mathcal{F}^S(\mathbf{a}^S)$ удовлетворяет уравнениям

$$\mathbf{F}_i^S \cdot (\mathbf{F}_j^S)^{-1} \cdot \mathbf{F}_k^S = \mathbf{F}_k^S \cdot (\mathbf{F}_j^S)^{-1} \cdot \mathbf{F}_i^S, \quad (135)$$

если изначальная функция $\mathcal{F}$ являлась решением уравнений ВДВВ. Положив в общих формулах $U = V = 0$ и $Z = -W = 1$, легко проверить, что из них можно получить формулы (120) как частный случай.

Формула (134) является простым следствием преобразований дуальности (128) и их транспонированной версии с $T^t = T$ и $(T^S)^t = T^S$. Из формул (134) и (131) следует, что

$$\begin{aligned} \delta T^S &= (V - (V \cdot T + W) \cdot S^{-1} \cdot Z) \cdot \delta T \cdot S^{-1} = \\ &= (S^t)^{-1} \cdot \delta T \cdot (V^t - Z^t \cdot (S^t)^{-1} \cdot (T \cdot V^t + W^t)), \end{aligned} \quad (136)$$

а эквивалентность (136) и (134) можно легко доказать, используя соотношения (123). Частный случай преобразований дуальности, когда $U^t \cdot W = Z^t \cdot V = 0$, а формула (126) принимает вид (частичного) преобразования Лежандра, может иметь особый смысл в контексте иерархий уиземовского типа.

6. УРАВНЕНИЯ АССОЦИАТИВНОСТИ В БЕЗДИСПЕРСИОННЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЯХ

6.1. От соотношений Хироты к уравнениям ВДВВ. Уравнения ВДВВ (1) можно изучать и в том случае, когда число переменных бесконечно, при этом наиболее удобно пользоваться формой (13). Более того, следуя работам [7], [20], в этом случае удобно использовать производящие функции для производных функции $\mathcal{F}$. Вводя оператор

$$D(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad (137)$$

легко определить производящие функции для вторых производных (3)

$$D_1 D_2 \mathcal{F} \equiv D(z_1) D(z_2) \mathcal{F} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k}}{k} \frac{z_2^{-m}}{m} \mathcal{F}_{km} \quad (138)$$

и третьих производных (2)

$$D_1 D_2 D_3 \mathcal{F} \equiv D(z_1) D(z_2) D(z_3) \mathcal{F} = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k}}{k} \frac{z_2^{-m}}{m} \frac{z_3^{-n}}{n} \mathcal{F}_{kmn}. \quad (139)$$

Следуя [7], мы также определим производящие функции для структурных констант (6), (12)

$$C^l(z_1, z_2) = \sum_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}^l \frac{z_1^{-i}}{i} \frac{z_2^{-j}}{j}, \quad (140)$$

а также для величин X_{ijkn} (14)

$$X(z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv \sum_{i,j,k,n=1}^{\infty} \frac{z_1^{-i}}{i} \frac{z_2^{-j}}{j} \frac{z_3^{-k}}{k} \frac{z_4^{-n}}{n} X_{ijkn}. \quad (141)$$

Отправной точкой в данном разделе будут билинейные тождества для тау-функций, которые называются уравнениями Хироты. Пусть $\mathcal{F}$ является логарифмом тау-функции иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) в бездисперсионном пределе $\mathcal{F} \equiv \ln \tau$ [4], [21]. В этом пределе уравнения Хироты представляют собой систему соотношений на вторые производные $\mathcal{F}_{ij}$. Для производящих функций они могут быть записаны в виде [21], [22]

$$(z_1 - z_2)(1 - e^{D_1 D_2 \mathcal{F}}) = (D_1 - D_2) \partial_{t_1} \mathcal{F}, \quad (142)$$

где мы использовали оператор (137). Эти соотношения можно также переписать в симметричной форме:

$$(z_1 - z_2) e^{D_1 D_2 \mathcal{F}} + (z_2 - z_3) e^{D_2 D_3 \mathcal{F}} + (z_3 - z_1) e^{D_3 D_1 \mathcal{F}} = 0. \quad (143)$$

Заметим, что формулу (142) можно получить из формулы (143) в пределе $z_3 \rightarrow \infty$. Эти уравнения следует понимать как бесконечный набор алгебраических соотношений для $\mathcal{F}_{ij}$, следующих из разложения обеих частей равенств в ряды по обратным степеням z_i и сравнения соответствующих коэффициентов. Эти соотношения могут быть разрешены относительно $\mathcal{F}_{ij}$ с $i, j \geq 2$. Действительно, переписав формулу (142) в виде

$$D(z_1) D(z_2) \mathcal{F} = \ln \frac{w(z_1) - w(z_2)}{z_1 - z_2}, \quad (144)$$

где

$$w \equiv w(z) = z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} \mathcal{F}_{1k}, \quad (145)$$

легко понять, что

$$\mathcal{F}_{ij} = P_{ij}(\mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{13}, \dots), \quad (146)$$

где P_{ij} – некоторые полиномы.

Вторые производные тау-функции позволяют определить набор коммутирующих потоков с генераторами H_k , которые можно получить из разложений

$$D(z_1)D(z_2)\mathcal{F} = -\ln\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k}}{k} H_k(z_2). \quad (147)$$

Действуя оператором $D(z_3)$ на обе части равенства (147) и меняя местами параметры z_1 и z_3 , найдем

$$\frac{\partial H_i(z)}{\partial t_j} = \frac{\partial H_j(z)}{\partial t_i}. \quad (148)$$

Заметим, что $H_1(z) = w(z)$ (145). Соотношения (148) можно рассматривать как систему эволюционных уравнений на функцию $w(z)$

$$\frac{\partial w(z)}{\partial t_k} = \frac{\partial H_k(z)}{\partial t_1}. \quad (149)$$

Если эти уравнения переписать как эволюционные уравнения на функцию $z(w)$, они принимают форму бездисперсионных уравнений Лакса

$$\frac{\partial z(w)}{\partial t_k} = \{H_k(w), z(w)\}_{\text{KP}}, \quad (150)$$

где скобки Пуассона определены формулой

$$\{f, g\}_{\text{KP}} = \frac{df}{dw} \frac{\partial g}{\partial t_1} - \frac{\partial f}{\partial t_1} \frac{dg}{dw}, \quad (151)$$

а производные по временам t_i берутся при фиксированном w . Более того, как следует из формулы (144), H_k являются полиномами по w . С другой стороны, из формулы (147) следует, что H_k имеют вид $H_k = z^k - D(z)\partial_{t_k}\mathcal{F}$, т.е. $H_k = z^k + O(z^{-1})$. Поэтому

$$H_k = (z^k(w))_{\geq 0}, \quad (152)$$

где запись $(f(w))_{\geq 0}$ означает неотрицательные степени в разложении Лорана по w , что представляет собой бездисперсионную иерархию КП (см., например, [21]). По заданной функции Лакса $z(w) = w + O(z^{-1})$ и величинам H_k , полученным из нее с помощью формул (152), можно построить вторые производные $\mathcal{F}_{jk}$ по формулам

$$\mathcal{F}_{jk} = \frac{1}{j+k} \text{res}|_{\infty} \left(\frac{dH_j}{d \ln z} \frac{dH_k}{d \ln z} \right), \quad (153)$$

являющимся аналогами формул (51) и даже, в некотором смысле, формул (67) и (71). Заметим, что уравнения (147)–(150) выполняются для любой функции $\mathcal{F}$, и они еще

не являются интегрируемой иерархией, несмотря на существование бесконечного числа взаимно коммутирующих потоков (148). Интегрируемая иерархия возникает после того, как мы потребуем выполнения дополнительного соотношения (152)⁴⁾. Уравнения Хироты задают соотношения между производящей функцией потоков и (глобально определенной) функцией w и позволяют определить H_k как функции $H_k(w)$ с определенными аналитическими свойствами, в случае бездисперсионной иерархии КП – полиномами. С этой точки зрения тождества Хироты эквивалентны условию интегрируемости системы.

Подставляя (144) в правую часть формулы (147) и дифференцируя по $w = w(z_2)$, получаем соотношение

$$\frac{1}{w(z_1) - w} = \sum_{k \geq 1} \frac{z_1^{-k}}{k} \frac{dH_k(w)}{dw}, \quad (154)$$

которое будет использовано ниже для явной реализации ассоциативной алгебры.

Отметим, что все основные соотношения бездисперсионных иерархий КП и Тоды содержат лишь вторые производные функции $\mathcal{F}$. Элементарные действия с уравнениями Хироты (142) позволяют переписать их в форме (11), которая совпадает с соотношениями, определяющими структурные константы C_{ij}^l . Действуя оператором $D(z_3)$ на обе части равенства (142), получаем

$$D_1 D_2 D_3 \mathcal{F} = -\frac{1}{w_1 - w_2} (D_1 - D_2) D_3 \partial_{t_1} \mathcal{F} = -\frac{e^{-D_1 D_2 \mathcal{F}}}{z_1 - z_2} (D_1 - D_2) D_3 \partial_{t_1} \mathcal{F}, \quad (155)$$

где $w_i \equiv w(z_i)$. Заметим сразу, что уравнение (155), переписанное в компонентах (с использованием (137), (139) и (140)), эквивалентно бесконечномерной версии формулы (11)

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_{l=1}^{\infty} C_{ij}^l \mathcal{F}_{lk1}, \quad (156)$$

в которой структурные константы определены с помощью соотношения (140):

$$C^l(z_1, z_2) = -\frac{z_1^{-l} - z_2^{-l}}{l(w_1 - w_2)} = -\frac{z_1^{-l} - z_2^{-l}}{l(z_1 - z_2)} e^{-D(z_1)D(z_2)\mathcal{F}}. \quad (157)$$

Из формулы (140) сразу видно, что бесконечная сумма в (156) на самом деле конечна и обрывается на $l = i + j$.

Покажем теперь, что функция $\mathcal{F}$, определенная в (142) или (143), удовлетворяет уравнениям ВДВВ (13), в которых каждый индекс принимает значение в множестве всех натуральных чисел. В терминах производящих функций это означало бы, что функция $X(z_1, z_2, z_3, z_4)$, определенная в (141), полностью симметрична относительно перестановок всех $z_1, \dots, z_4$. Достаточно доказать симметрию $X(z_1, z_2, z_3, z_4)$ по отношению к перестановкам z_2 и z_3 , которая эквивалентна соотношению

$$z_{13} e^{D_1 D_3 \mathcal{F}} (D_1 - D_2) D_3 D_4 \mathcal{F} = z_{12} e^{D_1 D_2 \mathcal{F}} (D_1 - D_3) D_2 D_4 \mathcal{F}, \quad (158)$$

⁴⁾В случае квазиклассической иерархии общего положения нужно потребовать, чтобы гамильтонианы – аналоги (152) (или, точнее, их дифференциалы) – обладали заданными аналитическими свойствами на некоторой римановой поверхности.

где $z_{ik} = z_i - z_k$, или

$$\begin{aligned} & z_{13}e^{D_1 D_3 \mathcal{F}} D_1 D_3 D_4 \mathcal{F} - z_{12}e^{D_1 D_2 \mathcal{F}} D_1 D_2 D_4 \mathcal{F} = \\ & = z_{13}e^{D_1 D_3 \mathcal{F}} D_2 D_3 D_4 \mathcal{F} - z_{12}e^{D_1 D_2 \mathcal{F}} D_3 D_2 D_4 \mathcal{F} = \\ & = D_2 D_3 D_4 \mathcal{F} (z_{13}e^{D_1 D_3 \mathcal{F}} - z_{12}e^{D_1 D_2 \mathcal{F}}). \end{aligned} \quad (159)$$

Используя (143), легко привести выражение (159) к виду

$$D_4(z_{13}e^{D_1 D_3 \mathcal{F}} - z_{12}e^{D_1 D_2 \mathcal{F}} - z_{23}e^{D_2 D_3 \mathcal{F}}) = 0, \quad (160)$$

который является D_4 -производной формулы (143), и поэтому уравнения ВДВВ (13), (1) являются следствием уравнений Хироты.

Подобным образом легко также доказать уравнения ВДВВ для функции $\mathcal{F}$, в качестве “метрики” выбрав матрицу $D(z_a)\mathcal{F}_{ij}$ вместо $\mathcal{F}_{1ij}$, восстанавливая таким образом симметрию уравнений (1). Применяя оператор $D(z_3)$ к симметричной форме уравнений Хироты (143), записанной для трех точек z_1, z_2 и z_a , получаем

$$D_1 D_2 D_3 \mathcal{F} = \frac{1}{w_{12}} (w_{1a} D_1 - w_{2a} D_2) D_3 D_a \mathcal{F}, \quad (161)$$

где

$$w_{ik} \equiv (z_i - z_k)e^{D_i D_k \mathcal{F}} \quad (162)$$

представляет собой обратный “одетый” двухточечный коррелятор. Аналогично формуле (155), которая воспроизводится в пределе $z_a \rightarrow \infty$, уравнение (161) определяет структурные константы. Уравнения ВДВВ в данном случае эквивалентны соотношению

$$w_{1a}(w_{13}D_1D_3D_4\mathcal{F} - w_{12}D_1D_2D_4\mathcal{F}) = (w_{13}w_{2a} - w_{12}w_{3a})D_2D_3D_4\mathcal{F}. \quad (163)$$

Вычислив D_4 -производную формулы (143), левую часть равенства (163) можно переписать в виде $w_{1a}w_{23}D_2D_3D_4\mathcal{F}$. Ясно, что соотношение (163) эквивалентно тождеству

$$w_{1a}w_{23} = w_{13}w_{2a} - w_{12}w_{3a}, \quad (164)$$

которое автоматически выполняется для величин (162), поскольку $w_{ij} = w_i - w_j$.

6.2. Вывод конечных уравнений ВДВВ из бесконечных. Для реализации ассоциативной алгебры со структурными константами, определенными формулой (157), введем полиномы

$$\phi_k(w) = \frac{dH_k(w)}{dw}, \quad k \geq 1. \quad (165)$$

Разлагая обе части тождества

$$\frac{1}{(w - w_1)(w - w_2)} = \frac{1}{w_1 - w_2} \left(\frac{1}{w - w_1} - \frac{1}{w - w_2} \right) \quad (166)$$

по z_1^{-1} , z_2^{-1} , используя (154) и сравнивая коэффициенты, получим алгебраические соотношения

$$\phi_i(w)\phi_j(w) = \sum_{k \geq 1} C_{ij}^k \phi_k(w), \quad (167)$$

в которых структурные константы в точности совпадают с определенными в (157). В отличие от алгебры (46), эта бесконечномерная алгебра представляет собой кольцо полиномов *произвольной* степени, поскольку в (167) не предполагается никакой факторизации (например, факторизации по $dW = 0$).

Для полноты картины покажем, что формула вычетов (19) для третьих производных функции $\mathcal{F}$ прямо следует из соотношений Хироты. Подставляя в (155) частный случай этой же формулы $D_1 D_2 \partial_{t_1} \mathcal{F} = -(D_1 - D_2) \partial_{t_1}^2 \mathcal{F} / (w_1 - w_2)$ (отвечающий пределу $z_3 \rightarrow \infty$), легко выразить $D_1 D_2 D_3 \mathcal{F}$ через производные специального вида $D_i \partial_{t_1}^2 \mathcal{F}$:

$$D_1 D_2 D_3 \mathcal{F} = \sum_{i=1}^3 \operatorname{res}_{|w_i} \left(\frac{D(z(w)) \partial_{t_1}^2 \mathcal{F}}{(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)} dw \right), \quad (168)$$

где числитель $D(z) \partial_{t_1}^2 \mathcal{F} = -\partial w(z) / \partial t_1$ равен $\partial_{t_1} z(w) / z'(w)$, если выразить его через независимую переменную w ($z'(w) \equiv dz/dw$). Разлагая обе части этого равенства в ряды по $z_{1,2,3}^{-1}$ и используя (154), получаем

$$\mathcal{F}_{ijk} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{\partial_{t_1} z(w)}{z'(w)} \phi_i(w) \phi_j(w) \phi_k(w) dw, \quad (169)$$

где C_∞ – контур вокруг бесконечности в области, где $w(z)$ голоморфна и однозначна, а $z'(w)$ не имеет нулей и особенностей. Заметим, что “топологическая метрика” $\eta_{jk} = \mathcal{F}_{jk1}$ (поскольку $\phi_1 = 1$, как и в случае моделей Гинзбурга–Ландау). Поэтому алгебра (167) полностью согласована с формулами (11):

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_l C_{ij}^l \mathcal{F}_{lk1} = \sum_l C_{ij}^l \eta_{kl}. \quad (170)$$

Если существует не зависящая от времен функция $\varphi(z)$ такая, что $E(w) \equiv \varphi(z(w))$ – мероморфная функция переменной w , количество полюсов которой не меняется при изменении всех времен t_j , то интеграл (169) равен сумме вычетов в нулях функции $E'(w)$:

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_{E'(w_a)=0} \operatorname{res}_{|w_a} \left(\frac{\partial_{t_1} E(w)}{E'(w)} \phi_i(w) \phi_j(w) \phi_k(w) dw \right). \quad (171)$$

Действительно, $\partial_{t_1} z(w) / z'(w) = \partial_{t_1} E(w) / E'(w)$, и полюсы $\partial_{t_1} E(w)$ не дают вклада в интеграл, так как они сокращаются с полюсами $E'(w)$. Существование такой функции E приводит к конечномерной редукции иерархии, в этом случае алгебра ВДВВ становится конечномерной. Это легко увидеть из формулы вычетов, но здесь, следуя [7], мы продемонстрируем это, взяв за исходную точку уравнения Хироты.

В терминах уравнений Хироты конечномерная редукция выражается в дополнительных к (146) условиях на вторые производные логарифма тау-функции

$$\mathcal{F}_{1M} = P_{1M}(\mathcal{F}_{11}, \dots, \mathcal{F}_{1,N-1}), \quad M \geq N, \quad (172)$$

в которых функции P_{1M} не зависят явно от времен и не противоречат уравнениям эволюции. Любая редукция такого типа оставляет $N - 1$ независимых переменных – *примарных полей*, в качестве которых можно выбрать величины $\mathcal{F}_{1j}$ с $1 \leq j \leq N - 1$. Все остальные величины $\mathcal{F}_{1M}$ при $M \geq N$ (“потомки”) выражаются через независимые переменные с помощью формул (172). Частным случаем обсуждаемых редукций является хорошо известная редукция Гельфанда–Дикого (N -КдФ), при которой $\mathcal{F}$ не зависит от времен $t_N, t_{2N}, t_{3N}, \dots$. В этом случае функции P_{1M} являются некоторыми полиномами с рациональными коэффициентами, такими что $E(w) = z^N(w)$ – полином по w . Известны также другие редукции, при которых z^N является рациональной функцией [4]. В дальнейшем нам не потребуется явной формы уравнений (146) и (172), и мы будем пользоваться прописными буквами $(J, M, L, \dots)$ для “потомков”, т.е. индексов, принимающих значения, большие чем $N - 1$.

В случае редукции “метрика” $\mathcal{F}_{lk1}$ в формуле (156) становится вырожденной матрицей ранга $N - 1$. Действительно, дифференцируя (172) по t_k , легко заметить, что J -я строчка матрицы $\mathcal{F}_{jk1}$ представляет собой линейную комбинацию первых $N - 1$ строчек. Конечномерные уравнения ВДВВ возникают в результате проекции на невырожденное $(N - 1)$ -мерное подпространство.

Определим теперь структурные константы, следуя формуле (11) и подставляя (172) в (146). Это позволяет выразить $\mathcal{F}_{Lk1}$ через $\mathcal{F}_{lk1}$. Действительно, поскольку

$$\mathcal{F}_{ij} = P_{ij}(\mathcal{F}_{1k}) = P_{ij}(\mathcal{F}_{11}, \dots, \mathcal{F}_{1,N-1}; P_{1L}(\mathcal{F}_{11}, \dots, \mathcal{F}_{1,N-1})),$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ijk} &= \frac{\partial P_{ij}}{\partial t_k} = \sum_{l=1}^{N-1} \left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial \mathcal{F}_{1l}} + \sum_L \frac{\partial P_{ij}}{\partial \mathcal{F}_{1L}} \frac{\partial P_{1L}}{\partial \mathcal{F}_{1l}} \right) \mathcal{F}_{lk1} = \\ &= \sum_{l=1}^{N-1} \left(C_{ij}^l + \sum_L C_{ij}^L \frac{\partial P_{1L}}{\partial \mathcal{F}_{1l}} \right) \mathcal{F}_{lk1}. \end{aligned} \quad (173)$$

Стоящее в скобках в правой части этого равенства выражение

$$\tilde{C}_{ij}^l = C_{ij}^l + \sum_L C_{ij}^L \frac{\partial P_{1L}}{\partial \mathcal{F}_{1l}} \quad (174)$$

при $i, j < N$ определяет структурные константы конечномерной алгебры, образованной примарными полями. Система уравнений (156) при этом становится конечной:

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_{l=1}^{N-1} \tilde{C}_{ij}^l \mathcal{F}_{lk1}, \quad (175)$$

так что “метрика” $\mathcal{F}_{lk1}$ невырождена на малом пространстве ($l, k = 1, \dots, N-1$). Структурные константы алгебры примарных полей удовлетворяют конечномерным уравнениям ВДВВ, другими словами, величины $\tilde{X}_{ijkm}$, определенные с помощью соотношения $\tilde{X}_{ijkm} \equiv \sum_{l=1}^{N-1} \tilde{C}_{ij}^l \mathcal{F}_{lkm}$, симметричны относительно перестановок (строчных!) индексов i, j, k, m . Это следует из того, что $\tilde{X}_{ijkm} = X_{ijkm}$ при $i, j, k, m < N$.

Доказательство симметрии $\tilde{X}_{ijkm}$ становится очевидным после того, как выписана формула

$$X_{ijkm} = \sum_{l=1}^{N-1} C_{ij}^l \mathcal{F}_{lkm} + \sum_L C_{ij}^L \mathcal{F}_{Lkm}, \quad (176)$$

и, подставляя C_{ij}^l из (174) в (176), убеждаемся, что

$$X_{ijkm} = \tilde{X}_{ijkm} + \sum_L C_{ij}^L Y_{Lkm},$$

где

$$Y_{Lkm} = \mathcal{F}_{Lkm} - \sum_{l < N} \frac{\partial P_{1L}}{\partial \mathcal{F}_{1l}} \mathcal{F}_{lkm} = 0.$$

Чтобы убедиться в последнем равенстве, следует выразить $\mathcal{F}_{lkm}$ под знаком суммы через $\mathcal{F}_{ij1}$, используя (175), и поменять порядок суммирования.

6.3. Бездисперсионная иерархия Тоды и конформные отображения. Бездисперсионная иерархия Тоды приводит к уравнениям ВДВВ аналогичным образом [7]. Независимыми переменными в бездисперсионной иерархии Тоды являются времена $t_0, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots$, и в данном случае удобно ввести две производящие функции

$$w^{\pm}(z) = z e^{-\frac{1}{2} \partial_{t_0}^2 \mathcal{F} - \partial_{t_0} D^{\pm}(z) \mathcal{F}}, \quad (177)$$

где

$$D^{\pm}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} \frac{\partial}{\partial t_{\pm k}}.$$

Для производящих функций уравнения Хироты бездисперсионные иерархии Тоды имеют вид [20], [21]

$$\begin{aligned} w^{\pm}(z_1) - w^{\pm}(z_2) &= (z_1 - z_2) e^{-\frac{1}{2} \partial_{t_0}^2 \mathcal{F}} e^{-D_1^{\pm} D_2^{\pm} \mathcal{F}}, \\ 1 - \frac{1}{w^{+}(z_1) w^{-}(z_2)} &= e^{-D_1^{+} D_2^{-} \mathcal{F}}. \end{aligned} \quad (178)$$

Эти уравнения определяют бездисперсионную иерархию Тоды следующими генераторами коммутирующих потоков:

$$H_{\pm j}(w) = ((z^{\pm}(w^{\pm 1}))^j)_{\pm} + \frac{1}{2} ((z^{\pm}(w^{\pm 1}))^j)_0, \quad j \geq 1, \quad H_0(w) = \ln w, \quad (179)$$

где $z^\pm(w)$ обозначают обратные функции к $w^\pm(z)$, а $(\cdot)_\pm$, $(\cdot)_0$ означают соответственно строго положительные, строго отрицательные и нулевые компоненты разложений Лорана. Уравнения Лакса имеют вид

$$\frac{\partial z^\pm(w^{\pm 1})}{\partial t_j} = \text{sign } j \{H_j(w), z^\pm(w^{\pm 1})\}_{\text{Тода}}, \quad (180)$$

где скобки Пуассона определяются формулой

$$\{f, g\}_{\text{Тода}} = \frac{df}{d \ln w} \frac{\partial g}{\partial t_0} - \frac{\partial f}{\partial t_0} \frac{dg}{d \ln w}. \quad (181)$$

Тодовским аналогом производящей функции (154) для производных H_j является выражение

$$\frac{w^{\pm 1}}{w^\pm(z_1) - w^{\pm 1}} = \pm \sum_{k \geq 1} \frac{z_1^{-k}}{k} \frac{dH_{\pm k}(w)}{d \ln w}, \quad (182)$$

“метрикой” (5) можно считать матрицу $\eta_{ij} = \mathcal{F}_{0ij}$, в которой бегущие индексы принимают теперь все целочисленные значения, а структурные константы (10) определим следующим образом:

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{ij}^l \mathcal{F}_{lk0}. \quad (183)$$

Из этого определения следует, в частности, что $C_{0j}^k = \delta_j^k$ для любых j, k , но, конечно, “метрика” $\mathcal{F}_{0ij}$ не обязательно постоянна. Чтобы найти остальные структурные константы, подействуем оператором ∂_{t_k} на уравнения Хироты (178):

$$\begin{aligned} D_1^\pm D_2^\pm \partial_{t_k} \mathcal{F} &= \frac{1}{w_1^\pm - w_2^\pm} (w_2^\pm D_2^\pm \mathcal{F}_{k0} - w_1^\pm D_1^\pm \mathcal{F}_{k0}), \\ D_1^+ D_2^- \partial_{t_k} \mathcal{F} &= \frac{1}{w_1^+ w_2^- - 1} (\mathcal{F}_{k00} + D_1^+ \mathcal{F}_{k0} + D_2^- \mathcal{F}_{k0}) \end{aligned} \quad (184)$$

(здесь и ниже мы обозначаем $w_i^\pm \equiv w^\pm(z_i)$). Как и в формуле (140), производящие функции для структурных констант могут быть извлечены из выражений в правых частях данных уравнений. Из формулы (184) следует, например, что $C_{ij}^l = 0$ при положительных i и j и $l \leq 0$ или при отрицательных i и j и $l \geq 0$. Если же все индексы либо положительные, либо отрицательные, имеем

$$\sum_{\pm i \geq 1} \sum_{\pm j \geq 1} C_{ij}^l \frac{z_1^{\mp i}}{i} \frac{z_2^{\mp j}}{j} = -\frac{w_1^\pm z_1^{\mp l} - w_2^\pm z_2^{\mp l}}{\pm l (w_1^\pm - w_2^\pm)}, \quad \pm l \geq 1. \quad (185)$$

При различных знаках i и j , используя второе уравнение из (184), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \sum_{j \leq -1} C_{ij}^l \frac{z_1^{-i}}{i} \frac{z_2^j}{j} &= \frac{z_1^{-l}}{l(1 - w_1^+ w_2^-)}, \quad l \geq 1, \\ \sum_{i \geq 1} \sum_{j \leq -1} C_{ij}^l \frac{z_1^{-i}}{i} \frac{z_2^j}{j} &= -\frac{z_2^l}{l(1 - w_1^+ w_2^-)}, \quad l \leq -1, \\ \sum_{i \geq 1} \sum_{j \leq -1} C_{ij}^0 \frac{z_1^{-i}}{i} \frac{z_2^j}{j} &= \frac{1}{1 - w_1^+ w_2^-}. \end{aligned} \quad (186)$$

Пользуясь этим определением структурных констант, легко доказать выполнимость уравнений ВДВВ для любого решения бездисперсионной иерархии Тоды

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{ij}^l \mathcal{F}_{lkm} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{ik}^l \mathcal{F}_{ljm} \quad (187)$$

аналогично случаю бездисперсионной иерархии КП. Доказательство можно найти в работе [7].

Реализация ассоциативной алгебры, определенной структурными константами (185), (186), как и в случае бездисперсионной иерархии КП, может быть получена с помощью формулы (182). Генераторы

$$\phi_i(w) = w \frac{dH_i}{dw}, \quad (188)$$

определенные для всех целочисленных i , образуют базис в пространстве полиномов Лорана произвольной степени. В этом базисе структурные константы в точности совпадают с (186).

Вывод формулы вычетов из уравнений Хироты также аналогичен случаю бездисперсионной иерархии КП. Рассмотрим для простоты случай, когда все индексы положительны. Имеем

$$D_1^+ D_2^+ D_3^+ \mathcal{F} = \sum_{\alpha=1}^3 \text{res}_{|w_\alpha} \left(\frac{D^+(z^+(w)) \partial_{t_1}^2 \mathcal{F}}{(w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)} dw \right). \quad (189)$$

С учетом формулы (182) это становится эквивалентным

$$\mathcal{F}_{jkm} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{\partial_{t_0} z^+(w)}{z^+(w)'} \phi_j(w) \phi_k(w) \phi_m(w) \frac{dw}{w^2}, \quad j, k, m \geq 1, \quad (190)$$

где обозначено $z^+(w)' = dz^+/dw$. Аналогичные формулы легко могут быть написаны и для неположительных индексов.

Как показано в [20], некоторое специальное решение бездисперсионной иерархии Тоды $\mathcal{F}$ описывает эволюцию конформного отображения некоторой области в комплексной плоскости. Это решение удовлетворяет условиям вещественности $t_{-k} = \bar{t}_k$, $w^-(z) = \overline{w^+(z)}$ ⁵⁾, согласованным с уравнениями иерархии, при этом $\mathcal{F}$ является вещественной функцией времен. Пусть функция $z(w) = rw + \sum_{k \geq 0} u_k z^{-k}$ задает однозначное конформное отображение внешности единичного круга $|w| > 1$ на внешность заданной аналитической кривой γ , нормированное так, что бесконечность переходит в бесконечность, а коэффициент r вещественный и положительный. Положим $z^+(w) = z(w)$ и $z^-(w) =$

⁵⁾ Здесь и ниже в этом разделе черта означает комплексное сопряжение в следующем смысле: для любого ряда $f(z) = \sum f_k z^k$ положим $\bar{f}(z) = \sum \bar{f}_k z^k$.

$\bar{z}(w^{-1})$, функция $w(z) = w^+(z)$ играет роль обратного конформного отображения. Эволюция отображения описывается в точности бездисперсионной иерархией Тоды с генераторами коммутирующих потоков, определенными формулами (179). Условия вещественности приводят к равенству $H_{-j}(w) = \overline{H_j(w^{-1})}$. Времена иерархии Тоды при этом приобретают смысл гармонических моментов

$$t_k = \frac{1}{2\pi i k} \oint_{\gamma} z^{-k} \bar{z} dz \quad (191)$$

внешней области, расположенной так, что начало координат ей не принадлежит. “Начальные условия” могут быть заданы в виде бездисперсионного предела струнного уравнения

$$\{z(w), \bar{z}(w^{-1})\}_{\text{Тода}} = 1. \quad (192)$$

При этих условиях формула вычетов (190) может быть переписана в более ясном виде. Поскольку $z(w)$ конформно отображает внешность единичного круга, по крайней мере для некоторой области значений моментов t_k , то в области $|w| > 1$ нет ни нулей, ни полюсов, ни каких-либо других сингулярностей производной. Поэтому подынтегральное выражение в формуле (190) не имеет особенностей нигде вне единичного круга, кроме бесконечности, и, следовательно, контур интегрирования может быть стянут на единичную окружность:

$$\mathcal{F}_{ijk} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{\partial_{t_0} z(w)}{z'(w)} \phi_i(w) \phi_j(w) \phi_k(w) \frac{dw}{w^2}, \quad i, j, k \geq 1. \quad (193)$$

Струнное уравнение (192) может быть записано в виде

$$\frac{\partial_{t_0} z(w)}{z'(w)} = -w^2 \frac{\partial_{t_0} \bar{z}(w^{-1})}{\bar{z}'(w^{-1})} + \frac{w}{z'(w) \bar{z}'(w^{-1})}, \quad (194)$$

где $\bar{z}'(w^{-1})$ — производная $d\bar{z}/dw$, вычисленная в точке w^{-1} . Подставляя (194) в (193) и принимая во внимание, что функция $\partial_{t_0} \bar{z}(w^{-1})/\bar{z}'(w^{-1})$ не имеет особенностей внутри единичного круга, получаем

$$\mathcal{F}_{ijk} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{\phi_i(w) \phi_j(w) \phi_k(w)}{z'(w) \bar{z}'(w^{-1})} \frac{dw}{w} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dH_i dH_j dH_k}{dz d\bar{z}}. \quad (195)$$

Более детальный анализ показывает, что эта формула верна с точностью до общего знака для всех целочисленных индексов, а не только для положительных⁶⁾. В базисе (188) алгебра принимает вид $\phi_i(w) \phi_j(w) = \sum_k C_{ij}^k \phi_k(w)$, где структурные константы определены формулами (185), (186); доказательство аналогично проведенному в п. 6.2.

Сравнивая (195) с формулой вычетов для случая бездисперсионной иерархии КП (171), можно заметить, что требование вещественности вместе с условиями конформности и однозначности эффективно эквивалентно некоторой редукции, так как в обоих

⁶⁾ Впервые эта формула была получена И. Кричевером из других соображений.

случаях вклад в интеграл (190) дают сингулярности знаменателя. С этой точки зрения конформные отображения можно считать бесконечномерными редукциями бездисперсионной иерархии Тоды, а формулы вычетов (193), (195) отвечают локализации не на конечном множестве точек, а на контуре $|w| = 1$.

В завершение данного раздела рассмотрим дальнейшую редукцию, приводящую к новым решениям [7] конечномерных уравнений ВДВВ (1). Рассмотрим класс конформных отображений, которые могут быть представлены полиномами Лорана вида

$$z(w) = rw + \sum_{l=0}^{N-1} u_l w^{-l}. \quad (196)$$

Именно такой класс функций отвечает конформным отображениям областей с конечным числом ненулевых моментов, а именно с нулевыми $t_k = \bar{t}_k = 0$ при $k > N$ [20]. Формулы вычетов (19), (195) при $i, j, k \geq 0$ для такого случая принимают вид

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\phi_i(w_\alpha) \phi_j(w_\alpha) \phi_k(w_\alpha) w_\alpha^{N-1}}{W''(w_\alpha) Q'(w_\alpha)}, \quad (197)$$

где для удобства сравнения с общей формулой (19) формально введены два новых полинома переменной w степени N

$$\begin{aligned} W'(w) &\equiv w^N z'(w) = rw^N - \sum_{k=1}^{N-1} k u_k w^{N-k-1}, \\ Q'(w) &\equiv \bar{z}'(w^{-1}) = r - \sum_{k=1}^{N-1} k \bar{u}_k w^{k+1} \end{aligned} \quad (198)$$

и, как обычно, w_α обозначают нули $W'(w)$ (которые все находятся внутри единичного круга, в то время как все нули $Q(w)$ находятся вне этого круга). Напомним, что функции $\phi_k(w)$ при $k \geq 0$ являются полиномами по w степени k , в частности $\phi_0(w) = 1$.

Теперь можно ввести *конечномерную* алгебру

$$\phi_j(w) \phi_k(w) = \sum_{l=0}^{N-1} C_{jk}^l \phi_l(w) \pmod{W'(w)}, \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (199)$$

которая, как и в случае алгебры Гинзбурга–Ландау, является N -мерной ассоциативной алгеброй, изоморфной кольцу полиномов, факторизованному по идеалу, образованному $W'(w)$. Из формулы вычетов (197) легко видеть, что структурные константы удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{F}_{ijk} = \sum_{l=0}^{N-1} C_{ij}^l \mathcal{F}_{lk0}.$$

Для этого следует применить формулу (197) для случая N -мерного подмножества потоков $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$. Таким образом, мы приходим к выводу, что логарифм тау-функции

кривой, ограниченной на подпространство нулевых старших моментов $t_k, \bar{t}_k$ при $k > N$ (а $t_N \neq 0$ играет при этом роль параметра), является решением конечномерных уравнений ВДВВ (1). Более точно, функция

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t_0, t_1, \dots, t_{N-1}) \equiv \\ \equiv \mathcal{F}(t_0; t_1, \dots, t_{N-1}, t_N, 0, 0, \dots; \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N, 0, 0, \dots) \Big|_{t_N \neq 0, \bar{t}_j \text{ фиксированы}} \end{aligned} \quad (200)$$

является решением системы уравнений ассоциативности (1) с матрицами $(F_i)_{jk} = \partial^3 \mathcal{F} / \partial t_i \partial t_j \partial t_k$, $0 \leq i, j, k \leq N-1$ (подчеркнем, что дифференцирование происходит при постоянных “антиголоморфных” временах $\bar{t}_k$ и старшем ненулевом времени t_N).

В отличие от решений конечной системы уравнений ВДВВ, которые мы обсуждали в п. 3.2, эти решения не позволяют “включать” старшие времена (другими словами, для этого случая не существует гравитационных потомков или “большого фазового пространства”), поскольку при этом не сохраняется форма (196), или, иначе говоря, рациональные конформные отображения не образуют конечномерной редукции бездисперсионной иерархии Тоды. Таким образом, мы видим, что бездисперсионные тау-функции, в частности тау-функции аналитических кривых или конформных отображений, представляют собой в точности противоположный пример нарушения условия согласованности по сравнению со случаем теорий Виттена–Зайберга, исследованным в п. 4.3. Действительно, формула (197) демонстрирует, что для рациональных отображений (196) мы получаем $\#(\alpha) < \#(i)$, т.е. условие согласованности нарушено в противоположном (по отношению к случаю Виттена–Зайберга) направлении. Это означает, что логарифм тау-функции рационального конформного отображения удовлетворяет уравнениям ассоциативности (1) как функция только лишь *части* своих аргументов, при этом, вообще говоря, по *любым* переменным (при соответствующей невырожденности), лишь бы только их полное число равнялось количеству нулей $\#(\alpha)$ дифференциала рационального конформного отображения. К сожалению, единственным явным примером такой функции является тау-функция эллипса (см. [20]), для которой нельзя написать нетривиальных уравнений ВДВВ (1), поскольку соответствующая алгебра (199) двумерна, а мы знаем с самого начала, что в этом случае уравнения (1) тривиальны. Однако если бы удалось найти явные или хотя бы замкнутые формулы для тау-функций других рациональных отображений, то их логарифмы являлись бы примерами функций, удовлетворяющих уравнениям (1) как функции *части* своих аргументов.

7. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА

7.1. Формула для препотенциала и топологические потомки. Обратимся теперь к свойствам “плоских сечений” связности (36) или, другими словами, рассмотрим вспомогательную линейную задачу, записанную в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} - \zeta \sum_k C_{ij}^k \frac{\partial}{\partial t_k} \right) \Psi(\mathbf{t}; \zeta) = 0. \quad (201)$$

При помощи разложения

$$\Psi(\mathbf{t}; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \Psi_n(\mathbf{t}) \quad (202)$$

уравнения (201) превращаются в систему рекуррентных соотношений

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \Psi_n(\mathbf{t}) = \sum_k C_{ij}^k \frac{\partial}{\partial t_k} \Psi_{n-1}(\mathbf{t}). \quad (203)$$

Обратимся теперь к очень простому наблюдению, впервые сделанному в работе [23]. Выберем в качестве функции $\Psi(\mathbf{t}; \zeta)$ некоторую вектор-функцию

$$\Psi^m(\mathbf{t}; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \Psi_n^m(\mathbf{t}) \quad (204)$$

и зафиксируем коэффициент при первом члене ($n = 0$) в виде

$$\Psi_0^m(\mathbf{t}) = r^m = \delta_{m1}, \quad (205)$$

а также коэффициент с $n = 1$

$$\Psi_1^m(\mathbf{t}) = \sum_l \eta_{ml} t_l, \quad (206)$$

где $\eta_{ml} = (\mathbf{F}_1)_{ml}$ – “топологическая метрика”, которая предполагается постоянной, скажем, в случае теории Гинзбурга–Ландау из п. 3.2 (в принципе соотношения (203) и (205) утверждают лишь, что Ψ_1^m линейны по временам (с произвольными коэффициентами)). Оказывается, существует простое соотношение между препотенциалом $\mathcal{F}$ и первыми коэффициентами Ψ_0^m , Ψ_1^m , Ψ_2^m , Ψ_3^m этого конкретного решения.

Действительно, соотношения для $n = 2$ после подстановки (206) приводят к уравнению

$$\partial_i \partial_j \Psi_2^m = \sum_k C_{ij}^k \eta_{km}, \quad (207)$$

у которого имеется решение

$$\Psi_2^m = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_m}, \quad (208)$$

где $\mathcal{F}$ – препотенциал. Далее имеем

$$\partial_i \partial_j \Psi_3^m = \sum_k C_{ij}^k \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_m \partial t_k}, \quad (209)$$

что представляет собой не что иное, как так называемое *топологическое рекуррентное соотношение*

$$\langle \sigma_1(\phi_m) \phi_i \phi_j \rangle = \sum_k C_{ij}^k \langle \phi_m \phi_k \rangle \quad (210)$$

для “первых потомков”, а поэтому можно положить

$$\Psi_3^m \equiv \langle \sigma_1(\phi_m) \rangle = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T_{1,m}}. \quad (211)$$

Теперь уже легко заметить, что препотенциал $\mathcal{F}$ может быть представлен в виде

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \eta_{ij} (\Psi_1^i \Psi_2^j - \Psi_0^i \Psi_3^j). \quad (212)$$

Используя (205), (206) и (208), преобразуем эту формулу в уравнение типа уравнения ренормгруппы

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \left(\sum_k t_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} - \Psi_3^1 \right), \quad (213)$$

или

$$2\mathcal{F} - \sum_k t_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = -\Psi_3^1 = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T_{1,1}} \quad (214)$$

(последнее равенство имеет чисто символический смысл). Из формулы (214) следует, что

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_i} = \sum_k t_k \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_k} - \frac{\partial \Psi_3^1}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial^2 \Psi_3^1}{\partial t_i \partial t_j} = \sum_k t_k \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}. \quad (215)$$

Последнее уравнение может быть переписано с использованием (208) и (207) в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi_3^1}{\partial t_i \partial t_j} = \sum_{k,n} C_{ij}^k \eta_{kn} t_n = \sum_k C_{ij}^k \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_k \partial t_1}, \quad (216)$$

что представляет собой просто частный случай топологического рекуррентного соотношения (209). Таким образом, доказательство формулы (212) достаточно тривиально и требует только подстановку разложений (202) и (204) в уравнение (201).

7.2. Линейная задача и связь между случаями Гинзбурга–Ландау и Виттена–Зайберга. Формула (201) эквивалентна специальной зависимости плоского сечения от первого времени $\Psi(t_1, t_2, \dots) \sim e^{\zeta t_1} \Psi(\zeta; t_2, \dots)$, которая мотивируется, например, моделью Концевича. В общем случае такую зависимость требовать совершенно не обязательно, поэтому вспомогательную линейную задачу можно рассматривать в более общем виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} - \sum_k C_{ij}^k \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_1} \right) \Psi = 0. \quad (217)$$

Обратимся к случаю Гинзбурга–Ландау, для которого коэффициенты C_{ij}^k определены формулой (46). Легко проверить, что решением уравнения (217) является функция

$$\Psi(\mathbf{t}; \Gamma) = \oint_{\Gamma} f(W(\lambda; \mathbf{t})) d\lambda, \quad (218)$$

где $f(W)$ — произвольная функция, Γ — любой нестягиваемый контур. Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} - \sum_k C_{ij}^k \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_1} \right) f(W) &= f'(W) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t_i \partial t_j} - \sum_k C_{ij}^k \frac{\partial^2 W}{\partial t_k \partial t_1} \right) + \\ &+ f''(W) \left(\frac{\partial W}{\partial t_i} \frac{\partial W}{\partial t_j} - \sum_k C_{ij}^k \frac{\partial W}{\partial t_k} \frac{\partial W}{\partial t_1} \right). \end{aligned} \quad (219)$$

С помощью формул (43) и (46) второе слагаемое в правой части формулы (219) приводится к виду $f''(W) R_{ij} W'$, в то время как первое слагаемое представляет собой просто $f'(W) \partial^2 W / \partial t_i \partial t_j$ согласно (43). Тогда, используя (55), окончательно получаем

$$f'(W) \frac{\partial^2 W}{\partial t_i \partial t_j} + f''(W) R_{ij} W' = f'(W) \partial_\lambda R_{ij} + R_{ij} \partial_\lambda f'(W) = \frac{d}{d\lambda} (R_{ij} f'(W)). \quad (220)$$

Это доказывает, что интеграл (218) является решением уравнения (217). Очень важно, что это рассуждение справедливо для *произвольной* функции $f(W)$.

Существуют ли какие-нибудь другие ограничения на функцию $f(W)$? Можно добавить лишь, что для связи с уравнениями ВДВВ должно быть в точности $2(N-1)$ независимых интегралов (218) и что производные

$$\frac{\partial f(W)}{\partial t_i} = f'(W) \frac{\partial W}{\partial t_i} = f'(W) \partial_\lambda W_+^{i/N} \quad (221)$$

должны быть голоморфны, так как только в этом случае возможно перейти к новым независимым переменным $a_i = \Psi(\mathbf{t}, \Gamma_i)$, $i = 1, \dots, N-1$, и доказать, что существует функция $\mathcal{F}(\mathbf{a})$ такая, что

$$a_i^D = \Psi(\mathbf{t}, \Gamma_{2N-1-i}) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i}. \quad (222)$$

Но это почти в точности переформулировка случая Виттена–Зайберга (ср., например, с формулой (65)). Эквивалентно можно сказать, что если существуют $2(N-1)$ независимых решений (218), то формулы (217) могут быть переписаны в виде

$$\sum_{n,m} \frac{\partial^2 a^D}{\partial a_n \partial a_m} \frac{\partial a_n}{\partial t_i} \frac{\partial a_m}{\partial t_j} = \sum_{k,l,s} C_{ij}^k \frac{\partial^2 a^D}{\partial a_l \partial a_s} \frac{\partial a_l}{\partial t_k} \frac{\partial a_s}{\partial t_1}, \quad (223)$$

где величины $a^D = \Psi(\mathbf{t}, \Gamma)$ отвечают оставшимся контурам Γ_s при $s = N, \dots, 2(N-1)$, если $a_n = \Psi(\mathbf{t}, \Gamma_n)$ с $n = 1, \dots, N-1$. Другими словами,

$$\frac{\partial^2 a^D}{\partial a_n \partial a_m} = \sum_l C_{nm}^l(\mathbf{a}) \eta(a^D, l), \quad (224)$$

где

$$C_{nm}^l(\mathbf{a}) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial t_i}{\partial a_n} \frac{\partial t_j}{\partial a_m} C_{ij}^k(\mathbf{t}) \frac{\partial a_l}{\partial t_k}, \quad \eta(a^D, l) = \sum_s \frac{\partial a_s}{\partial t_1} \frac{\partial^2 a^D}{\partial a_l \partial a_s}. \quad (225)$$

Приведенные формулы для преобразования вторых производных совершенно очевидны, следует только еще раз отметить, что в качестве новых независимых координат следует взять *в точности* $N-1$ решений (218). Для конкретного выбора функций $f(W)$ из этих формул легко извлечь связь между соотношениями (6) для решений Гинзбурга–Ландау и Виттена–Зайберга (см., например, [9], [24]).

Что касается собственно решений условий голоморфности (221), то, скажем, любой гиперэллиптический интеграл

$$f(W) = \int^W \frac{dX}{\sqrt{\text{Pol}(X)}} \quad (226)$$

является примером такого решения. Безусловно, должны существовать аналогичные решения такого типа, связанные с негиперэллиптическими кривыми, и они могут привести к построению новых решений уравнений ВДВВ (1). Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в отдельной публикации [25].

7.3. Вспомогательная линейная задача и уравнения Хироты. Чтобы лучше понять связь между вспомогательной линейной задачей и формулами вида (6), заметим, что в случае бесконечного числа переменных вспомогательная линейная задача (217) может быть переписана с помощью производящих операторов (138)–(140) в виде

$$\left(D_1 D_2 - \sum_k C^k(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial t_k} \frac{\partial}{\partial t_1} \right) \Psi = 0 \quad (227)$$

со структурными константами $C^k(z_1, z_2)$, определенными в (157). Цель данного раздела – сравнить уравнение (227) с уравнениями Хироты (142).

Предположим, что тау-функция $\mathcal{F}$ зависит также от некоторых дополнительных параметров T , т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{t}; T)$, значение которых в данном контексте не имеет значения, хотя достаточно естественно предположить, что эти параметры могут отвечать “потомкам”, которые мы уже обсуждали в п. 7.1. Будем также считать, что тау-функция, или препотенциал $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{t}; T_0)$, рассматривается при некотором фиксированном значении этих дополнительных параметров $T = T_0$, и, следовательно, можно ввести возмущение:

$$\mathcal{F}(\mathbf{t}; T) = \mathcal{F}(\mathbf{t}, T_0 + \epsilon) = \mathcal{F}(\mathbf{t}; T_0) + \epsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} + \dots \equiv \mathcal{F}(\mathbf{t}; T_0) + \epsilon \Psi(\mathbf{t}; T_0) + \dots \quad (228)$$

Легко показать, что возмущение Ψ является решением вспомогательной линейной задачи (227). Действительно, рассмотрим бездисперсионные уравнения Хироты в форме (142) и подставим в них разложение (228):

$$(z_1 - z_2)(1 - e^{D_1 D_2 \mathcal{F}} e^{\epsilon D_1 D_2 \Psi + \dots}) = (D_1 - D_2) \partial_{t_1} \mathcal{F} + \epsilon (D_1 - D_2) \partial_{t_1} \Psi + \dots \quad (229)$$

Члены нулевого порядка по ϵ в уравнении (229) собираются в уравнения Хироты (142) на невозмущенную функцию $\mathcal{F}(\mathbf{t}; T_0)$, линейные же по ϵ члены можно переписать в виде

$$D_1 D_2 \Psi = e^{-D_1 D_2 \mathcal{F}} \frac{D_1 - D_2}{z_1 - z_2} \partial_{t_1} \Psi, \quad (230)$$

что в точности совпадает с (227) с учетом (157).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе обсуждались некоторые интересные общие свойства решений уравнений ассоциативности (1), часто возникающие в контексте эффективных действий для различных физических теорий. Мы попытались продемонстрировать, что эти свойства совершенно универсальны, что отражает универсальность самих уравнений (1).

Уравнения (1) являются следствием некоторой ассоциативной алгебры, которая, как мы попытались показать, существует очень часто, и связи между ее структурными константами и третьими производными некоторой функции $\mathcal{F}$ (6). Условие существования такой связи гораздо менее тривиально, и его выполнимость сильно зависит (в отличие от самой ассоциативной алгебры) от выбора базиса; в большинстве интересных физических примеров это соотношение следует из “локализации” в форме формулы вычетов (19). Мы попытались сконцентрироваться на этом важном классе решений, универсальность которого близка (если не совпадает) с универсальностью самих уравнений ВДВВ.

Перечислим, наконец, основные утверждения данной работы:

1. При наличии формулы вычетов доказательство выполнимости уравнений ВДВВ является чрезвычайно простым и заключается лишь в проверке условий согласованности и невырожденности. Два новых (по отношению к топологическим теориям) семейства решений уравнений ВДВВ отвечают в точности двум различным способам наивного нарушения условия согласованности.

2. Доказательство не требует *никаких* дополнительных условий или структур. С этой точки зрения все дополнительные требования на решения уравнений ВДВВ, следующие из топологических теорий, совершенно несущественны. Ничто не зависит, в частности, от постоянства или непостоянства топологической “метрики”, а роль самого понятия топологической “метрики” совершенно неясна в более общей картине уравнений ассоциативности.

3. Более того, если известно, что геометрия уравнений ВДВВ совпадает со специальной кэлеровой геометрией, то ковариантность уравнений (1) требует, чтобы настоящая метрика не использовалась в уравнениях ассоциативности. Уравнения ВДВВ ковариантны, но это неверно для подкласса их топологических решений.

4. Можно надеяться, что геометрический смысл уравнений ассоциативности связан с тем, что они являются следствием некоторых алгебраических соотношений между вторыми производными функции $\mathcal{F}$. Частный пример этого можно найти в теории бездисперсионных интегрируемых иерархий: если функция $\mathcal{F}$ является решением алгебраических соотношений Хироты, она является также и решением уравнений ВДВВ (1).

Благодарности. Автор благодарен А. Боярскому, Г. Брадену, П. Вигману, Б. де Виту, А. Забродину, И. Кричеверу, А. Лосеву, А. Миронову, А. Морозову, С. Натанзону, В. Рубцову, О. Ручайскому и Л. Хоевенарсу за сотрудничество и множество интересных обсуждений. Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 01-01-00539, грантом INTAS № 99-01782, грантом CRDF № RP1-2102 и грантом поддержки научных школ № 00-15-96566.

Список литературы

- [1] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 281; *R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59.
- [2] *A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1996. V. 389. P. 43; hep-th/9607109.
- [3] *B. Dubrovin.* Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups (Montecatini Terme, 1993). Lect. Notes in Math. V. 1620. Eds. M. Francaviglia, S. Greco. Berlin: Springer, 1996. P. 120; hep-th/9407018.
- [4] *I. Krichever.* Commun. Pure Appl. Math. 1992. V. 47. P. 437; hep-th/9205110.
- [5] *A. Marshakov.* Associativity equations in effective SUSY quantum field theory. hep-th/0108023.
- [6] *A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 1157; hep-th/9701123.
- [7] *A. Boyarsky, A. Marshakov, O. Ruchayskiy, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Phys. Lett. B. 2001. V. 515. P. 483; hep-th/0105260.
- [8] *S. Cecotti, C. Vafa.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 903; hep-th/9111016; Commun. Math. Phys. 1993. V. 157. P. 139; hep-th/9209085; V. 158. P. 569; hep-th/9211097.
- [9] *K. Ito, S.-K. Yang.* Phys. Lett. B. 1998. V. 433. P. 56; hep-th/9803126.
- [10] *N. Seiberg, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19; hep-th/9407087.
- [11] *A. Klemm, W. Lerche, S. Theisen, S. Yankielowicz.* Phys. Lett. B. 1995. V. 344. P. 169; hep-th/9411048; On the monodromies of $N = 2$ supersymmetric Yang–Mills theory. hep-th/9412158; *P. Argyres, A. Faraggi.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 3931; hep-th/9411057.
- [12] *Б. де Бур, А. В. Маршаков.* ТМФ. 2001. Т. 129. № 2. С. 230; hep-th/0105289.
- [13] *J. Fay.* Theta-functions on Riemann Surfaces. Lect. Notes in Math. V. 352. Berlin: Springer, 1973.
- [14] *A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 773; hep-th/9701014.
- [15] *L. Hoveenaars, P. Kersten, R. Martini.* Phys. Lett. B. 2001. V. 503. P. 189; hep-th/0012133.
- [16] *И. Кривевер.* Функци. анал. и его прилож. 1980. Т. 14. № 3. С. 45.
- [17] *A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1995. V. 355. P. 466; hep-th/9505035.
- [18] *A. Marshakov.* Seiberg-Witten Theory and Integrable Systems. Singapore: World Scientific, 1999.
- [19] *А. В. Маршаков.* ТМФ. 1997. Т. 112. С. 3; hep-th/9702083; 1999. Т. 121. С. 179.
- [20] *P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 213. P. 523; hep-th/9909147; *I. Kostov, I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* τ -function for analytic curves. hep-th/0005259; *A. Marshakov, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Commun. Math. Phys. 2002. V. 227. P. 131; hep-th/0109048.
- [21] *K. Takasaki, T. Takebe.* Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 743.
- [22] *J. Gibbons, Y. Kodama.* Solving dispersionless Lax equations. In: Singular Limits of Dispersive Waves. Proc. of NATO Advanced Research Workshop (Lyons, France, July 8–12, 1991). NATO ASI Ser., Ser. B, Phys. V. 320. Ed. N. M. Ercolani. New York: Plenum, 1994. P. 61; *R. Carroll, Y. Kodama.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 6373; hep-th/9506007.
- [23] *А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кривевер.* УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 167; hep-th/9904028.
- [24] *L. Hoveenaars, R. Martini.* Lett. Math. Phys. 2001. V. 57. P. 175; hep-th/0102190.
- [25] *L. Hoveenaars, A. Marshakov, R. Martini.* New solution to generalized WDVV equations. (to appear).

Поступила в редакцию 9.I.2002 г.