Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Монтерде, Х. Вальехо, Модулярный класс четных симплектических многообразий, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 1, 50–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:12:02

МОДУЛЯРНЫЙ КЛАСС ЧЕТНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

В рамках бескоординатного формализма описано понятие и рассмотрены свойства модулярного класса для четного симплектического многообразия.

Ключевые слова: симплектические многообразия, элемент объема березиниана, модулярный класс, операторы дивергенции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модулярное векторное поле на пуассоновом многообразии $(M; \{ \cdot, \cdot \})$ определяется следующим образом. Для заданного элемента объема η на M модулярное векторное поле Z^M отображает всякую функцию $f \in C^\infty(M)$ в дивергенцию относительно η гамильтонова векторного поля, построенного по f , т.е.

$$Z^M(f) := \operatorname{div}^\eta(X_f) = \operatorname{div}^\eta(\{df, \cdot\}). \quad (1)$$

Модулярным классом многообразия $(M; \{ \cdot, \cdot \})$ называется его класс в когомологиях Пуассона–Лихнеровича [1]. Понятие модулярного векторного поля было введено в работе [2] при рассмотрении когомологий пуассонова многообразия. В работе [3] это понятие использовалось для изучения модулярных автоморфизмов алгебр фон Неймана, относительно которых было замечено, что, как и их квазиклассические пределы (пуассоновы алгебры), они обладают свойством допускать группы модулярных автоморфизмов. Понятие модулярного векторного поля появлялось также в геометрии при классификации квадратичных пуассоновых структур [4]. Модулярное векторное поле и связанное с ним понятие элемента объема интенсивно использовались также при изучении градуированных инвариантов Пуанкаре–Картана, геометрии формализма Баталина–Вилковыского и т.д. [5]–[7]. Поэтому нам представляется заслуживающим внимания геометрическое изучение этих структур.

Для определения модулярного класса достаточно задания только пуассоновой структуры. Мы будем рассматривать невырожденный случай.

*Departament de Geometria i Topologia, Universitat de València, Spain.
E-mail: juan.l.monterde@uv.es, jose.a.vallejo@uv.es

В рамках градуированного формализма, когда задано градуированное многообразие Пуассона $((M, \wedge\mathcal{E}), [_, _])$ (см. определения в разделах 2 и 3), проявляется следующее фундаментальное свойство. Если скобка Пуассона нечетна относительно $\mathbb{Z}$ -градуировки, то хотя и можно ввести соответствующее определение дивергенции, но аналог отображения (1) дает не дифференцирование на $\wedge\mathcal{E}$, а генератор скобки Пуассона в смысле алгебр Герстенхабера (см. [6], [8] или [9]). Когда же скобка Пуассона четна относительно $\mathbb{Z}$ -градуировки, то то же отображение приводит к дифференцированию на $\wedge\mathcal{E}$. Поэтому именно в последнем случае и имеет смысл развитие понятий градуированного модулярного векторного поля и модулярного класса.

Известно, что в неградуированном случае всякое симплектическое многообразие (M, ω) является унимодулярным, т.е. имеет нулевой класс. Предположим теперь, что M является базовым многообразием заданного градуированного пуассонова многообразия $(M, \wedge\mathcal{E})$, чья градуированная скобка Пуассона $[_, _]$ невырождена и расширяет скобку Пуассона на M , определенную по ω . Известно также и то, что с этой скобкой связана форма объема, которая в локальных координатах выражается березинианом матрицы скобки [10]. Используя эту форму объема, можно убедиться, что модулярное векторное поле равно нулю, так что многообразие $(M, \wedge\mathcal{E})$ унимодулярно.

Цель данной работы состоит в том, чтобы указать геометрический, бескоординатный формализм описанных выше результатов. В рамках этого формализма вводится понятие элемента объема симплектического березиниана и изучается его изменение в зависимости от выбранного сечения пучка березиниана, а также его соответствие каноническому березиниану. В качестве приложения дана градуированная формулировка уравнений непрерывности в механике жидкости.

2. ГРАДУИРОВАННЫЕ ФОРМЫ НА МНОГООБРАЗИИ $(M, \Gamma(\wedge E))$

Прежде всего отметим, что общие сведения о градуированных многообразиях можно получить в работах [10]–[12]; принятый нами подход следует развитому в работе [13]. Пусть M – t -мерное гладкое многообразие и пусть C_M^∞ – пучок гладких функций на M . Пусть $E \rightarrow M$ – векторное расслоение ранга n и пусть $\mathcal{E} = \Gamma(E)$ – его пучок гладких сечений. Пусть $\wedge\mathcal{E} = \Gamma(\wedge E)$ – пучок гладких сечений внешней алгебры расслоения $\wedge E \rightarrow M$. Мы отсылаем читателя к работам [11] или [13] по поводу определений градуированного векторного поля, градуированной дифференциальной формы, оператора внутреннего умножения $\iota(D)$ (где D – градуированное векторное поле), внешнего дифференциала d^G и оператора Ли $\mathcal{L}_D^G$.

Являясь градуированным гомоморфизмом градуированных модулей, градуированная дифференциальная форма обладает степенью. Таким образом, можно определить $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -биградуировку на модуле градуированных дифференциальных форм. Будем говорить, что градуированная дифференциальная форма λ имеет бистепень $(p, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, если

$$\lambda: \underbrace{\text{Der } \wedge\mathcal{E} \times \cdots \times \text{Der } \wedge\mathcal{E}}_{p \text{ сомножителей}} \longrightarrow \wedge\mathcal{E}$$

и если для всех $D_1, \dots, D_p \in \text{Der } \wedge \mathcal{E}$

$$|\langle D_1, \dots, D_p; \lambda \rangle| = \sum_{i=1}^p |D_i| + k.$$

Используя эту биградуировку, любую градуированную p -дифференциальную форму λ можно разложить в сумму $\lambda = \lambda_{(0)} + \dots + \lambda_{(n)}$, где $\lambda_{(i)}$ — однородная градуированная форма бистепени (p, i) .

Из теоремы Костанта [11] следует фундаментальный результат:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Всякая d^G -замкнутая градуированная форма бистепени (p, k) при $k > 0$ точна.*

Мы используем тот факт, что пространство градуированных векторных полей $\text{Der } \wedge \mathcal{E}$ является локально-свободным пучком $\wedge \mathcal{E}$ -модулей [11] (по поводу структуры этого пространства см. [14], [15]). Пусть $\mathcal{E}^*$ — пучок сечений двойственного расслоения $E^* \rightarrow M$. Имеется мономорфизм

$$i: \Gamma(\wedge \mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^* \hookrightarrow \text{Der } \wedge \mathcal{E}.$$

С другой стороны, пусть $\mathcal{X}(M) = \text{Der } C_M^\infty$ — пучок гладких векторных полей на M . Связность ∇ на $\wedge \mathcal{E}$ дает по определению морфизм

$$\Gamma(\wedge \mathcal{E}) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \text{Der } \wedge \mathcal{E}, \quad \alpha \otimes X \mapsto \alpha \nabla_X.$$

3. ОПЕРАТОРЫ ДИВЕРГЕНЦИИ И МОДУЛЯРНЫЕ ГРАДУИРОВАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

По определению оператор дивергенции на $\wedge \mathcal{E}$ — это четное линейное отображение $\text{div}: \text{Der } \wedge \mathcal{E} \rightarrow \wedge \mathcal{E}$ такое, что

$$\text{div}(sD) = s \text{div}(D) + (-1)^{|s|} |D| D(s) \quad (2)$$

для всех $D \in \text{Der } \wedge \mathcal{E}$ и всех $s \in \wedge \mathcal{E}$.

Модулярное векторное поле Z^M , ассоциированное с оператором дивергенции div и с градуированной скобкой Пуассона $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ на $\wedge \mathcal{E}$ — это четное градуированное векторное поле, определяемое как

$$s \in \wedge \mathcal{E} \mapsto D_s = \llbracket s, \cdot \rrbracket \in \text{Der } \wedge \mathcal{E} \mapsto \text{div}(D_s) \in \wedge \mathcal{E}. \quad (3)$$

Легко проверить, что если четная скобка Пуассона порождена четной симплектической формой Θ , то Z^M — локально гамильтоново градуированное векторное поле. Далее мы и будем предполагать именно такую ситуацию, т.е. наличие четной симплектической формы на $(M, \wedge \mathcal{E})$ и порождаемой ею четной скобки Пуассона $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_\Theta$.

ЛЕММА 1. Пусть $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} D_{2i} \in \text{Der } \wedge \mathcal{E}$ – локально гамильтоново четное дифференцирование. Рассмотрим разложение (согласно $\mathbb{Z}$ -степеням) $\Theta = \Theta_{(0)} + \Theta_{(\geq 2)}$. D является градуированным гамильтоновым векторным полем, соответствующим форме Θ , тогда и только тогда, когда $\iota_{D_0} \Theta_{(0)}$ – точная градуированная форма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ служит непосредственное вычисление с использованием предложения 1.

Из леммы 1 следует, что модулярный класс зависит только от члена нулевой степени в модулярном векторном поле.

4. ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО БЕРЕЗИНИАНА И МОДУЛЯРНЫЙ КЛАСС

Пусть Θ – четная симплектическая форма на градуированном многообразии $(M, \wedge \mathcal{E})$ размерности $(2n, m)$. Известно, что имеется три объекта, связанных с четной симплектической формой [15]: обычная симплектическая форма ω на базе многообразия M , невырожденная симметричная билинейная форма g на E^* и связность ∇ на E , согласованная с g (т.е. $\nabla g = 0$).

Пусть ω^n – симплектический элемент объема на M и пусть μ_g – метрический элемент объема на E . Для данного $s \in \wedge \mathcal{E}$ с компактным носителем можно определить интеграл

$$\int_{\xi} s := \int_M (i_{\mu_g} s) \omega^n,$$

где $i_{\mu_g} s$ обозначает полную свертку $\mu_g \in \Gamma(\Lambda^m E^*)$ с s . Такое определение неявным образом включает определение элемента объема березиниана ξ [9], [12], [16].

Мы собираемся определить оператор дивергенции, связанный с четной симплектической формой, через элемент объема березиниана ξ . Для заданного дифференцирования $D \in \text{Der } \wedge \mathcal{E}$ имеется единственное сечение, обозначаемое как $\text{div}^{\xi}(D) \in \wedge \mathcal{E}$, такое, что

$$-\int_{\xi} D(s) = \int_{\xi} \text{div}^{\xi}(D) \wedge s$$

для всех $s \in \wedge \mathcal{E}$ с компактным носителем. Оно и в самом деле является оператором дивергенции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеет место формула

$$\text{div}^{\xi}(s \wedge D) = s \wedge \text{div}^{\xi}(D) + (-1)^{|D||s|} D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя интеграл, имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\xi} \operatorname{div}^{\xi}(s \wedge D) \wedge \bar{s} &= - \int_{\xi} s \wedge D(\bar{s}) = - \int_M i_{\mu_g}(s \wedge D(\bar{s})) \omega^n = \\
&= -(-1)^{|D||s|} \int_M i_{\mu_g}(D(s \wedge \bar{s})) \omega^n + \\
&\quad + (-1)^{|D||s|} \int_M i_{\mu_g}(D(s) \wedge \bar{s}) \omega^n = \\
&= -(-1)^{|D||s|} \int_{\xi} D(s \wedge \bar{s}) + (-1)^{|D||s|} \int_{\xi} D(s) \wedge \bar{s} = \\
&= (-1)^{|D||s|} \int_{\xi} \operatorname{div}^{\xi}(D) \wedge s \wedge \bar{s} + (-1)^{|D||s|} \int_{\xi} D(s) \wedge \bar{s} = \\
&= \int_{\xi} (s \wedge \operatorname{div}^{\xi}(D) + (-1)^{|D||s|} D(s)) \wedge \bar{s},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы хотим узнать, что происходит при замене сечения пучка березиниана. Вспомним, что березиниан является правым $\wedge \mathcal{E}$ -модулем ранга 1 [16]. Таким образом, для заданного элемента объема березиниана ξ любой другой элемент объема березиниана имеет вид $\xi \bar{s}$ для некоторого обратимого четного элемента $\bar{s} \in \wedge \mathcal{E}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если элемент $\bar{s}$ имеет компактный носитель, то $\operatorname{div}^{\xi \bar{s}} = \operatorname{div}^{\xi} + d^G \log \bar{s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения березиниана имеем

$$\int_{\xi \bar{s}} \cdot = \int_{\xi} \bar{s} \wedge \cdot.$$

Далее, для любого $s \in \wedge \mathcal{E}$

$$\int_{\xi \bar{s}} D(s) = - \int_{\xi \bar{s}} \operatorname{div}^{\xi \bar{s}}(D) \wedge s = - \int_{\xi} \bar{s} \wedge \operatorname{div}^{\xi \bar{s}}(D) \wedge s. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\int_{\xi \bar{s}} D(s) &= \int_{\xi} \bar{s} \wedge D(s) = \int_M i_{\mu_g}(\bar{s} \wedge D(s)) \omega^n = \\
&= \int_M i_{\mu_g}(D(\bar{s} \wedge s)) \omega^n - \int_M i_{\mu_g}(D(\bar{s}) \wedge s) \omega^n = \\
&= \int_{\xi} D(\bar{s} \wedge s) - \int_{\xi} D(\bar{s}) \wedge s = \\
&= - \int_{\xi} \operatorname{div}^{\xi}(D) \wedge \bar{s} \wedge s - \int_{\xi} \bar{s} \wedge \bar{s}^{-1} \wedge D(\bar{s}) \wedge s = \\
&= - \int_{\xi} \bar{s} \wedge \operatorname{div}^{\xi}(D) \wedge s - \int_{\xi} \bar{s} \wedge \bar{s}^{-1} \wedge D(\bar{s}) \wedge s.
\end{aligned} \quad (5)$$

Приравнивая (4) и (5), получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^{\xi \bar{s}}(D) &= \operatorname{div}^{\xi}(D) + \bar{s}^{-1} \wedge D(\bar{s}) = \\ &= \operatorname{div}^{\xi}(D) + D(\log \bar{s}) = \\ &= \operatorname{div}^{\xi}(D) + \langle D; d^G \log \bar{s} \rangle,\end{aligned}$$

откуда и следует утверждение.

Доказанное предложение 3 позволяет дать следующее определение модулярного класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Модулярный класс четной скобки Пуассона есть класс любого модулярного векторного поля в факторе $\operatorname{Der} \wedge \mathcal{E} / \operatorname{Nam}(\pi)$.

Укажем на связь понятия симплектического березиниана с каноническим березинианом. Для заданной формы объема ω^n на M и метрического объема μ_g , коль скоро они являются формами максимальной степени на M , должна существовать функция f такая, что $\omega^n = e^f \mu_g$. Если $s_{(\max)}$ обозначает часть сечения s , лежащую в максимальной степени, должно также существовать такое h , что $s_{(\max)} = h \mu_g$. Мы получаем, что для канонического березиниана имеет место формула

$$\int_{\operatorname{can}} s = \int_M s_{(\max)}.$$

С другой стороны, симплектический березиниан имеет вид

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{symp}} s &= \int_M (i_{\mu_g} s)_{(\max)} \omega^n = \int_M i_{\mu_g} (h \mu_g) e^f \mu_g = \\ &= \int_M h e^f \mu_g = \int_M e^f s_{(\max)},\end{aligned}$$

так что e^f является сечением, которое переходит из $\int_{\operatorname{symp}}$ в $\int_{\operatorname{can}}$. Из предложения 3 тогда следует, что соответствующие дивергенции связаны друг с другом соотношением

$$\operatorname{div}^{\operatorname{symp}} = \operatorname{div}^{\operatorname{can}} + d^G f.$$

В том случае, когда (M, ω, g) — кэлериово многообразие, на котором f является постоянной функцией, $\operatorname{div}^{\operatorname{symp}} = \operatorname{div}^{\operatorname{can}}$.

Базисные дифференцирования имеют в этой схеме вид i_{χ} для $\chi \in \Gamma(E^*)$ и ∇_X для векторного поля X , когда можно использовать линейную связность ∇ , индуцированную четной симплектической формой. Вычислим дивергенции базисных дифференцирований.

ЛЕММА 2. Пусть ∇ — связность, согласованная с g . Тогда

$$\operatorname{div}^{\xi}(i_{\chi}) = 0, \quad \operatorname{div}^{\xi}(\nabla_X) = \operatorname{div}^{\omega^n}(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $i_\chi s$ является сечением степени меньше $m = \text{rk}(E)$, тогда $i_{\mu_g} i_\chi s = 0$ для любого s . Для других базисных дифференцирований имеем

$$\begin{aligned} i_{\mu_g} (\nabla_X s) \omega^n &= X(i_{\mu_g} s) \omega^n - (i_{\nabla_X \mu_g} s) \omega^n = \\ &= \mathcal{L}_X((i_{\mu_g} s) \omega^n) - (i_{\mu_g} s) \mathcal{L}_X \omega^n = \\ &= \text{di}_X((i_{\mu_g} s) \omega^n) + i_X d((i_{\mu_g} s) \omega^n) - (i_{\mu_g} s) \mathcal{L}_X \omega^n. \end{aligned}$$

Член $\text{di}_X((i_{\mu_g} s) \omega^n)$ в последнем выражении не дает вклада в интеграл, потому что он является точным. Второй член $i_X d((i_{\mu_g} s) \omega^n)$ равен нулю, поскольку $(i_{\mu_g} s) \omega^n$ — дифференциальная форма максимальной степени на M . Третий член дает $(i_{\mu_g} s) \text{div}^{\omega^n}(X) \omega^n$, потому что $\mathcal{L}_X \omega^n = \text{div}^{\omega^n}(X) \omega^n$. Наконец, заметим, что $\nabla_X \mu_g$ обращается в нуль согласно предположению. Поэтому

$$- \int_\xi \nabla_X s = \int_\xi \text{div}^{\omega^n}(X) s.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Всякая четная симплектическая форма на градуированном многообразии $(M, \wedge \mathcal{E})$ является унимодулярной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что в силу теоремы Ротстайна $\Theta = \varphi^*(\Theta_{\omega, g, \nabla})$ для некоторого автоморфизма φ расслоения $\wedge \mathcal{E}$, где связность ∇ согласована с g . Таким образом, если доказать, что форма $\Theta_{\omega, g, \nabla}$ унимодулярна, то такой же будет и Θ . Форма $\Theta_{\omega, g, \nabla}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X, \nabla_Y; \Theta_{\omega, g, \nabla} \rangle &= \omega(X, Y) + \frac{1}{2} R(X, Y, -, -), \\ \langle \nabla_X, i_\chi; \Theta_{\omega, g, \nabla} \rangle &= 0, \\ \langle i_\chi, i_\psi; \Theta_{\omega, g, \nabla} \rangle &= g(\chi, \psi), \end{aligned}$$

так что $(\Theta_{\omega, g, \nabla})_{(0)}$, обозначаемая как $\Theta_{(0)}^{\omega, g, \nabla}$, есть

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X, \nabla_Y; \Theta_{(0)}^{\omega, g, \nabla} \rangle &= \omega(X, Y), \\ \langle \nabla_X, i_\chi; \Theta_{(0)}^{\omega, g, \nabla} \rangle &= 0 = \langle i_\chi, i_\psi; \Theta_{(0)}^{\omega, g, \nabla} \rangle. \end{aligned}$$

Градуированное гамильтоново векторное поле, связанное с функцией $f \in C^\infty(M)$ посредством симплектической формы $\Theta_{\omega, g, \nabla}$, имеет вид

$$D_f = \nabla_{X_f} + \text{члены более высоких степеней}.$$

Из леммы 1 следует, что D является градуированным гамильтоновым векторным полем тогда и только тогда, когда $\iota_{D_0} \Theta_{(0)}$ — точная градуированная форма. Но мы знаем, что

$$\pi_{(0)}(Z^M(f)) = \pi_{(0)}(\text{div}(D_f)) = \text{div}(\nabla_{X_f}) = 0. \quad (6)$$

Поэтому $Z^M = i_N + \text{члены более высоких степеней}$, где $N \in \text{End } \mathcal{E}$. Отсюда следует, что

$$\iota_{Z_0^M} \Theta_{(0)}^{\omega, g, \nabla} = \iota_{i_N} \Theta_{(0)}^{\omega, g, \nabla} = 0.$$

Теорема доказана.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ

В классическом случае понятия дивергенции и обращающегося в нуль модулярного класса тесно связаны с законами сохранения в потоке жидкости, а именно с одним из основных уравнений динамики жидкости – уравнением непрерывности. Мы не будем приводить здесь полное описание уравнений градуированных жидкостей, а ограничимся исследованием градуированного уравнения непрерывности (единственного из основных уравнений динамики жидкости, которое непосредственно связано с сохранением объема гамильтоновым потоком).

Рассмотрим более детально классическую картину, которую мы хотим обобщить на градуированный случай.

Пусть $V \in \mathcal{X}(M)$ – векторное поле, описывающее классическую динамическую систему (например, можно иметь в виду поле скоростей в жидкости) и пусть $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ – его поток. Со всякой функцией $f \in C^\infty(M)$ (описывающей плотность некоторой наблюдаемой в системе) связано уравнение непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fV) = 0, \quad (7)$$

где мы учли возможную зависимость f от времени. Уравнение (7) выражает сохранение полной величины, связанной с f ,

$$\frac{d}{dt} \int_M f \mu = 0, \quad (8)$$

где μ – форма объема на M , как правило, симплектическая форма объема, индуцируемая гамильтоновой структурой динамической системы.

Что является градуированным аналогом формулы (7)? Мы не имеем возможности повторять физическую аргументацию классического случая, поскольку в градуированном случае нет понятия формы объема (понимаемой как градуированная форма максимальной степени), но можно обобщить геометрическую интерпретацию. Заметим для этого, что уравнение (7) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) (f\mu) = 0. \quad (9)$$

Уравнение непрерывности в виде (9) позволяет интерпретировать $f\mu$ как форму плотности жидкости, которая динамически сохраняется вдоль потоков $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Здесь f может являться объемной плотностью, зарядовой плотностью и т.д. Более того, уравнение (9) и его геометрическая интерпретация переносятся на градуированные многообразия. Там “наблюдаемая плотность” является суперфункцией $\rho \in \wedge \mathcal{E}$. Градуированное векторное поле есть $D \in \operatorname{Der} \wedge \mathcal{E}$, и его поток зависит, вообще говоря, от двух параметров (о суперпотоках см. [17]), $\{\Phi_{(t,s)}^*\}_{(t,s) \in \mathbb{R}^{1|1}}$, где $\Phi: \mathbb{R}^{1|1} \times (M, \wedge \mathcal{E}) \rightarrow (M, \wedge \mathcal{E})$. Таким образом, если (t, s) – (глобальные) суперкоординаты на $\mathbb{R}^{1|1}$, градуированный аналог формулы (9) будет выражать сохранение ρ вдоль потока D , т.е.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} + \mathcal{L}_D^G \right) (\rho) = 0, \quad (10)$$

где мы считаем $\partial/\partial t + \partial/\partial s$ “интегрирующей моделью” потоков супервекторных полей [17]. Кроме того, ρ может зависеть еще от s и t .

Используя доказанные выше предложение 2 и теорему, можно переписать уравнение (10) в виде, похожем на классическое уравнение (7),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} + \mathcal{L}_D^G \right) (\rho) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) (\rho) + D(\rho) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) (\rho) + (-1)^{|D|} |\rho| (\operatorname{div}^\xi(\rho D) - \rho \wedge \operatorname{div}^\xi(D)) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) (\rho) + (-1)^{|D|} |\rho| (\operatorname{div}^\xi(\rho D)). \end{aligned}$$

Теперь уравнение непрерывности принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) (\rho) + (-1)^{|D|} |\rho| (\operatorname{div}^\xi(\rho D)) = 0.$$

Данное уравнение, хотя это и не столь очевидно, имеет тип уравнения “сохранения массы”. Для доказательства следует только учесть свойства суперпотоков, аналогичные свойствам классического потока векторного поля. Пусть $(U, \wedge \mathcal{E}|_U)$ обозначает открытую суперобласть и $\Phi_{(t,s)}^*(U, \wedge \mathcal{E}|_U)$ – суперобласть, получаемую действием суперпотока D . Тогда если $\int$ обозначает интеграл Березина, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \int_{\Phi_{(t,s)}^*(U, \wedge \mathcal{E}|_U)} \rho &= \int_{(U, \wedge \mathcal{E}|_U)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \Phi_{(t,s)}^* \rho = \\ &= \int_{(U, \wedge \mathcal{E}|_U)} \Phi_{(t,s)}^* \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \rho + \mathcal{L}_D^G \rho \right] = \\ &= \int_{\Phi_{(t,s)}^*(U, \wedge \mathcal{E}|_U)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \rho + \mathcal{L}_D^G \rho \right] \end{aligned}$$

и уравнение непрерывности эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \int \rho = 0, \quad (11)$$

которое, очевидно, является законом сохранения.

Укажем теперь, как из этого результата следует классическое уравнение непрерывности для жидкости (движущейся, например, в пространстве $\mathbb{R}^2$, наделенном обычными симплектической и метрической структурами). Достаточно в формуле (11) взять $\rho(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t)\mu$ (f – плотность жидкости, μ – симплектическая форма объема на $\mathbb{R}^2$) и $D = \mathcal{L}_X$ (X – поле скоростей) в качестве дифференцирования на $(\mathbb{R}^2, \Gamma(\Lambda T^*\mathbb{R}^2))$. Тогда по определению интеграла Березина из (11) следует, что

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \rho + \mathcal{L}_D^G \rho = \frac{\partial}{\partial t} (f\mu) + \mathcal{L}_X (f\mu) = \frac{\partial f}{\partial t} \mu + \operatorname{div}(fX)\mu$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fX) = 0,$$

т.е. получаем классическое уравнение непрерывности.

Преимуществом уравнения (11) является то, что оно позволяет рассматривать все виды величин, выражаемых в виде дифференциальных форм, в духе обобщения классической механики, предложенной в работе [18].

Благодарности. Предыдущий вариант этих результатов был представлен на Colloque IHP, “Géometrie différentielle et physique mathématique”, Paris, June 2001. Мы благодарим И. Козманн–Шварцбах, А. Вайнштейна и Г. Тюинмана за указание на возможность более простого доказательства.

Данная работа частично поддержана Spanish Ministerio de Educación y Cultura, Grant PB-97-1386.

Список литературы

- [1] *A. Lichnerowicz.* J. Diff. Geom. 1977. V. 12. № 2. P. 253–300.
- [2] *J. L. Koszul.* Crochet de Schouten–Nijenhuis et Cohomologie. Astérisque, Hors série. 1985. P. 257–271.
- [3] *A. Weinstein.* J. Geom. Phys. 1997. V. 23. № 3–4. P. 379–394.
- [4] *J. P. Dufour, A. Haraki.* Compt. Rend. Acad. Sci. 1991. V. 312. P. 137–140.
- [5] *O. M. Khudaverdian, A. S. Schwarz, Yu. S. Tyupkin.* Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 517–522.
- [6] *O. M. Khudaverdian.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 7. P. 1934–1937.
- [7] *O. M. Khudaverdian.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 198. P. 591–606.
- [8] *Y. Kosmann-Schwarzbach.* Modular Vector Fields and Batalin–Vilkovisky Algebras. Warszawa: Banach Center Publications, Institute of Mathematics, Polish Acad. of Sciences, 1999.
- [9] *Y. Kosmann-Schwarzbach, J. Monterde.* Divergence operators and odd Poisson brackets. arXiv: math.QA/0002209 v3.
- [10] *F. A. Berezin.* Introduction to Superanalysis. Dordrecht: Reidel Publ., 1987.
- [11] *B. Kostant.* Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization. In: Differential geometrical methods in math. phys. (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975). Lecture Notes in Math. V. 570. Eds. K. Bleuter, A. Reetz. Berlin: Springer, 1977. P. 177–306.
- [12] *Д. А. Леўмек.* УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 3–57.
- [13] *J. Monterde, O. A. Sánchez-Valenzuela.* Israel J. Math. 1997. V. 85. P. 231–270.
- [14] *J. Monterde.* Diff. Geometry Appl. 1992. V. 2. P. 81–97.
- [15] *M. Rothstein.* The structure of supersymplectic supermanifolds. In: Differential geometrical methods in theoretical physics. Lecture Notes in Phys. V. 375. Eds. C. Bartocci, U. Bruzzo, R. Cianci. Berlin: Springer, 1991. P. 331–343.
- [16] *D. Hernández Ruipérez, J. Muñoz Masqué.* Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 1985. V. 301. P. 915–918.
- [17] *J. Monterde, O. A. Sánchez-Valenzuela.* J. Geom. Phys. 1993. V. 10. № 4. P. 315–343.
- [18] *P. W. Michor.* J. Geom. Phys. 1985. V. 2. № 2. P. 67–82.

Поступила в редакцию 8.XI.2001 г.