Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа и связанные с ними интегрируемые иерархии, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 1, 60–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 10:22:26

© 2002 г.

О. И. Мохов*

СОГЛАСОВАННЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ИЕРАРХИИ

Построены интегрируемые бигамильтоновы иерархии, связанные с согласованными нелокальными скобками Пуассона гидродинамического типа. Решена задача о канонической форме для пары согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа. Получена система уравнений, описывающая согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа и интегрируемая методом обратной задачи рассеяния. Любое решение этой интегрируемой системы порождает по явным формулам интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа. Построена теория скобок Пуассона специального лиувиллева вида, играющая важную роль в построении интегрируемых иерархий.

Ключевые слова: согласованные скобки Пуассона, системы гидродинамического типа, согласованные метрики, интегрируемые иерархии, бигамильтоновы структуры, нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа.

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей работе эффективно построены интегрируемые бигамильтоновы иерархии, связанные с согласованными нелокальными скобками Пуассона гидродинамического типа. Для этого решается задача о канонической форме специального вида для согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа. Согласованные пары скобок Пуассона гидродинамического типа проще описываются в специальных координатах, в которых соответствующие этим скобкам метрики диагональны (см. [1], [2]), но для эффективного построения иерархий необходим другой подход, развиваемый в данной работе. Для согласованных локальных скобок Пуассона гидродинамического типа (скобок Дубровина–Новикова [3]) соответствующие интегрируемые бигамильтоновы иерархии построены автором в работах [4], [5], а для согласованных нелокальных скобок Мохова–Ферапонтова [6], порождаемых метриками постоянной римановой кривизны, бигамильтоновы иерархии построены в работе [7].

---

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

1.1. Локальные скобки Пуассона гидродинамического типа. *Локальной скобкой Пуассона гидродинамического типа* или *скобкой Дубровина–Новикова* [3] называется произвольная локальная однородная скобка Пуассона первого порядка, т.е. скобка Пуассона вида

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta_x(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta(x-y), \quad (1.1)$$

где $u^1, \dots, u^N$ – локальные координаты на некотором заданном гладком N -мерном многообразии M ; $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, – функции (поля) одной независимой переменной x ; коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b_k^{ij}(u)$ – гладкие функции локальных координат.

Другими словами, для произвольных функционалов $I[u]$ и $J[u]$ на пространстве полей $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, определяется скобка вида

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx \quad (1.2)$$

и требуется, чтобы она являлась скобкой Пуассона, т.е. была кососимметричной:

$$\{I, J\} = -\{J, I\}, \quad (1.3)$$

и удовлетворяла тождеству Якоби

$$\{\{I, J\}, K\} + \{\{J, K\}, I\} + \{\{K, I\}, J\} = 0 \quad (1.4)$$

для произвольных функционалов $I[u]$, $J[u]$ и $K[u]$.

Локальная скобка (1.2) называется *невырожденной*, если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$. Для общих невырожденных скобок (1.2) Дубровин и Новиков доказали следующую важную теорему.

ТЕОРЕМА 1.1 [3]. *Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то скобка (1.2) является скобкой Пуассона, т.е. она кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, тогда и только тогда, когда*

1) $g^{ij}(u)$ – произвольная плоская псевдориманова контравариантная метрика (метрика нулевой римановой кривизны);

2) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита).

Следовательно, для любой невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа всегда существуют локальные координаты $v^1, \dots, v^N$ (плоские координаты метрики $g^{ij}(u)$), в которых коэффициенты скобки постоянны:

$$\tilde{g}^{ij}(v) = \eta^{ij} = \text{const}, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i(v) = 0, \quad \tilde{b}_k^{ij}(v) = 0,$$

т.е. скобка имеет вид

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta v^i(x)} \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta J}{\delta v^j(x)} dx, \quad (1.5)$$

где η^{ij} – невырожденная симметричная постоянная матрица:

$$\eta^{ij} = \eta^{ji}, \quad \eta^{ij} = \text{const}, \quad \det(\eta^{ij}) \neq 0. \quad (1.6)$$

Локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (1.1) введены и изучены Дубровиным и Новиковым в работе [3], где предложен соответствующий структурам (1.1) общий локальный гамильтонов подход к так называемым *однородным системам гидродинамического типа*, т.е. эволюционным квазилинейным системам уравнений в частных производных первого порядка

$$u_t^i = V_j^i(u) u_x^j.$$

Этот гамильтонов подход был мотивирован изучением уравнений эйлеровой гидродинамики и уравнений усреднения Уизема, описывающих эволюцию медленно промодулированных многофазных решений уравнений в частных производных (см. [8]). В работах [9], [10] построена теория интегрирования диагонализующих гамильтоновых (а также полугамильтоновых) однородных систем гидродинамического типа.

1.2. Нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа. Нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа (скобки Мохова–Ферапонтова) были введены и изучены в работе [6] (см. также [11]–[13]). Они имеют следующий вид:

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + K u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (1.7)$$

где K – произвольная константа.

Скобка вида (1.7) называется *невырожденной*, если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 1.2 [6]. *Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то скобка (1.7) является скобкой Пуассона, т.е. она кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, тогда и только тогда, когда*

1) $g^{ij}(u)$ – произвольная псевдориманова контравариантная метрика постоянной римановой кривизны K ;

2) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита).

Ферапонтов [11] ввел и изучил более общие нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа (скобки Ферапонтова), а именно скобки Пуассона вида

$$\begin{aligned} \{I, J\} = & \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha (w^\alpha)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} (w^\alpha)_s^j(u(x)) u_x^s \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (1.8) \\ & \det(g^{ij}(u)) \neq 0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_\alpha = \pm 1$, $1 \leq \alpha \leq L$.

ТЕОРЕМА 1.3 [11]. Скобка (1.8) является скобкой Пуассона, т.е. она кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, тогда и только тогда, когда

1) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита);

2) метрика $g^{ij}(u)$ и набор аффиноров $(w^\alpha)_j^i(u)$ удовлетворяют соотношениям

$$g_{ik}(u)(w^\alpha)_j^k(u) = g_{jk}(u)(w^\alpha)_i^k(u), \quad \alpha = 1, \dots, L, \quad (1.9)$$

$$\nabla_k(w^\alpha)_j^i(u) = \nabla_j(w^\alpha)_k^i(u), \quad \alpha = 1, \dots, L, \quad (1.10)$$

$$R_{kl}^{ij}(u) = \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha ((w^\alpha)_l^i(u)(w^\alpha)_k^j(u) - (w^\alpha)_l^j(u)(w^\alpha)_k^i(u)). \quad (1.11)$$

Кроме того, семейство аффиноров $w^\alpha(u)$ коммутативное: $[w^\alpha, w^\beta] = 0$.

Выпишем все соотношения на коэффициенты нелокальной скобки Пуассона (1.8) в удобном для дальнейшего использования виде.

ЛЕММА 1.1. Скобка вида (1.8) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$g^{ij} = g^{ji}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b_k^{ij} + b_k^{ji}, \quad (1.13)$$

$$g^{is}b_s^{jk} = g^{js}b_s^{ik}, \quad (1.14)$$

$$g^{is}(w^\alpha)_s^j = g^{js}(w^\alpha)_s^i, \quad (1.15)$$

$$(w^\alpha)_s^i(w^\beta)_j^s = (w^\beta)_s^i(w^\alpha)_j^s, \quad (1.16)$$

$$g^{is}g^{jr}\frac{\partial (w^\alpha)_r^k}{\partial u^s} - g^{jr}b_s^{ik}(w^\alpha)_r^s = g^{js}g^{ir}\frac{\partial (w^\alpha)_r^k}{\partial u^s} - g^{ir}b_s^{jk}(w^\alpha)_r^s, \quad (1.17)$$

$$g^{is}\left(\frac{\partial b_r^{jk}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jk}}{\partial u^r}\right) + b_s^{ik}b_r^{sj} - b_s^{ij}b_r^{sk} = \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha g^{is}((w^\alpha)_s^j(w^\alpha)_r^k - (w^\alpha)_r^j(w^\alpha)_s^k). \quad (1.18)$$

1.3. Согласованные скобки Пуассона. Магри предложил [14] бигамильтонов подход к интегрированию нелинейных систем, показав, что интегрируемость тесно связана с бигамильтоновостью, т.е. наличием у системы двух согласованных гамильтоновых представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [14]. Две скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ называются *согласованными*, если произвольная линейная комбинация этих скобок Пуассона

$$\{\cdot, \cdot\} = \lambda_1\{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda_2\{\cdot, \cdot\}_2, \quad (1.19)$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, также всегда является скобкой Пуассона. В этом случае говорят также, что скобки $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ образуют *пучок скобок Пуассона*.

Как показал Магри, согласованные скобки Пуассона порождают интегрируемые иерархии систем дифференциальных уравнений. В частности, бигамильтоновость системы порождает рекуррентные соотношения для законов сохранения этой системы. В данной работе построены интегрируемые иерархии, отвечающие согласованным нелокальным скобкам Пуассона гидродинамического типа.

2. ПУЧОК НЕЛОКАЛЬНЫХ СКОБОК ПУАССОНА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Опишем все нелокальные скобки Пуассона (1.8), согласованные с постоянной невырожденной скобкой Пуассона гидродинамического типа

$$\{I, J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (2.1)$$

где η^{ij} – произвольная невырожденная симметричная постоянная матрица (1.6), т.е. классифицируем все пучки нелокальных скобок Пуассона

$$\{I, J\}_\lambda = \{I, J\}_1 + \lambda \{I, J\}_2, \quad (2.2)$$

где $\{I, J\}_1$ – скобка Пуассона вида (1.8).

ЛЕММА 2.1. *Скобки Пуассона (2.1) и (1.8) согласованы тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$\eta^{is} b_s^{jk} = \eta^{js} b_s^{ik}, \quad (2.3)$$

$$\eta^{is} (w^\alpha)_s^j = \eta^{js} (w^\alpha)_s^i, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial (w^\alpha)_j^i}{\partial u^k} = \frac{\partial (w^\alpha)_k^i}{\partial u^j}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial b_r^{jk}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jk}}{\partial u^r} = \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha ((w^\alpha)_s^j (w^\alpha)_r^k - (w^\alpha)_r^j (w^\alpha)_s^k). \quad (2.6)$$

Важно отметить, что соотношение

$$\eta^{jr} b_s^{ik} (w^\alpha)_r^s = \eta^{ir} b_s^{jk} (w^\alpha)_r^s, \quad (2.7)$$

получаемое из (1.17) как одно из условий согласованности скобок Пуассона (2.1) и (1.8), следует из формул (2.3)–(2.5) для любых скобок Пуассона (1.8). Действительно, из (2.4) получаем

$$\eta^{jr} b_s^{ik} (w^\alpha)_r^s = \eta^{sr} b_s^{ik} (w^\alpha)_r^j, \quad (2.8)$$

а из (2.3) имеем

$$\eta^{sr} b_s^{ik} (w^\alpha)_r^j = \eta^{si} b_s^{rk} (w^\alpha)_r^j. \quad (2.9)$$

Следовательно, соотношение (2.7) сводится к равенству

$$\eta^{si} b_s^{rk} (w^\alpha)_r^j = \eta^{ir} b_s^{jk} (w^\alpha)_r^s, \quad (2.10)$$

т.е.

$$b_s^{rk}(w^\alpha)_r^j = b_r^{jk}(w^\alpha)_s^r. \quad (2.11)$$

Докажем, что соотношение (2.11) выполняется для любой скобки Пуассона (1.8), для которой имеет место равенство (2.5). Действительно, в этом случае соотношение (1.17) для скобки Пуассона (1.8) принимает вид

$$g^{jr}b_s^{ik}(w^\alpha)_r^s = g^{ir}b_s^{jk}(w^\alpha)_r^s. \quad (2.12)$$

Из (1.15) получаем

$$g^{jr}b_s^{ik}(w^\alpha)_r^s = g^{sr}b_s^{ik}(w^\alpha)_r^j, \quad (2.13)$$

а из (1.14) имеем

$$g^{sr}b_s^{ik}(w^\alpha)_r^j = g^{si}b_s^{rk}(w^\alpha)_r^j, \quad (2.14)$$

т.е. соотношение (2.12) сведено к выражению

$$g^{si}b_s^{rk}(w^\alpha)_r^j = g^{ir}b_s^{jk}(w^\alpha)_r^s, \quad (2.15)$$

которое эквивалентно формуле (2.11).

3. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА СОГЛАСОВАННЫХ ПАР СКОБОК

ТЕОРЕМА 3.1. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона $\{I, J\}_1$ вида (1.8) согласована с постоянной скобкой Пуассона (2.1) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\begin{aligned} \{I, J\}_1 = & \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(\left[\eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial F^i}{\partial u^s} - \eta^{is} \eta^{jk} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^k} \right] \frac{d}{dx} + \right. \\ & + \left[\eta^{is} \frac{\partial^2 F^j}{\partial u^s \partial u^k} - \eta^{is} \eta^{jp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^s \partial u^k} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^p} \right] u_x^k + \\ & \left. + \eta^{ip} \eta^{jr} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^r \partial u^s} u_x^s \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $F^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, и $\psi^\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, — гладкие функции, определенные в некоторой области локальных координат.

Из соотношения (2.5) немедленно следует, что локально существуют функции $(\varphi^\alpha)^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq \alpha \leq L$, такие, что

$$(w^\alpha)_j^i = \frac{\partial(\varphi^\alpha)^i}{\partial u^j}. \quad (3.2)$$

Тогда соотношение (2.6) принимает вид

$$\frac{\partial b_r^{jk}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jk}}{\partial u^r} = \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \left(\frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^s} \frac{\partial(\varphi^\alpha)^k}{\partial u^r} - \frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^r} \frac{\partial(\varphi^\alpha)^k}{\partial u^s} \right). \quad (3.3)$$

Введем функцию

$$A_k^{ij}(u) = b_k^{ij}(u) - \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^i \frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^k}. \quad (3.4)$$

Тогда, используя (3.3), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k^{ij}}{\partial u^l} &= \frac{\partial b_k^{ij}}{\partial u^l} - \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial(\varphi^\alpha)^i}{\partial u^l} \frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^k} - \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^i \frac{\partial^2(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^k \partial u^l} = \\ &= \frac{\partial b_l^{ij}}{\partial u^k} - \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial(\varphi^\alpha)^i}{\partial u^k} \frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^l} - \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^i \frac{\partial^2(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial A_l^{ij}}{\partial u^k}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следовательно, существуют функции $P^{ij}(u)$, $1 \leq i, j \leq N$, такие, что

$$A_k^{ij}(u) = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k}. \quad (3.6)$$

Таким образом,

$$b_k^{ij}(u) = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k} + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^i \frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^k}. \quad (3.7)$$

Из соотношения (1.13) для скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ получаем

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b_k^{ij} + b_k^{ji} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial P^{ji}}{\partial u^k} + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^i \frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^k} + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^j \frac{\partial(\varphi^\alpha)^i}{\partial u^k}, \quad (3.8)$$

т.е., используя (1.12), имеем

$$g^{ij} = P^{ij} + P^{ji} + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^i(\varphi^\alpha)^j + c^{ij} + c^{ji}, \quad (3.9)$$

где c^{ij} — произвольная постоянная матрица, $c^{ij} = \text{const}$. Определим функцию $R^{ij}(u)$:

$$R^{ij} = P^{ij} + c^{ij}, \quad (3.10)$$

и получим доказательство лиувиллевости скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ в рассматриваемых локальных координатах:

$$g^{ij} = R^{ij} + R^{ji} + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^i(\varphi^\alpha)^j, \quad (3.11)$$

$$b_k^{ij} = \frac{\partial R^{ij}}{\partial u^k} + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha(\varphi^\alpha)^i \frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^k} \quad (3.12)$$

(подробнее о лиувиллевости см. раздел 5).

Из соотношения (2.4) следует

$$\eta^{is} \frac{\partial(\varphi^\alpha)^j}{\partial u^s} = \eta^{js} \frac{\partial(\varphi^\alpha)^i}{\partial u^s}, \quad (3.13)$$

т. е.

$$\frac{\partial(\eta_{rj}(\varphi^\alpha)^j)}{\partial u^p} = \frac{\partial(\eta_{pj}(\varphi^\alpha)^j)}{\partial u^r}. \quad (3.14)$$

Таким образом, существуют функции $\psi^\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, такие, что

$$\eta_{rs}(\varphi^\alpha)^s = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^r}, \quad (3.15)$$

или

$$(\varphi^\alpha)^s = \eta^{sr} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^r}. \quad (3.16)$$

Из соотношения (2.3) следует

$$\begin{aligned} \eta^{is} \left(\frac{\partial R^{jk}}{\partial u^s} + \eta^{jr} \eta^{kp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^r} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^s} \right) = \\ = \eta^{js} \left(\frac{\partial R^{ik}}{\partial u^s} + \eta^{ir} \eta^{kp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^r} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^s} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

или

$$\frac{\partial(\eta_{ij} R^{jk})}{\partial u^s} + \eta^{kp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^s} = \frac{\partial(\eta_{sj} R^{jk})}{\partial u^l} + \eta^{kp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^l}. \quad (3.18)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial(\eta_{ij} R^{jk} + \eta^{kp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^s})}{\partial u^s} = \frac{\partial(\eta_{sj} R^{jk} + \eta^{kp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^l})}{\partial u^l}. \quad (3.19)$$

Следовательно, существуют функции $F^j(u)$ такие, что

$$\eta_{ij} R^{jk} + \eta^{kp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^s} = \frac{\partial F^k}{\partial u^l}, \quad (3.20)$$

т. е. мы получаем

$$R^{ij} = \eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} - \eta^{is} \eta^{jk} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^k}, \quad (3.21)$$

$$g^{ij} = \eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial F^i}{\partial u^s} - \eta^{is} \eta^{jk} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^k}, \quad (3.22)$$

$$b_k^{ij} = \eta^{is} \frac{\partial^2 F^j}{\partial u^s \partial u^k} - \eta^{is} \eta^{jp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^s \partial u^k} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^p}. \quad (3.23)$$

При этом легко проверить, что для скобки Пуассона (3.1) выполнены все соотношения согласованности (2.3)–(2.6).

4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СОГЛАСОВАННОЙ ПАРЫ СКОБОК

ТЕОРЕМА 4.1. *Нелокальная скобка (3.1) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial u^i \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial u^p \partial u^j} &= \frac{\partial^2 Q_2}{\partial u^i \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial u^p \partial u^j}, \\ g_{\text{can}}^{is} \eta^{jr} \frac{\partial^2 Q}{\partial u^r \partial u^s} &= g_{\text{can}}^{js} \eta^{ir} \frac{\partial^2 Q}{\partial u^r \partial u^s}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$g_{\text{can}}^{ij}(u) = \eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial F^i}{\partial u^s} - \eta^{is} \eta^{jk} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial u^k} \quad (4.2)$$

– метрика скобки (3.1), функции $Q(u)$, $Q_1(u)$ и $Q_2(u)$ – любые из функций $F^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, и $\psi^{\alpha}(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$.

Система (4.1) интегрируема методом обратной задачи рассеяния. Процедура интегрирования и пара Лакса со спектральным параметром для этой системы будут опубликованы в нашей последующей работе.

5. ЛИУВИЛЛЕВЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЛИУВИЛЛЕВЫ КООРДИНАТЫ

Локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ называются *лиувиллевыми* для произвольной скобки Пуассона $\{I, J\}$, если функции (поля) $u^i(x)$ являются плотностями интегралов в инволюции относительно этой скобки, т. е.

$$\{U^i, U^j\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (5.1)$$

где

$$U^i = \int u^i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N.$$

В этом случае скобка Пуассона также называется *лиувиллевой* в этих координатах. Лиувиллевы координаты естественно возникают и играют существенную роль в процедуре Дубровина–Новикова усреднения гамильтоновых уравнений [3]. Физические координаты, получаемые усреднением плотностей участвующих в процедуре Дубровина–Новикова N инволютивных локальных интегралов изначальной гамильтоновой системы, всегда являются лиувиллевыми для соответствующей усредненной скобки. Это свойство и явилось мотивировкой определения лиувиллевых координат для локальных скобок Пуассона гидродинамического типа в работе [3]. Для общих нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (1.8) лиувиллевы координаты введены в работе [15].

Нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа (1.8) является лиувиллевой в локальных координатах $u = (u^1, \dots, u^N)$ тогда и только тогда, когда существуют матричная функция $\Phi^{ij}(u)$ и функции $(\varphi^\alpha)^i(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, такие, что скобка имеет следующий вид (см. [15], где именно это свойство взято за определение лиувиллевости скобки (1.8)):

$$\begin{aligned} \{I, J\}_1 = & \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(\left[\Phi^{ij}(u) + \Phi^{ji}(u) - \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha (\varphi^\alpha)^i (\varphi^\alpha)^j \right] \frac{d}{dx} + \right. \\ & + \left[\frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial u^k} - \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial (\varphi^\alpha)^i}{\partial u^k} (\varphi^\alpha)^j \right] u_x^k + \\ & \left. + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial (\varphi^\alpha)^i}{\partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \frac{\partial (\varphi^\alpha)^j}{\partial u^s} u_x^s \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Из теоремы 3.1 следует

ТЕОРЕМА 5.1. *Плоские координаты произвольной невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ всегда являются лиувиллевыми для любой нелокальной скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ (1.8), согласованной с $\{I, J\}_2$. Более того, при этом соответствующая лиувиллева функция $\Phi^{ij}(u)$ и функции $(\varphi^\alpha)^i(u)$ всегда имеют специальный вид:*

$$\Phi^{ij}(u) = \eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s}, \quad (\varphi^\alpha)^i(u) = \eta^{is} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s}. \quad (5.3)$$

Локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ называются *специальными лиувиллевыми координатами* для произвольной скобки Пуассона $\{I, J\}$, если существует ненулевая постоянная симметричная матрица η_{ij} такая, что функции (поля) $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, и $\eta_{ij} u^i(x) u^j(x)$ являются плотностями интегралов в инволюции относительно этой скобки, т.е.

$$\{U^i, U^j\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N+1, \quad (5.4)$$

где

$$U^i = \int u^i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N; \quad U^{N+1} = \int \eta_{ij} u^i(x) u^j(x) dx.$$

В этом случае скобка Пуассона также называется *специальной лиувиллевой* в этих координатах. Специальные лиувиллевы координаты были введены в работах [16]. Наиболее важным является случай невырожденной матрицы η_{ij} , и именно этот случай мы и будем всегда иметь в виду.

ТЕОРЕМА 5.2. *Нелокальная скобка Пуассона вида (1.8) является специальной лиувиллевой в локальных координатах $u = (u^1, \dots, u^N)$ тогда и только тогда, когда она лиувиллева с лиувиллевой функцией $\Phi^{ij}(u)$ и функциями $(\varphi^\alpha)^i(u)$ специального вида такими, что*

$$\eta_{ks} \Phi^{sj}(u) = \frac{\partial F^j}{\partial u^k}, \quad \eta_{ks} (\varphi^\alpha)^s(u) = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^k}. \quad (5.5)$$

Для невырожденной матрицы η_{ij} получаем в этом случае в точности скобку (3.1) из канонической согласованной пары.

Таким образом, задача о согласованных нелокальных скобках Пуассона гидродинамического типа эквивалентна задаче классификации специальных лиувилевых координат для нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа.

ТЕОРЕМА 5.3. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа (1.8) согласована с постоянной скобкой Пуассона (2.1) тогда и только тогда, когда функции $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, и $\eta_{ij} u^i(x) u^j(x)$, $\eta^{is} \eta_{sj} = \delta_j^i$, являются плотностями интегралов в инволюции относительно скобки Пуассона (1.8).*

Отметим, что функции $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, представляют собой плотности аннуляторов скобки (2.1), а $\eta_{ij} u^i(x) u^j(x)/2$ – плотность импульса скобки (2.1).

ТЕОРЕМА 5.4. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа (1.8) согласована с произвольной невырожденной локальной скобкой Пуассона (1.2) тогда и только тогда, когда N аннуляторов и импульс скобки (1.2) являются интегралами в инволюции относительно скобки Пуассона (1.8).*

6. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ БИГАМИЛЬТОНОВЫ ИЕРАРХИИ

Рассмотрим пару согласованных гамильтоновых операторов гидродинамического типа P_1^{ij} и P_2^{ij} , один из которых, скажем P_2^{ij} , локальный, а другой – произвольный нелокальный оператор вида оператора скобки (1.8). По-видимому, один из гамильтоновых операторов всегда можно привести к каноническому постоянному виду серий преобразований по решению, если он невырожден (аналог классической теоремы Дарбу в симплектической геометрии), так что рассматриваемый случай является по сути общим. Если локальный гамильтонов оператор P_2^{ij} невырожденный, то из теоремы 3.1 следует, что локальной заменой координат пара согласованных гамильтоновых операторов P_1^{ij} и P_2^{ij} приводится к следующему каноническому виду:

$$P_2^{ij}[u(x)] = \eta^{ij} \frac{d}{dx}, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} P_1^{ij}[u(x)] = & \left(\eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial F^i}{\partial u^s} - \eta^{is} \eta^{jk} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^k} \right) \frac{d}{dx} + \\ & + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 F^j}{\partial u^s \partial u^k} - \eta^{is} \eta^{jp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^s \partial u^k} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^p} \right) u_x^k + \\ & + \eta^{ip} \eta^{jr} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^r \partial u^s} u_x^s, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где η^{ij} – произвольная невырожденная постоянная симметричная матрица (1.6); $F^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, и $\psi^\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, – гладкие функции, заданные в некоторой области локальных координат, такие, что оператор (6.2) является гамильтоновым, т.е. функции $F^i(u)$ и $\psi^\alpha(u)$ удовлетворяют интегрируемым уравнениям (4.1) (см. теорему 4.1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что всегда можно считать, что $\eta^{ij} = \varepsilon^i \delta^{ij}$, $\varepsilon^i = 1$ при $i \leq p$, $\varepsilon^i = -1$ при $i > p$, где p – положительный индекс инерции метрики, $0 \leq p \leq N$, и, кроме того, необходимо классифицировать гамильтоновы операторы (6.2) относительно действия группы движений соответствующего N -мерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_p^N$, но для наших целей достаточно (и удобнее) пользоваться указанным выше представлением канонической согласованной пары (“условно каноническим” представлением).

Рассмотрим оператор рекурсии, задаваемый каноническими согласованными гамильтоновыми операторами (6.1), (6.2),

$$\begin{aligned} R_l^i[u(x)] &= [P_1[u(x)](P_2[u(x)])^{-1}]_l^i = \\ &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial F^i}{\partial u^s} - \eta^{is} \eta^{jk} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^k} \right) \frac{d}{dx} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 F^j}{\partial u^s \partial u^k} - \eta^{is} \eta^{jp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^s \partial u^k} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^p} \right) u_x^k + \right. \\ &\quad \left. + \eta^{ip} \eta^{jr} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^r \partial u^s} u_x^s \right) \eta_{jl} \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (6.3)$$

(об операторах рекурсии, задаваемых парой согласованных гамильтоновых операторов, см. [17]–[22]). Применим оператор рекурсии (6.3) к системе трансляций по x , т.е. к системе гидродинамического типа

$$u_t^i = u_x^i, \quad (6.4)$$

которая, очевидно, является гамильтоновой с гамильтоновым оператором (6.1):

$$u_t^i = u_x^i \equiv P_2^{ij} \frac{\delta H}{\delta u^j(x)}, \quad H = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} u^j(x) u^l(x) dx. \quad (6.5)$$

Любая система из иерархии

$$u_{t_n}^i = (R^n)_j^i u_x^j, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.6)$$

является мультигамильтоновой интегрируемой системой. В частности, интегрируемой является любая система вида

$$u_{t_1}^i = R_j^i u_x^j, \quad (6.7)$$

т.е. система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} u_{t_1}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial F^i}{\partial u^s} - \eta^{is} \eta^{jk} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^k} \right) \frac{d}{dx} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 F^j}{\partial u^s \partial u^k} - \eta^{is} \eta^{jp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial u^s \partial u^k} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^p} \right) u_x^k + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta^{ip} \eta^{jr} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial^2 \psi^{\alpha}}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \psi^{\alpha}}{\partial u^r \partial u^s} u_x^s \Big) \eta_{jl} u^l \equiv \\
& \equiv \left(\eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} \eta_{jk} + \frac{\partial F^i}{\partial u^k} + \eta^{is} \frac{\partial^2 F^j}{\partial u^s \partial u^k} \eta_{jr} u^r - \right. \\
& \quad \left. - \eta^{is} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial u^k} - \eta^{is} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial^2 \psi^{\alpha}}{\partial u^s \partial u^k} \psi^{\alpha} \right) u_x^k \equiv \\
& \equiv \left(F^i(u) + \eta^{is} \eta_{jr} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} u^r - \eta^{is} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial u^s} \psi^{\alpha} \right)_x, \tag{6.8}
\end{aligned}$$

где $F^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, и $\psi^{\alpha}(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, — произвольное решение интегрируемой системы (4.1). Эта система гидродинамического типа бигамильтонова с парой канонических согласованных гамильтоновых операторов (6.1), (6.2):

$$\begin{aligned}
u_{t_1}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial F^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial F^i}{\partial u^s} - \eta^{is} \eta^{jk} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial u^s} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial u^k} \right) \frac{d}{dx} + \right. \\
& \quad + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 F^j}{\partial u^s \partial u^k} - \eta^{is} \eta^{jp} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial^2 \psi^{\alpha}}{\partial u^s \partial u^k} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial u^p} \right) u_x^k + \\
& \quad \left. + \eta^{ip} \eta^{jr} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial^2 \psi^{\alpha}}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \psi^{\alpha}}{\partial u^r \partial u^s} u_x^s \right) \frac{\delta H_1}{\delta u^j(x)}, \\
H_1 &= \frac{1}{2} \int \eta_{jl} u^j(x) u^l(x) dx; \\
u_{t_1}^i &= \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H_2}{\delta u^j(x)}, \quad H_2 = \int \left(\eta_{jk} F^k(u(x)) u^j(x) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} (\psi^{\alpha}(u))^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00803) и INTAS (грант № 99-1782).

Список литературы

- [1] О. И. Мохов. Функциональный анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 2. С. 24–36; math.DG/0005051.
- [2] О. И. Мохов. УМН. 2000. Т. 55. № 4. С. 217–218.
- [3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
- [4] О. И. Мохов. Compatible Dubrovin–Novikov Hamiltonian operators, Lie derivative and integrable systems of hydrodynamic type. Proc. of the International Conference “Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems” (Cambridge, July 24–30, 2001). (to appear); math.DG/0201281.
- [5] О. И. Мохов. УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 157–158.
- [6] О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов. УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 191–192.
- [7] О. И. Мохов. Liouville canonical form for the compatible nonlocal Poisson brackets of hydrodynamic type, and integrable hierarchies. math.DG/0201223.
- [8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98.

- [9] *С. П. Царёв*. ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 3. С. 534–537.
- [10] *С. П. Царёв*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 1048–1068.
- [11] *Е. В. Ферапонтов*. Функци. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49.
- [12] *О. И. Мокхов*. Phys. Lett. A. 1992. V. 166. № 3–4. P. 215–216.
- [13] *О. И. Мокхов, Е. В. Ферапонтов*. Функци. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 2. С. 60–63.
- [14] *F. Magri*. J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162.
- [15] *A. Ya. Maltsev, S. P. Novikov*. Physica D. 2001. V. 156. № 1–2. P. 53–80; nlin.SI/0006030.
- [16] *О. И. Мокхов*. Тр. МИРАН. 1999. Т. 225. С. 284–300; *О. И. Мокхов*. Rep. Math. Phys. 1999. V. 43. № 1–2. P. 247–256.
- [17] *И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман*. Функци. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 4. С. 13–30.
- [18] *B. Fuchssteiner*. Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 1979. V. 3. P. 849–862.
- [19] *A. S. Fokas, B. Fuchssteiner*. Lett. Nuovo Cimento. 1980. V. 28. № 8. P. 299–303.
- [20] *П. Олвер*. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [21] *I. Dorfman*. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. Chichester: John Wiley & Sons, 1993.
- [22] *О. И. Мокхов*. УМН. 1998. Т. 53. № 3. С. 85–192.

Поступила в редакцию 5.11.2002 г.