Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Лезнов, Дискретные симметрии задачи n -волн, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 1, 74–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 08:35:21

© 2002 г.

А. Н. Лезнов*

ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ ЗАДАЧИ n -ВОЛН

Показано, что в случае многокомпонентных интегрируемых систем дискретные симметрии T обладают тонкой структурой и могут быть представлены в виде произведения натуральных степеней взаимно коммутирующих базисных дискретных преобразований T_i . Для задачи n -волн все вычисления проделаны в полном объеме.

Ключевые слова: интегрируемые отображения и цепочки, дискретные преобразования, преобразование Дарбу, многомерные интегрируемые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучены дискретные симметрии многокомпонентных интегрируемых систем. Все вычисления в полном объеме проведены для случая n -волнового взаимодействия, наиболее простого с вычислительной точки зрения.

Уравнения, описывающие эту систему, имеют вид [1]

$$[(dh), f_t] + [(ch), f_x] = [[(dh), f], [(ch), f]], \quad (1)$$

где f — неизвестная функция, принимающая значения в некоторой алгебре, x, t — независимые аргументы, точное определение (dh) , (ch) приведено ниже. Система (1) может быть переписана в формализме L – A -пары с линейной зависимостью от спектрального параметра (подробнее см. [1]). Действительно, коммутационные соотношения

$$[\partial_x + \lambda(dh) - [(dh), f], -\partial_t + \lambda(ch) - [(ch), f]] = 0$$

эквивалентны (1). Обычно функция f рассматривается как матрица с нулевым следом (другими словами, со значениями в алгебре A_n). В нашем подходе мы не будем использовать это ограничение и будем изучать общий случай, когда f в уравнениях (1) принимает значения в произвольной полупростой алгебре и при этом $(dh) \equiv \sum_{i=1}^r d_i h_i$, $(ch) = \sum_{i=1}^r c_i h_i$, где h_i, c_i — картановские элементы алгебры, r — ее ранг.

*Universidad Autonoma del Estado de Morelos, CCICAp, Cuernavaca, Mexico; Институт физики высоких энергий, Протвино; Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

В дальнейшем мы используем тот факт, что система (1) может рассматриваться как редуцированная форма четырехмерных автодуальных уравнений [2]

$$f_{z,\bar{z}} + f_{y,\bar{y}} = [f_y, f_z] \quad (2)$$

в предположении, что

$$f \equiv e^R \bar{f}(\bar{y}, \bar{z}) e^{-R}, \quad R \equiv (dh)y + (ch)z. \quad (3)$$

Действительно, в этом случае $f_y = e^R[(dh), \bar{f}]e^{-R}$, $f_z = e^R[(ch), \bar{f}]e^{-R}$, и уравнение для $\bar{f}$ совпадает с (1) после очевидной идентификации $\bar{y} = t$, $\bar{z} = x$.

Для автодуальной системы явный вид дискретных преобразований известен (см. [3], [4]), и это обстоятельство позволяет воспроизвести дискретные преобразования для системы n -волнового взаимодействия (1). Знание явного вида дискретных преобразований позволяет, в свою очередь, построить многосолитонные решения, найти явный вид уравнений n -волновой иерархии и т.д.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что в случае многокомпонентных интегрируемых систем (в частности, в случае системы (1)) дискретные преобразования представимы в виде $T = \prod T_i^{n_i}$, где T_i — взаимно коммутирующих базисных преобразований, n_i — произвольные натуральные числа.

Насколько нам известно, вопрос о дискретных преобразованиях многокомпонентных интегрируемых систем до сих пор не был систематически исследован (в этой связи см. работу [5], где все необходимые формулы (ср. с результатами раздела 6) были получены, но понимания того, что это и есть ситуация общего случая, достигнуто не было).

2. ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ АВТОДУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА

В этом разделе приведены некоторые результаты автора [3], [4], которые потребуются нам в дальнейшем.

Тождества Маурера–Картана позволяют частично разрешить систему (2):

$$G_{\bar{y}} G^{-1} = f_z, \quad G_{\bar{z}} G^{-1} = -f_y. \quad (4)$$

После исключения из (4) функции f мы приходим к уравнениям автодуальности в предложенной Янгом форме [6], в которых неизвестной является функция G , принимающая значения в полупростой группе.

С учетом (2) нетрудно показать, что следующая система уравнений, которая определяет элемент S , принимающий значения в группе, является самосогласованной (тождества Маурера–Картана выполняются):

$$S^{-1} S_y = \frac{1}{f_-} [X_M^+, f_y] + \left(\frac{1}{f_-} \right)_{\bar{z}} X_M^+, \quad S^{-1} S_z = \frac{1}{f_-} [X_M^+, f_z] - \left(\frac{1}{f_-} \right)_{\bar{y}} X_M^+, \quad (5)$$

где X_M^+ — генератор максимального положительного корня алгебры, f_- — коэффициент при X_M^- в разложении f по генераторам корневой системы.

Функция F , принимающая значения в алгебре, удовлетворяющая самосогласованной системе уравнений (в смысле равенства смешанных вторых производных)

$$F_y = S f_y S^{-1} - S_{\bar{z}} S^{-1}, \quad F_z = S f_z S^{-1} + S_{\bar{y}} S^{-1}, \quad (6)$$

также удовлетворяет уравнениям автодуальности в форме (2), а функция $\tilde{G} = SG$, принимающая значения в группе, является решением уравнений автодуальности в форме Янга.

Генератор максимального корня может быть выбран среди генераторов полупростой алгебры N_W различными способами, где N_W – размерность группы Вейля, группы отражений корневого пространства. Таким образом, в соответствии с (5) и (6) система автодуальных уравнений инвариантна относительно N_W различных дискретных преобразований. Однако функционально независимыми являются только r взаимно коммутативных дискретных преобразований, связанных с вейлевскими отражениями простых корней алгебры. Дискретные преобразования, связанные с отражениями составных корней $\alpha = \sum_{s=1}^r n_s \alpha_s$, представимы в виде

$$T_\alpha = \prod_{s=1}^r T_{\alpha_s}^{n_s}. \quad (7)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться градуировкой, связанной с максимальным корнем алгебры. Это означает, что все генераторы алгебры могут быть распределены по подпространствам с градуировочными индексами $\pm 2, \pm 1, 0$. Таким образом, произвольный элемент алгебры представим в виде

$$f = f^{(+2)} + f^{(+1)} + f^{(0)} + f^{(-1)} + f^{(-2)}, \quad [H, f^{(m)}] = m f^{(m)}, \quad H = [X_M^+, X_M^-].$$

Подпространства $f^{(\pm 2)} \equiv f^\pm X_M^\pm$ одномерны. Подпространства с градуировочными индексами ± 1 (состоящие из делителей максимального корня) допускают дальнейшее разбиение $f^{(\pm 1)} = f_+^{(\pm)} + f_-^{(\pm)}$ таким образом, что $[f_+^{(\pm)}, f_-^{(\pm)}] = c X_M^\pm$ и все генераторы в подпространствах с одинаковыми дополнительными индексами “ $\pm$ ” взаимно коммутативны.

3. ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ n -ВОЛНОВОЙ ЗАДАЧИ

Как было упомянуто во введении, мы предполагаем форму (3) для решений уравнений автодуальности, которая приводит к следующему уравнению для функции $\bar{f}$ как функции независимых аргументов $\bar{y}, \bar{z}$:

$$[(dh), f_{\bar{y}}] + [(ch), f_{\bar{z}}] = [[(dh), f], [(ch), f]]. \quad (8)$$

Дискретное преобразование из предыдущего раздела приводит к следующей системе уравнений для элемента S , принимающего значения в группе:

$$\begin{aligned} S^{-1} S_y &= \frac{1}{\bar{f}_-} e^{R_M} [X_M^+, e^R [(dh), \bar{f}] e^{-R}] + \left(\frac{1}{\bar{f}_-} \right)_{\bar{z}} e^{R_M} X_M^+, \\ [R, X_M^+] &= R_M X_M^+, \\ S^{-1} S_z &= \frac{1}{\bar{f}_-} e^{R_M} [X_M^+, e^R [(ch), \bar{f}] e^{-R}] - \left(\frac{1}{\bar{f}_-} \right)_{\bar{y}} e^{R_M} X_M^+. \end{aligned} \quad (9)$$

После ряда преобразований (описанных ниже) и введения нового группового элемента $S \rightarrow Se^R$ последняя система переписывается в виде

$$\begin{aligned} S^{-1}S_y &= (\tilde{d}h) + \frac{1}{\tilde{f}_-}[(\tilde{d}h), [X_M^+, \tilde{f}^{(-1)}]] + \left(\frac{1}{\tilde{f}_-}\right)_{\tilde{z}} X_M^+, \\ S^{-1}S_z &= (\tilde{c}h) + \frac{1}{\tilde{f}_-}[(\tilde{c}h), [X_M^+, \tilde{f}^{(-1)}]] - \left(\frac{1}{\tilde{f}_-}\right)_{\tilde{y}} X_M^+. \end{aligned} \quad (10)$$

В процессе проведенных выше преобразований мы разложили $\tilde{f}$ по подпространствам градуировки максимального корня. Вклад подпространства с градуировочным индексом -2 привел к замене $(dh) \rightarrow (\tilde{d}h) \equiv (dh) - (dh)_M H$ в первых членах в правых частях уравнений (10). Представляя $f^{(-1)}$ в эквивалентном виде $f^{(-1)} = [X_M^-, [X_M^+, f^{(-1)}]] \equiv [X_M^-, \phi^{(+1)}]$, мы получаем

$$\begin{aligned} [(dh), f^{(-1)}] &= [(dh), [X_M^-, \phi^{(+1)}]] = -(dh)_M [X_M^-, \phi^{(+1)}] + [X_M^-, [(dh), \phi^{(+1)}]] = \\ &= [X_M^-, [(\tilde{d}h), \phi^{(+1)}]] = [X_M^-, [(\tilde{d}h), [X_M^+, f^{(-1)}]]], \end{aligned}$$

после чего преобразования, приводящие к (10), становятся совершенно понятными.

Преобразование $(dh) \rightarrow (\tilde{d}h)$ эквивалентно вейлевскому отражению максимального корня алгебры, или, другими словами, $(\tilde{d}h) = W_M(dh)W_M^{-1}$.

Теперь перейдем к решению самосогласованной системы уравнений (10) и нахождению явного вида элемента группы S . Правые части уравнений (10) принадлежат разрешимой алгебре, и, следовательно, элемент S может быть параметризован в виде

$$S = e^{\tilde{R}} e^{\alpha_+^{(+1)}} e^{\alpha_-^{(+1)}} e^{\alpha X_M^+}, \quad \tilde{R} = W_M R W_M^{-1}.$$

Мы предполагаем, что зависимость элемента S от аргументов y, z содержится только в множителе $\tilde{R}$ и что функции $\alpha_{\pm}^{(+1)}$, α , принимающие значения в алгебре, зависят только от переменных $\tilde{y}, \tilde{z}$. Такое решение не противоречит системе (10).

Результат интегрирования системы (10) при таких условиях следующий:

$$\begin{aligned} \alpha^{(+1)} &= \alpha_+^{(+1)} + \alpha_-^{(+1)} = \frac{[X_M^+, \tilde{f}^{(-1)}]}{\tilde{f}_-}, \\ -\alpha(dh)_M X_M^+ + [[(\tilde{d}h), \alpha_+^{(+1)}], \alpha_-^{(+1)}] &= \left(\frac{1}{\tilde{f}_-}\right)_{\tilde{z}} X_M^+, \\ -\alpha(ch)_M X_M^+ + [[(\tilde{c}h), \alpha_+^{(+1)}], \alpha_-^{(+1)}] &= -\left(\frac{1}{\tilde{f}_-}\right)_{\tilde{y}} X_M^+, \end{aligned} \quad (11)$$

где учтено равенство $(\tilde{d}h)_M = -(dh)_M$. Оба выражения для α равны друг другу. Этот факт является прямым следствием уравнения (8) (в чем легко убедиться, если рассмотреть уравнение для градуированной компоненты $\tilde{f}_-$).

Вычислим функцию F , возникающую в результате дискретного преобразования. Собирая все полученные выше результаты, мы приходим к следующему выражению для элемента S , определяющего функцию F :

$$S = e^{\tilde{R}} \exp \left\{ \frac{[X_M^+, \tilde{f}^{(-1)}]}{\tilde{f}_-} \right\} e^{\tilde{\alpha} X_M^+} e^{-R} \equiv e^{\tilde{R}} e^{\alpha_+^{(+1)}} e^{\alpha_-^{(+1)}} e^{\alpha X_M^+} e^{-R}. \quad (12)$$

Конечно, выражение (12) справедливо с точностью до преобразования $S \rightarrow \overline{B}S$, где $\overline{B} \equiv \overline{B}(\bar{y}, \bar{z})$ – произвольный элемент группы, зависящий от двух указанных переменных.

В общем случае дискретных преобразований нередуцированных автодуальных уравнений [3] соответствующий элемент группы S имеет вид

$$S = \exp(\ln f_- H) e^{\alpha_+^{(+1)}} e^{\alpha_-^{(+1)}} e^{\alpha X_M^+}.$$

Если в этом выражении провести редукцию к задаче n -волн

$$f_- = e^{-R_M} \bar{f}_-, \quad \alpha^{(+1)} = e^R \bar{\alpha}_\pm^{(+1)} e^{-R}, \quad \alpha = e^{R_M} \bar{\alpha},$$

то мы получим следующий результат:

$$S = e^{\tilde{R}} \exp(\ln \bar{f}_- H) e^{\alpha_+^{(+1)}} e^{\alpha_-^{(+1)}} e^{\alpha X_M^+} e^{-R}, \quad \tilde{R} = W_M R W_M^{-1}, \quad (13)$$

который с точностью до группового элемента $\overline{B} = \exp(\ln \bar{f}_- H)$ совпадает с проведенным выше прямым расчетом (12).

Теперь перейдем к уравнениям (6), определяющим решение автодуальной системы, возникающее в результате дискретного преобразования. Подставляя (13) в (6), после очевидных упрощений имеем

$$F_y = e^{-\tilde{R}} ([c, \bar{f}] - \bar{S}_z \bar{S}^{-1}) e^{\tilde{R}}, \quad F_z = e^{-\tilde{R}} ([d, \bar{f}] + \bar{S}_y \bar{S}^{-1}) e^{\tilde{R}},$$

откуда вытекает, что $F = e^{\tilde{R}} \overline{F}(\bar{y}, \bar{z}) e^{-\tilde{R}}$ и, более того, $F_y = e^{\tilde{R}} [(\tilde{c}h), \overline{F}(\bar{y}, \bar{z})] e^{-\tilde{R}} F_z = e^{\tilde{R}} [(\tilde{d}h), \overline{F}(\bar{y}, \bar{z})] e^{-\tilde{R}}$. Таким образом, преобразованная функция F является решением задачи n -волн с измененными параметрами ($c \rightarrow \tilde{c}, d \rightarrow \tilde{d}$)

$$[(\tilde{d}h), F] + [(\tilde{c}h), F] = [[(\tilde{d}h), F], [(\tilde{c}h), F]]. \quad (14)$$

Чтобы вернуться к решению первоначальной задачи n -волн (1), необходимо применить обратное преобразование Вейля к функции F . Или, другими словами, функция $\tilde{f} = W_M^{-1} F W_M$ является решением уравнения (1).

В градуированных компонентах преобразование Вейля выглядит следующим образом:

$$\tilde{f}_+ = F_-, \quad \tilde{f}^{(+1)} = [X_M^+, F^{(-1)}], \quad \tilde{f}_0 = F_0, \quad \tilde{f}^{(-1)} = [F^{(+1)}, X_M^-], \quad \tilde{f}_- = -F_+.$$

(Это преобразование записано с учетом специфики n -волновой задачи ($[X_M^\pm, f^0] = 0$). В нередуцированном случае оно отличается дополнительными членами в подпространстве с нулевым индексом градуировки [3].)

Мы не приводим здесь явный вид функции F (см. [3]), но записываем явные выражения для функции $\tilde{f}$, связанной с функцией F посредством обратного преобразования Вейля $F = W_M \tilde{f} W_M^{-1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_+ &= \frac{1}{f_-}, \quad \tilde{f}^{(+1)} = \frac{[X_M^+, f^{(-1)}]}{f_-} \equiv \alpha^{(+1)}, \quad \tilde{f}_0 = f^0 - \frac{f_-}{2} [\alpha^{(+1)}, [\alpha^{(+1)}, X_M^-]], \\ \tilde{f}^{(-1)} &= \frac{1}{2} f_- [f^{(+1)}, X_M^-] + \frac{R_-}{f_-} f^{(-1)} - \\ &\quad - \frac{f_-^2}{6} [X_M^-, [\alpha^{(+1)}, [\alpha^{(+1)}, [\alpha^{(+1)}, X_M^-]]]] - R^{(-1)} - \frac{1}{2} [f^{(-1)}, f^0], \\ \tilde{f}_- &= P_- - \frac{1}{3} f_-^2 f_+ - \frac{R_-^2}{f_-} + \frac{f_-^2}{3} (X_M^-, [\alpha^{(+1)}, f^{(+1)}] - \\ &\quad - \frac{f_-}{6} (f^{(-1)}, [\alpha^{(+1)}, f_0]) + \frac{f_-^3}{24} ([\alpha^{(+1)}, [\alpha^{(+1)}, X_M^-]], [\alpha^{(+1)}, [\alpha^{(+1)}, X_M^-]]). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь R_- , $R^{(-1)}$ суть -2 -, -1 -градуированные компоненты интегралов движения первого порядка [2], определенных самосогласованными уравнениями

$$R_y = f_{\bar{z}} + \frac{1}{2} [f, f_y], \quad R_z = -f_{\bar{y}} + \frac{1}{2} [f, f_z]; \quad (16)$$

P_- есть -2 -градуированная компонента интегралов движения второго порядка

$$P_y = R_{\bar{z}} + \frac{1}{2} [f, f_{\bar{z}}] + \frac{1}{3} [f, [f, f_y]], \quad P_z = -R_{\bar{y}} - \frac{1}{2} [f, f_{\bar{y}}] + \frac{1}{3} [f, [f, f_z]]. \quad (17)$$

Возможность дальнейшего преобразования (15) в случае редукции к задаче n -волн связана с тем фактом, что интегралы движения имеют ту же самую аналитическую зависимость от аргументов x, z , что и функция f (3). Иными словами, их ненулевые градуированные компоненты выражаются в явном виде в терминах функции f и ее производных.

4. СЛУЧАЙ СЕРИИ A_n

Этот случай в физических приложениях известен как задача n -волн. Мы используем тензорные обозначения, которые существенно упрощают все вычисления. Однако окончательный ответ будет приведен в терминах инвариантной корневой техники, применимой ко всем полупростым сериям A, B, C, D, E, F, G .

Здесь и ниже латинские индексы пробегают значения от 1 до n , а греческие — от 2 до $n-1$. Как обычно, генераторы серии A_n удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{j,k} F_{i,l} - \delta_{l,i} F_{j,k}.$$

Генераторы максимального корня следующие: $X_M^+ = F_{1,n}$, $X_M^- = F_{n,1}$. Подпространство с градуировочным индексом $+1$ натянуто на генераторы $f_+^{(+1)} = (F_{1,\alpha})$, $f_-^{(+1)} = (F_{\alpha,n})$, с градуировочным индексом -1 — на $f_-^{(-1)} = (F_{\alpha,1})$, $f_+^{(-1)} = (F_{n,\alpha})$ и, наконец, генераторами подпространства с нулевым градуировочным индексом являются $F_{\alpha,\beta}$.

Для существенного облегчения дальнейших вычислений мы используем следующие тождества, проверяемые непосредственным расчетом:

$$[f_{\pm}^{(+1)}, [f_{\pm}^{(+1)}, X_M^-]] = 0 \quad (18)$$

и такие же тождества для генераторов с противоположными верхними индексами.

Таким образом,

$$\begin{aligned} f = F_{1,n}f_+ + \sum (F_{1,\alpha}f_{1,\alpha}^{(+1)} + F_{\alpha,n}f_{\alpha,n}^{(+1)}) + \sum_{\alpha \neq \beta} F_{\alpha,\beta}f_{\alpha,\beta}^0 + \\ + \sum (F_{\alpha,1}f_{\alpha,1}^{(-1)} + F_{n,\alpha}f_{n,\alpha}^{(-1)}) + F_{n,1}f_-, \end{aligned} \quad (19)$$

где $f_+ = f_{1,n}$, $f_- = f_{n,1}$. В соответствии с общими формулами (15) мы имеем для преобразованных $+2$ -, $+1$ -градуированных компонент применительно к рассматриваемому случаю в тензорных обозначениях

$$\tilde{f}_{1,n} = \frac{1}{f_{n,1}}, \quad \tilde{f}_{1,\alpha}^{(+1)} = \frac{f_{n,\alpha}^{(-1)}}{f_{n,1}}, \quad \tilde{f}_{1\alpha,n}^{(+1)} = -\frac{f_{\alpha,1}^{(-1)}}{f_{n,1}}.$$

Для преобразованных величин подпространства с нулевым градуировочным индексом получаем

$$\tilde{f}^0 = \left(f^0 + \frac{1}{2f_-} [f^{(-1)}, [f^{(-1)}, X_M^+]] \right)_h = \sum_{\alpha \neq \beta} F_{\alpha,\beta} \left(f_{\alpha,\beta}^0 - \frac{f_{\alpha,1}^{(-1)} f_{n,\beta}^{(-1)}}{f_-} \right),$$

где запись $(\cdot)_h$ означает, что члены в скобках, принадлежащие подпространству с нулевым градуировочным индексом, должны быть отброшены. Вычисления, связанные с подпространством с градуировочным индексом -1 , несколько более трудоемки. Для всех членов из общих формул (15) имеем

$$\frac{1}{2}f_-[f^{(+1)}, X_M^-] = \frac{1}{2}f_{n,1} \sum (-F_{n,\alpha}f_{1,\alpha}^{(+1)} + F_{\alpha,1}f_{\alpha,n}^{(+1)}), \quad (20)$$

$$-\frac{1}{2}[f^{(-1)}, f^0] = \frac{1}{2} \sum \left(F_{\alpha,1} \sum_{\alpha \neq \beta} f_{\beta,1}^{(-1)} f_{\alpha,\beta}^0 - F_{n,\alpha} \sum_{\alpha \neq \beta} f_{n,\beta}^{(-1)} f_{\beta,\alpha}^0 \right). \quad (21)$$

Используя тождества (18) (напомним, что они справедливы только в случае серии A_n), нетрудно показать, что третье слагаемое в правой части четвертого соотношения (15) последовательными манипуляциями может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} -\frac{f_-^2}{6} [X_M^-, [\alpha^{(+1)}, [\alpha^{(+1)}, [\alpha^{(+1)}, X_M^-]]]] = -\frac{1}{6f_-} [f^{(-1)}, [f^{(-1)}, [f^{(-1)}, X_M^+]]] = \\ = \frac{1}{2f_-} [f_+^{(-1)} - f_-^{(-1)}, [X_M^+, [f_+^{(-1)}, f_-^{(-1)}]]] = \frac{\sum f_{n,\alpha}^{(-1)} f_{\alpha,1}^{(-1)}}{2f_{n,1}} (f_+^{(-1)} - f_-^{(-1)}), \end{aligned} \quad (22)$$

$$R_- \frac{f^{(-1)}}{f_-} = \frac{R_{n,1}}{f_{n,1}} \sum (F_{\alpha,1}f_{\alpha,1}^{(-1)} + F_{n,\alpha}f_{n,\alpha}^{(-1)}). \quad (23)$$

Определяющим обстоятельством для дальнейших вычислений является упомянутый в конце предыдущего раздела факт, что в рассматриваемом случае интегралы движения могут быть выражены в терминах функции f и ее производных $f_{\bar{y}} \equiv \dot{f}$, $f_{\bar{z}} \equiv f'$. Из формулы, определяющей интегралы движения (16), записанной в тензорных обозначениях, вытекает

$$\begin{aligned} -\dot{f}_{i,j} + \sum_{k \neq i, k \neq j} f_{i,k} f_{k,j} (2c_k - c_i - c_j) &= (c_i - c_j) R_{i,j}, \quad \sum c_i = 0, \\ f'_{i,j} + \sum_{k \neq i, k \neq j} f_{i,k} f_{k,j} (2d_k - d_i - d_j) &= (d_i - d_j) R_{i,j}, \quad \sum d_i = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В тех же обозначениях имеем

$$R^{(-1)} = \sum (F_{\alpha,1} R_{\alpha,1}^{(-1)} + F_{n,\alpha} R_{n,\alpha}^{(-1)}),$$

и каждая компонента $R^{(-1)}$ определена посредством (24):

$$\begin{aligned} R_{\alpha,1}^{(-1)} &= -\frac{\dot{f}_{\alpha,1}}{c_{\alpha} - c_1} + \sum \frac{2c_{\beta} - c_1 - c_{\alpha}}{2(c_{\alpha} - c_1)} f_{\alpha,\beta} f_{\beta,1}^{(-1)} + \frac{2c_n - c_{\alpha} - c_1}{2(c_{\alpha} - c_1)} f_{\alpha,n}^{(+1)} f_{n,1} = \\ &= \frac{f'_{\alpha,1}}{2(d_{\alpha} - d_1)} + \sum \frac{2d_{\beta} - d_1 - d_{\alpha}}{2(d_{\alpha} - d_1)} f_{\alpha,\beta} f_{\beta,1}^{(-1)} + \frac{2d_n - d_{\alpha} - d_1}{2(d_{\alpha} - d_1)} f_{\alpha,n}^{(+1)} f_{n,1}, \\ R_{n,\alpha}^{(-1)} &= -\frac{\dot{f}_{n,\alpha}}{2(c_n - c_{\alpha})} + \sum \frac{2c_{\beta} - c_n - c_{\alpha}}{2(c_n - c_{\alpha})} f_{\beta,\alpha} f_{n,\beta}^{(-1)} + \frac{2c_1 - c_{\alpha} - c_n}{2(c_n - c_{\alpha})} f_{1,\alpha}^{(+1)} f_{n,1} = \\ &= \frac{f'_{n,\alpha}}{2(d_n - d_{\alpha})} + \sum \frac{2d_{\beta} - d_n - d_{\alpha}}{2(d_n - d_{\alpha})} f_{\beta,\alpha} f_{n,\beta}^{(-1)} + \frac{2d_1 - d_{\alpha} - d_n}{2(d_n - d_{\alpha})} f_{1,\alpha}^{(+1)} f_{n,1}. \end{aligned}$$

Эти равенства, связывающие производные функции f по различным аргументам ($\dot{f}$, f'), являются уравнениями для -1 -градуированных компонент функции f . Объединяя компоненту $R_{\alpha,1}^{(-1)}$, вычисленную выше, с соответствующей компонентой из (20), (21), получаем

$$\frac{\dot{f}_{\alpha,1}}{c_{\alpha} - c_1} + \sum \frac{c_{\alpha} - c_{\beta}}{c_{\alpha} - c_1} f_{\alpha,\beta} f_{\beta,1}^{(-1)} + \frac{c_{\alpha} - c_n}{c_{\alpha} - c_1} f_{\alpha,n}^{(+1)} f_{n,1} = (\dot{f} \rightarrow -f', c \rightarrow d).$$

Используя ту же технику вычислений для $R_{-} \equiv R_{n,1}$, имеем

$$\begin{aligned} R_{n,1} &= -\frac{\dot{f}_{n,1}}{c_n - c_1} + \sum \frac{2c_{\alpha} - c_1 - c_n}{2(c_n - c_1)} f_{n,\alpha}^{(-1)} f_{\alpha,1}^{(-1)} = \\ &= \frac{f'_{n,1}}{d_n - d_1} + \sum \frac{2d_{\alpha} - d_1 - d_n}{2(d_n - d_1)} f_{n,\alpha}^{(-1)} f_{\alpha,1}^{(-1)}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (23) и объединяя их с (22), находим

$$\left(-\frac{\dot{f}_{n,1}}{c_n - c_1} + \sum \frac{c_{\beta} - c_n}{c_n - c_1} f_{n,\beta}^{(-1)} f_{\beta,1}^{(-1)} \right) \frac{f_{\alpha,1}^{(-1)}}{f_{n,1}} = (\dot{f} \rightarrow -f', c \rightarrow d). \quad (25)$$

Таким же образом представляем $R_{\alpha,1}^{(-1)} + f_{n,1}f_{\alpha,n}^{(+1)}/2 + (1/2)\sum_{\alpha\neq\beta}f_{\alpha,\beta}^0f_{\beta,1}^{(-1)}$ в виде

$$\frac{\dot{f}_{\alpha,1}}{c_{\alpha}-c_1} + \sum \frac{c_{\alpha}-c_{\beta}}{c_{\alpha}-c_1}f_{\alpha,\beta}^0f_{\beta,1}^{(-1)} + \frac{c_{\alpha}-c_n}{c_{\alpha}-c_1}f_{\alpha,n}^{(+1)}f_{n,1} = (\dot{f} \rightarrow -f', c \rightarrow d). \quad (26)$$

Сумма (25) и (26) есть точно компонента $\tilde{f}_{\alpha,1}^{(-1)}$, которая может быть представлена в терминах производных как по аргументу t , так и по аргументу x . Таким образом, мы получаем окончательно

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha}^{(-1)} = & \left(-\frac{\dot{f}_{n,1}}{c_n-c_1} + \sum \frac{c_{\beta}-c_n}{c_n-c_1}f_{n,\beta}^{(-1)}f_{\beta,1}^{(-1)} \right) \frac{f_{\alpha,1}^{(-1)}}{f_{n,1}} + \\ & + \frac{\dot{f}_{\alpha,1}}{c_{\alpha}-c_1} + \sum \frac{c_{\alpha}-c_{\beta}}{c_{\alpha}-c_1}f_{\alpha,\beta}^0f_{\beta,1}^{(-1)} + \frac{c_{\alpha}-c_n}{c_{\alpha}-c_1}f_{\alpha,n}^{(+1)}f_{n,1} = (\dot{f} \rightarrow -f', c \rightarrow d). \end{aligned}$$

Однако, используя уравнения движения, последнее выражение можно переписать в более симметричном виде (детали вычислений и обозначения см. в следующем разделе):

$$\tilde{f}_{\alpha}^{(-1)} = f_- D_{\alpha,n} \frac{f_{\alpha}^{(-1)}}{f_-} + \sum_{\beta} \frac{Q(\alpha, \beta, n)}{Q(\alpha, 1, n)} \tilde{f}_{\alpha,\beta}^0 f_{\beta,1}^{-1}. \quad (27)$$

Теперь перейдем к вычислению -2 -градуированной компоненты общей формулы (15). Из определения P (17) мы получаем для его -2 -компоненты соотношение

$$\begin{aligned} P_- = & \frac{4}{3}f_+f_-^2 + \frac{1}{3}f_-(f^{(-1)}, f^{(+1)}) - \frac{2}{3}([X_M^+, f^{(-1)}], [f^{(-1)}, f^0]) - \frac{f_-}{M_c}(f^{(-1)}, [c, f^{(+1)}]) + \\ & + \frac{1}{M_c}([c, [X_M^+, f^{(-1)}]], [f^{(-1)}, f^0]) + \frac{\ddot{f}_-}{M_c^2} - \frac{1}{M_c^2}(X_M^+, [f^{(-1)}, [c, \dot{f}^{(-1)}]]). \end{aligned}$$

Объединяя все члены одинаковой структуры в (15), имеем для -2 -градуированной компоненты преобразованного поля

$$\begin{aligned} \tilde{f}_- = & f_-^2 f_+ + \frac{\ddot{f}_-}{M_c^2} - \frac{1}{M_c^2}(X_M^+, [f^{(-1)}, [c, \dot{f}^{(-1)}]]) - \frac{(\dot{f}_- - \frac{1}{2}([X_M^+, f^{(-1)}], [c, f^{(-1)}]))^2}{M_c^2 f_-} + \\ & + \frac{1}{2}([X_M^+, f^{(-1)}], [f^0, f^{(-1)}]) + \frac{1}{24f_-}([f^{(-1)}, [f^{(-1)}, X_M^+]], [f^{(-1)}, [f^{(-1)}, X_M^+]]) + \\ & + \frac{f_-}{M_c}(f^{(-1)}, [c, f^{(+1)}]) - \frac{1}{M_c}([c, [X_M^+, f^{(-1)}]], [f^0, f^{(-1)}]). \end{aligned}$$

В случае алгебры A_n с помощью тождеств (18) последнее выражение может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \tilde{f}_- = & f_-^2 f_+ + \frac{\ddot{f}_-}{M_c^2} - \frac{(\dot{f}_- - \frac{1}{2}(X_M^+, [f_+^{(-1)}, [c, f_-^{(-1)}]]))(\dot{f}_- - \frac{1}{2}(X_M^+, [f_-^{(-1)}, [c, f_+^{(-1)}]]))}{M_c^2 f_-} - \\ & - \frac{1}{M_c^2}(X_M^+, [f^{(-1)}, [c, \dot{f}^{(-1)}]]) + \frac{f_-}{M_c}(f^{(-1)}, [c, f^{(+1)}]) - \\ & - \frac{1}{2M_c}(X_M^+, [f^{(-1)}, [f^{(-1)}, [c, f^0]]]). \end{aligned} \quad (28)$$

5. ВЫВОД ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕЗ АПЕЛЛЯЦИИ К УРАВНЕНИЯМ АВТОДУАЛЬНОСТИ

В этом разделе предлагается прямой путь получения дискретных преобразований для задачи n -волн без использования результатов теории автодуальных уравнений Янга–Миллса. В некотором смысле мы проверим формулы, полученные в предыдущем разделе, показав независимо, что преобразованные величины удовлетворяют задаче n -волн.

Мы предполагаем (или это может рассматриваться как счастливая догадка; см. ниже), что

$$\tilde{f}_+ = \frac{1}{f_-}, \quad \tilde{f}^{(+1)} = \frac{[X_M^+, f^{(-1)}]}{f_-}, \quad \tilde{f}^0 = \left(f^0 + \frac{1}{2f_-} [f^{(-1)}, [f^{(-1)}, X_M^+]] \right)_h. \quad (29)$$

Изучим, какие следствия вытекают из этого предположения.

Уравнение для -2 -градуированной компоненты имеет вид

$$-D_M f_- X_M^- = [[d, f^{(-1)}], [c, f^{(-1)}]], \quad D_M f = d_M \dot{f} + c_M f'.$$

После деления обеих частей этого уравнения на f_-^2 и повторного коммутирования с X_M^+ получаем

$$D_M \frac{1}{f_-} X_M^+ = -[[\tilde{d}, \tilde{f}^{(+1)}], [\tilde{c}, \tilde{f}^{(+1)}]] = [[d, \tilde{f}^{(+1)}], [c, \tilde{f}^{(+1)}]],$$

и, следовательно, уравнение для $+2$ -градуированной компоненты преобразованного поля выполняется.

Уравнение для $+1$ -градуированной компоненты преобразованного поля имеет вид

$$D_\nu \tilde{f}_\nu^{(+1)} = \tilde{f}_+ [X_M^+, [d_M c - c_M d, \tilde{f}^{(-1)}]_\nu + [[d, \tilde{f}^0], [c, \tilde{f}^{(+1)}]_\nu + [[d, \tilde{f}^{(+1)}], [c, \tilde{f}^0]_\nu].$$

После подстановки преобразованных величин $\tilde{f}_+$, $\tilde{f}^{(+1)}$ в терминах начальных получаем

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{d}, \left(\frac{f^{(-1)}}{f_-} \right)' \right] + \left[\tilde{c}, \left(\frac{f^{(-1)}}{f_-} \right)' \right] = \\ & = \frac{1}{f_-} [d_M c - c_M d, \tilde{f}^{(-1)}] + \frac{1}{f_-} ([[\tilde{d}, f^{(-1)}], [c, \tilde{f}^0]] - [[\tilde{c}, f^{(-1)}], [d, \tilde{f}^0]]). \end{aligned} \quad (30)$$

Переписывая последнее равенство в покомпонентной форме, получаем окончательно

$$\tilde{f}_\nu^{(-1)} = f_- D_{M-\nu} \left(\frac{f^{(-1)}}{f_-} \right) + \frac{[[N_\nu(c, d), \tilde{f}^0], f^{(-1)}]_\nu}{d_M c_\nu - c_M d_\nu}, \quad (31)$$

где символом $D_{M-\nu}$ обозначен оператор дифференцирования

$$D_{M-\nu} f \equiv \frac{(M-\nu)(d)\dot{f} + (M-\nu)(c)f'}{d_M c_\nu - c_M d_\nu}$$

и $N_\nu(c, d)$ есть следующий элемент подалгебры Картана:

$$N_\nu(c, d) = cd_{M-\nu} - dc_{M-\nu}.$$

Если переписать (31) применительно к серии A_n , мы вернемся к формуле (27).

Уравнение для нулевых компонент следующее ($f^0 = f_0$):

$$[d, \dot{f}_0] + [c, \tilde{f}'_0] = [[d, \tilde{f}^{(-1)}], [c, \tilde{f}^{(+1)}]] + [[d, \tilde{f}^{(+1)}], [c, \tilde{f}^{(-1)}]] + [[d, \tilde{f}_0], [c, \tilde{f}_0]].$$

Оно не содержит никаких неизвестных новых функций (член, содержащий $\tilde{f}_-$, сокращается) и, следовательно, может рассматриваться как дополнительная проверка изначальной догадки (29). Мы не приводим здесь достаточно трудоемких, но несложных проверочных вычислений.

Уравнение для -1 -градуированной компоненты функции $\tilde{f}$

$$[d, \dot{f}^{(-1)}] + [c, (f^{(-1)})'] = \frac{\tilde{f}_-}{f_-} [dc_M - cd_M, f^{(+1)}] + [[d, \tilde{f}^0], [c, \tilde{f}^{(-1)}]] - [[c, \tilde{f}^0], [d, \tilde{f}^{(-1)}]] \quad (32)$$

позволяет вычислить единственную до сих пор неизвестную компоненту $\tilde{f}_-$.

Приведем соответствующие вычисления для случая полупростой серии A_n . Для этих вычислений требуется явный вид уравнений

$$\begin{aligned} D_{1,\alpha} f_{\alpha,1}^{(-1)} &= -f_- f_{\alpha,n}^{(+1)} + \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, 1)}{Q(\alpha, 1, n)} f_{\alpha,\gamma}^0 f_{\gamma,1}^{(-1)}, \\ D_{\alpha,n} f_{n,\alpha}^{(-1)} &= -f_- f_{1,\alpha}^{(+1)} - \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, n)}{Q(\alpha, 1, n)} f_{\gamma,\alpha}^0 f_{n,\gamma}^{(-1)}, \\ D_{1,\alpha} f_{1,\alpha}^{(+1)} &= -f_+ f_{n,\alpha}^{(-1)} + \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, 1)}{Q(\alpha, 1, n)} f_{\gamma,\alpha}^0 f_{1,\gamma}^{(+1)}, \\ D_{\alpha,n} f_{\alpha,1}^{(+1)} &= -f_+ f_{\alpha,1}^{(-1)} - \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, n)}{Q(\alpha, 1, n)} f_{\alpha,\gamma}^0 f_{\gamma,n}^{(+1)}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $Q(\alpha, \beta, \gamma) = (c_\alpha - c_\beta)(d_\beta - d_\gamma) - (d_\alpha - d_\beta)(c_\beta - c_\gamma)$,

$$D_{\alpha,\beta} f_{\alpha,\beta}^0 = Q(\alpha, \beta, n) f_{\alpha,n}^{(+1)} f_{n,\beta}^{(-1)} + Q(\alpha, \beta, 1) f_{\alpha,1}^{(-1)} f_{1,\beta}^{(+1)} + \sum Q(\alpha, \beta, \gamma) f_{\alpha,\gamma}^0 f_{\gamma,\beta}^0.$$

В последних формулах операторы дифференцирования определены следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{\alpha,1} F &= \frac{(d_\alpha - d_1)\dot{F} + (c_\alpha - c_1)F'}{Q(\alpha, 1, n)}, & D_{\alpha,n} F &= \frac{(d_\alpha - d_n)\dot{F} + (c_\alpha - c_n)F'}{Q(\alpha, 1, n)}, \\ D_{\alpha,\beta} F &= (d_\alpha - d_\beta)\dot{F} + (c_\alpha - c_\beta)F'. \end{aligned}$$

Уравнение (30), разрешенное относительно $\tilde{f}_{\alpha,1}^{(-1)}$, определяет явный вид -1 -градуированной компоненты:

$$\tilde{f}_{\alpha,1}^{(-1)} = D_{\alpha,n} f_{\alpha,1}^{(-1)} - f_{\alpha,1}^{(-1)} D_{\alpha,n} \ln f_- + \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, n)}{Q(\alpha, 1, n)} \tilde{f}_{\alpha,\gamma}^0 f_{\gamma,1}^{(-1)}. \quad (34)$$

Уравнение (32) в случае алгебры A_n переписывается в виде

$$D_{\alpha,1}\tilde{f}_{\alpha,1}^{(-1)} = -\frac{\tilde{f}_-}{f_-}f_{\alpha,1}^{(-1)} - \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, 1)}{Q(\alpha, 1, n)}\tilde{f}_{\alpha,\gamma}^0\tilde{f}_{\gamma,1}^{(-1)}. \quad (35)$$

Подставляя (34) в (35), имеем

$$\begin{aligned} & D_{\alpha,n}D_{\alpha,1}f_{\alpha,1}^{(-1)} - D_{\alpha,1}f_{\alpha,1}^{(-1)} - f_{\alpha,1}^{(-1)}D_{\alpha,n}D_{\alpha,1}\ln f_- + \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, n)}{Q(\alpha, 1, n)}D_{\alpha,1}(\tilde{f}_{\alpha,\gamma}^0f_{\gamma,1}^{(-1)}) = \\ & = -\frac{\tilde{f}_-}{f_-}f_{\alpha,1}^{(-1)}f_{\alpha,1}^{(-1)} - \\ & - \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, 1)}{Q(\alpha, 1, n)}\tilde{f}_{\alpha,\gamma}^0 \left(D_{\gamma,n}f_{\gamma,1}^{(-1)} - f_{\gamma,1}^{(-1)}D_{\gamma,n}\ln f_- + \sum \frac{Q(\gamma, \sigma, n)}{Q(\gamma, 1, n)}\tilde{f}_{\gamma,\sigma}^0f_{\sigma,1}^{(-1)} \right). \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования связаны с использованием уравнений движения (33) и следующих тождеств, проверяемых непосредственно:

$$\begin{aligned} & Q(\alpha, \gamma, n)D_{\alpha,1} - Q(\alpha, \gamma, 1)D_{\alpha,n} = D_{\alpha,\gamma}, \\ & Q(\alpha, \gamma, n)D_{\alpha,1} - Q(\alpha, \gamma, 1)D_{\alpha,n} + Q(\alpha, \gamma, 1)D_{\gamma,n} = D_{\gamma,1}, \\ & Q(\alpha, 1, \sigma)Q(\gamma, 1, n) + Q(\alpha, \gamma, 1)Q(\sigma, 1, n) = Q(\alpha, 1, n)Q(\sigma, \gamma, 1). \end{aligned}$$

Окончательно для преобразованной компоненты $\tilde{f}_-$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{f}_-}{f_-} - f_+f_- + D_{1,\alpha}D_{\alpha,n}\ln f_- - \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, n)D_{\alpha,1} + Q(\alpha, \gamma, 1)D_{\gamma,n}}{Q(\alpha, 1, n)}\frac{f_{\gamma,1}^{(-1)}f_{n,\gamma}^{(-1)}}{f_-} + \\ & + \sum \frac{Q(\alpha, \gamma, 1)}{Q(\alpha, 1, n)}\frac{f_{\gamma,1}^{(-1)}f_{n,\gamma}^{(-1)}}{f_-} \sum \frac{Q(\gamma, \sigma, n)}{Q(\gamma, 1, n)}\frac{f_{\sigma,1}^{(-1)}f_{n,\sigma}^{(-1)}}{f_-} - \\ & - \sum \sum \frac{Q(\sigma, \gamma, n)}{Q(\gamma, 1, n)}\frac{Q(\sigma, \gamma, 1)}{Q(\gamma, 1, n)}\frac{f_{\gamma,\sigma}^0f_{n,\gamma}^{(-1)}f_{\sigma,1}^{(-1)}}{f_-} = 0. \end{aligned}$$

Если в последнем выражении, используя уравнения задачи n -волн, перейти к дифференцированию только по одному из аргументов t или x , то мы возвратимся к выражению (28).

6. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В работе [4] (см. также приведенную там литературу) предложен чисто алгебраический (на уровне решения линейной системы алгебраических уравнений) метод построения решений интегрируемых систем солитонного типа.

Определим элемент $P(\lambda)$, принимающий значения в группе (для упрощения изложения в дальнейшем будем считать его принадлежащим группе $L(n, C)$):

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{n_1+1}^{1,1} & P_{n_2}^{1,2} & \cdots & P_{n_k}^{1,k+1} \\ P_{n_1}^{2,1} & \tilde{P}_{n_2+1}^{2,2} & \cdots & P_{n_k}^{2,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n_1}^{k+1,1} & P_{n_2}^{k+1,2} & \cdots & \tilde{P}_{n_k+1}^{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

где $P_n^{\alpha, \beta}$ — полиномы степени n от λ , $\tilde{P}_{n+1}^{\alpha, \alpha}$ — полиномы степени $n+1$ с единичным коэффициентом при старшем члене λ^{n+1} . Коэффициенты матрицы полиномов P определяются требованием линейной зависимости между столбцами матрицы $g = P \exp(\sum h_s \tau_s)$ в $\sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1)$ (различных) точках плоскости λ ; $\tau_s = \tau_s^1(t, \lambda) + \tau_s^2(x, \lambda)$, где $\tau_{1,2}$ — произвольные рациональные функции параметра λ . Условие линейной зависимости эквивалентно следующей линейной системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{\beta=1}^{k+1} P_{n_\beta + \delta_{\alpha, \beta}}^{\alpha, \beta} c_\beta(\lambda_i) e^{\tau_\beta(\lambda_i) - \tau_{\beta-1}(\lambda_i)} = 0, \quad (36)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, k+1, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1),$$

где $c_\beta(\lambda_i)$ — произвольные числовые параметры, $\tau_0 = \tau_{k+1} = 0$.

Нетрудно подсчитать, что число неизвестных коэффициентов матрицы полиномов P в точности совпадает с числом уравнений в системе (36), и, следовательно, все они могут быть вычислены однозначно по правилам Крамера.

Из явного вида матрицы полиномов следует, что детерминант этой матрицы является полиномом степени $\sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1)$ с единичным коэффициентом при старшем члене, однако $\text{Det } P = \text{Det}(P \exp(\sum h_s \tau_s))$. О последней матрице известно, что между ее столбцами имеет место линейная зависимость точно в $\sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1)$ точках плоскости λ , и, следовательно,

$$\text{Det } P = \prod_{i=1}^{\sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1)} (\lambda - \lambda_i).$$

Построенные с использованием группового элемента матрицы $g = P \exp(\sum h_s \tau_s)$ две $L(n, C)$ -матрицы $u = g_t g^{-1}$ и $v = g_x g^{-1}$ удовлетворяют тождествам Маурера–Картана, и, таким образом, мы получили интегрируемую систему и построили ее частное решение.

Матричные элементы матриц u и v могут быть представлены в виде

$$u_{\alpha, \beta} = \frac{\text{Det}(P_\beta \rightarrow (P_\alpha)_t + P_\alpha((\tau_\alpha^1)_t - (\tau_{\alpha-1}^1)_t))}{\prod (\lambda - \lambda_i)},$$

$$v_{\alpha, \beta} = \frac{\text{Det}(P_\beta \rightarrow (P_\alpha)_x + P_\alpha((\tau_\alpha^2)_x - (\tau_{\alpha-1}^2)_x))}{\prod (\lambda - \lambda_i)}, \quad (37)$$

где символическая форма записи матрицы под знаком детерминанта в числителе означает, что β -я строка матрицы P должна быть заменена α -й строкой указанной в (37) матрицы.

При произвольной рациональной зависимости функций $\tau^{1,2}$ от λ числители в (37) имеют те же нули, что и знаменатели, и, таким образом, матрицы u и v имеют те же аналитические свойства, что и соответственно функции τ^1 и τ^2 .

Теперь мы подробно рассмотрим простейший случай линейной зависимости функций τ от параметра λ : $\tau_\alpha = \lambda(c_\alpha t + d_\alpha x)$, где $c_\alpha, d_\alpha - 2k$ произвольных численных параметров. Матричные элементы матриц u, v , вычисленные в соответствии с (37), суть

$$\begin{aligned} u_{\alpha,\beta} &= \lambda c_\alpha \delta_{\alpha,\beta} + (c_\alpha - c_\beta)(P_{n_\alpha}^{\alpha,\beta})_{n_\alpha}^{n_\alpha}, \\ v_{\alpha,\beta} &= \lambda d_\alpha \delta_{\alpha,\beta} + (d_\alpha - d_\beta)(P_{n_\alpha}^{\alpha,\beta})_{n_\alpha}^{n_\alpha}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $(P_{n_\alpha}^{\alpha,\beta})_{n_\alpha}^{n_\alpha}$ — коэффициент при старшей степени полинома $P_{n_\alpha}^{\alpha,\beta}$. Эти коэффициенты определяются из линейной системы алгебраических уравнений (36). Для записи результата в явном виде мы воспользуемся следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} \Delta(n_1, n_2, \dots, n_k) &= \\ &= \text{Det}(\tilde{c}_{n_1} \lambda^{n_1}, \tilde{c}_{n_1} \lambda^{n_1-1}, \dots, \tilde{c}_{n_1}, \tilde{c}_{n_2} \lambda^{n_2}, \dots, \tilde{c}_{n_2}, \dots, \lambda^{n_k} \tilde{c}_{n_k}, \dots, \tilde{c}_{n_k}), \end{aligned}$$

где под знаком детерминанта стоит матрица размера $\sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1) \times \sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1)$, в первой строке которой $\lambda = \lambda_1$, во второй $\lambda = \lambda_2$ и т.д., $\tilde{c}_{n_\beta} = c_\beta(\lambda_i) e^{\tau_\beta(\lambda) - \tau_{\beta-1}(\lambda)}$.

В этих обозначениях с помощью правила Крамера получаем

$$(P_{n_\alpha}^{\alpha,\beta})_{n_\alpha}^{n_\alpha} = (-1)^{1+\sum_{\alpha}^{\beta-1} (n_i+1)} \frac{\Delta(n_1, \dots, n_\alpha + 1, \dots, n_\beta - 1, \dots, n_{k+1})}{\Delta(n_1, \dots, n_{k+1})}$$

в случае $\alpha \leq \beta$ или

$$(P_{n_\alpha}^{\alpha,\beta})_{n_\alpha}^{n_\alpha} = (-1)^{\sum_{\beta}^{\alpha-1} (n_i+1)} \frac{\Delta(n_1, \dots, n_\alpha - 1, \dots, n_\beta + 1, \dots, n_{k+1})}{\Delta(n_1, \dots, n_{k+1})}$$

в случае $\beta \leq \alpha$.

Теперь мы рассмотрим частный случай алгебры A_3 и представим полученное решение в покомпонентной форме:

$$\begin{aligned} f_{12} &= (-1)^{n_1+2} \frac{\Delta(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, n_4)}{\Delta}, \\ f_{13} &= (-1)^{n_1+n_2+3} \frac{\Delta(n_1 + 1, n_2, n_3 - 1, n_4)}{\Delta}, \\ f_{14} &= (-1)^{n_1+n_2+n_3+4} \frac{\Delta(n_1 + 1, n_2, n_3, n_4 - 1)}{\Delta}, \\ f_{21} &= (-1)^{n_1+1} \frac{\Delta(n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, n_4)}{\Delta}, \\ f_{23} &= (-1)^{n_2+2} \frac{\Delta(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4)}{\Delta}, \\ f_{24} &= (-1)^{n_2+n_3+3} \frac{\Delta(n_1, n_2 + 1, n_3, n_4 - 1)}{\Delta}, \\ f_{31} &= (-1)^{n_1+n_2+2} \frac{\Delta(n_1 - 1, n_2, n_3 + 1, n_4)}{\Delta}, \\ f_{32} &= (-1)^{n_2+1} \frac{\Delta(n_1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4)}{\Delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{34} &= (-1)^{n_3+2} \frac{\Delta(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4 - 1)}{\Delta}, \\
f_{41} &= (-1)^{n_1+n_2+n_3+3} \frac{\Delta(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4 + 1)}{\Delta}, \\
f_{42} &= (-1)^{n_2+n_3+2} \frac{\Delta(n_1, n_2 - 1, n_3, n_4 + 1)}{\Delta}, \\
f_{43} &= (-1)^{n_3+1} \frac{\Delta(n_1, n_2, n_3 - 1, n_4 + 1)}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Решения такого вида будем обозначать единым символом $\hat{f}(n_1, n_2, n_3, n_4)$. Нетрудно проверить, что дискретные преобразования предыдущих разделов T_{X_M} (см. формулу (14) в тензорных обозначениях) действуют в указанных обозначениях следующим образом:

$$T_{X_M} \hat{f}(n_1, n_2, n_3, n_4) = \hat{f}(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4 + 1).$$

Но как было отмечено в разделе 2, существует 4! способов выбора максимального корня алгебры. Наиболее важными для нашего рассмотрения являются те, при которых максимальный корень совпадает с одним из простых корней. Для рассматриваемого примера это следующие три возможных разложения:

$$\begin{aligned}
X_M^\pm &= X_1^\pm, & H &= h_1, & f^{(\pm 1)} &= (X_2^\mp, X_{23}^\mp, X_{12}^\pm, X_{123}^\pm), & f^0 &= X_3^\pm; \\
X_M^\pm &= X_2^\pm, & H &= h_2, & f^{(\pm 1)} &= (X_1^\mp, X_3^\mp, X_{12}^\pm, X_{23}^\pm), & f^0 &= X_{123}^\pm; \\
X_M^\pm &= X_3^\pm, & H &= h_3, & f^{(\pm 1)} &= (X_2^\mp, X_{12}^\mp, X_{23}^\pm, X_{123}^\pm), & f^0 &= X_1^\pm.
\end{aligned}$$

Из трех приведенных разложений следуют три базисных дискретных преобразования:

$$\begin{aligned}
T_{X_1^-} \hat{f}(n_1, n_2, n_3, n_4) &= \hat{f}(n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, n_4), \\
T_{X_2^-} \hat{f}(n_1, n_2, n_3, n_4) &= \hat{f}(n_1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4), \\
T_{X_3^-} \hat{f}(n_1, n_2, n_3, n_4) &= \hat{f}(n_1, n_2, n_3 - 1, n_4 + 1).
\end{aligned}$$

Из явного вида базисных дискретных преобразований вытекают их взаимная коммутативность и мультипликативный закон для дискретных преобразований, связанных с вейлевским отражением композиционного корня алгебры. Например,

$$T_{X_{123}} = T_{X_1} T_{X_2} T_{X_3}.$$

В заключение настоящего раздела подчеркнем, что алгебраическая структура дискретных преобразований останется неизменной в случае произвольных многокомпонентных интегрируемых систем в рамках конструкции, описанной выше. Однако явная зависимость преобразованных величин от первоначальных ($\tilde{f}_i = F_i(f_k)$) превращается в сложную функциональную зависимость от аналитической структуры функций τ_α , определяющих коэффициенты матрицы полиномов. Как реализовать приведенную конструкцию в общем случае (и возможно ли), автору на сегодняшний день неизвестно.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве того факта, что дискретные симметрии многокомпонентных интегрируемых систем (по крайней мере, описываемых в рамках конструкции раздела 6) обладают тонкой структурой и могут быть представлены в виде произведения базисных взаимно коммутирующих дискретных преобразований, связанных с вейлевскими отражениями простых корней алгебры.

Этот факт является еще одним независимым подтверждением той точки зрения, что основания теории интегрируемых систем лежат в теории представлений групп. С этой точки зрения очень интересно и важно понять природу линейной системы (36) и ее связь с теорией представлений. Не менее интересным является вопрос о том, с какими известными (или неизвестными) интегрируемыми цепочками (и отображениями) связаны дискретные преобразования настоящей работы. Сейчас хорошо известно, что в случае двухкомпонентных систем эти цепочки совпадают с трехчленной цепочкой Тоды или с ее эллиптическим обобщением.

Связаны ли симметрии многокомпонентных интегрируемых систем с недавно введенными ультра-Тода-отображениями [7]? Этот и многие другие вопросы ждут дальнейших исследований.

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. М. Манakov, С. Р. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980.
- [2] А. Н. Лезнов. ТМФ. 1987. Т. 73. № 2. С. 302.
- [3] А. Н. Лезнов. Backlund transformation for the self-dual Yang–Mills equations. Preprint IHEP 91-45. Protvino: IHEP, 1991; The solution of discrete symmetry equations for four-dimensional self-dual system in the case of arbitrary semisimple gauge algebra. Preprint MPI-40. Bonn: MPI, 1996.
- [4] А. Н. Лезнов. ЭЧАЯ. 1996. Т. 27. № 5. С. 1161.
- [5] А. Н. Лезнов, Т. А. Yuzbashyan. Phys. Lett. A. 1998. V. 242. № 1–2. P. 31.
- [6] С. Н. Yang. Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 1377.
- [7] А. Н. Лезнов. ТМФ. 2000. Т. 122. № 2. С. 251; 1998. Т. 117. № 1. С. 107.

Поступила в редакцию 25.X.2001 г.