Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ион Чен, Женья Ян, Гончинь Джань, Получение точных решений семейства уравнений “reaction–duffing” с переменными коэффициентами с помощью преобразования Беклунда, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 1, 90–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf348>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:08:07

© 2002 г. Ион Чен*, Жень Ян*, Гончинь Джань*

ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА
УРАВНЕНИЙ “REACTION–DUFFING”
С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

Рассмотрено уравнение “reaction-duffing” с переменными коэффициентами. С помощью метода однородного баланса построено преобразование Беклунда. Получены нелокальная симметрия и несколько семейств точных решений этого уравнения, включая солитонные решения. В качестве частных случаев рассмотрены уравнения Фитцхью–Нагумо и Чаффи–Инфанте.

Ключевые слова: уравнение “reaction-duffing”, преобразование Беклунда, симметрия, точное решение, солитонное решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поиск точных решений нелинейных эволюционных уравнений играет важную роль в теории солитонов. Среди методов, направленных на решение этой задачи, выделим метод синуса-косинуса, метод однородного баланса, преобразование Беклунда (ПБ), метод Хироты [1]–[6]. В математической физике для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных важным является поиск ПБ [1], [6], с помощью которого можно получить точное решение исследуемого уравнения.

Рассмотрим уравнение “reaction–duffing” с переменными коэффициентами

$$u_t + h_2(t)u_x + h_1(t)(Au_{xx} + Bu^3 + Eu^2 + Du) = 0, \quad (1)$$

где $h_1(t)$ и $h_2(t)$ – произвольные функции t , а A , B , E и D – постоянные. При различных функциях $h_1(t)$ и $h_2(t)$ и различных значениях A , B , E , D уравнение (1) переходит в ряд известных волновых уравнений, таких, как уравнение Ньюэлла–Уайтхеда, уравнение Фитцхью–Нагумо, уравнение Чаффи–Инфанте, уравнение КПП и уравнение Хаксли [7]–[10].

*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, People's Republic of China. E-mail: yanzhy@student.dlut.edu.cn

В данной работе мы распространяем метод однородного баланса [7], [8], [11], [12] на уравнение (1), с тем чтобы найти ПБ для этого уравнения. На основе полученного ПБ строится симметрия уравнения (1) и находятся его явные точные решения, включая солитонные и некоторые другие типы новых точных решений. Кроме того, получены точные решения ряда других уравнений.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА И СИММЕТРИЯ

Для того чтобы сбалансировать два члена u_{xx} и u^3 в уравнении (1), предположим, что это уравнение имеет формальное решение

$$u(x, t) = f'(\phi)\phi_x + u_0 \equiv f'\phi_x + u_0, \quad (2)$$

где штрих обозначает $d/d\phi$, а $f(\phi)$, $\phi(x, t)$ и $u_0 = u_0(x, t)$ — неизвестные функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\begin{aligned} u_t + h_2(t)u_x + h_1(t)(Au_{xx} + Bu^3 + Eu^2 + Du) = & (Af''' + Bf'^3)h_1\phi_x^3 + \\ & + 3Ah_1f''\phi_x\phi_{xx} + f''\phi_x\phi_t + 3Bh_1f'^2u_0\phi_x^2 + Eh_1f'^2\phi_x^2 + h_2f''\phi_x^2 + \\ & + (\phi_{xt} + Ah_1\phi_{xxx} + 3Bh_1u_0^2\phi_x + 2Eh_1u_0\phi_x + Dh_1\phi_x + h_2\phi_{xx})f' + \\ & + u_{0t} + h_2u_{0x} + h_1(Au_{0xx} + Bu_0^3 + Eu_0^2 + Du_0) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы определить функцию $f(\phi)$, положим коэффициент при ϕ_x^3 равным нулю и учтем, что $h_1(t) \neq 0$. Тогда получим уравнение

$$Af''' + Bf'^3 = 0, \quad (4)$$

имеющее частное решение

$$f = \mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}\ln\phi, \quad \mu = \pm 1, \quad A < 0, \quad B > 0, \quad (5)$$

которое будет полезно в дальнейшем. Из формулы (5) легко получить соотношение

$$f'^2 = -\mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}f''. \quad (6)$$

Подстановка равенств (5) и (6) в уравнение (3) дает

$$\begin{aligned} u_t + h_2(t)u_x + h_1(t)(Au_{xx} + Bu^3 + Eu^2 + Du) = & \\ = \phi_x \left[3Ah_1\phi_{xx} + \phi_t - \mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}(3Bh_1u_0\phi_x + Eh_1\phi_x) + h_2\phi_x \right] f'' + & \\ + (\phi_{xt} + Ah_1\phi_{xxx} + 3Bh_1u_0^2\phi_x + 2Eh_1u_0\phi_x + Dh_1\phi_x + h_2\phi_{xx})f' + & \\ + u_{0t} + h_2u_{0x} + h_1(Au_{0xx} + Bu_0^3 + Eu_0^2 + Du_0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при f'' , f' и оставшиеся слагаемые, получаем систему уравнений

$$3Ah_1\phi_{xx} + \phi_t - \mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}(3Bh_1u_0\phi_x + Eh_1\phi_x) + h_2\phi_x = 0, \quad (8)$$

$$\phi_{xt} + Ah_1\phi_{xxx} + 3Bh_1u_0^2\phi_x + 2Eh_1u_0\phi_x + Dh_1\phi_x + h_2\phi_{xx} = 0, \quad (9)$$

$$u_{0t} + h_2u_{0x} + h_1(Au_{0xx} + Bu_0^3 + Eu_0^2 + Du_0) = 0. \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует, что u_0 является решением уравнения (1). Поэтому, подставляя (5) в (2), получаем

$$u(x, t) = \mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi + u_0 = \mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}\frac{\phi_x}{\phi} + u_0. \quad (11)$$

С учетом (7)–(10) легко видеть, что если решения (ϕ, u_0) удовлетворяют уравнениям (8)–(10), то функция u , определяемая уравнением (11), удовлетворяет уравнению (1). Поэтому полученное преобразование (11) мы называем ПБ уравнения (1).

Полагая $\phi_x = \sigma$ в уравнении (9), получаем

$$\sigma_t + [h_2\partial + h_1(A\partial^2 + 3Bu_0^2 + 2Eu_0 + D)]\sigma = 0, \quad (12)$$

где $\partial = \partial/\partial x$, $\partial^2 = \partial^2/\partial x^2$. Из (12) видно, что σ является нелокальной симметрией уравнения (1).

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для того чтобы найти точные решения уравнения (1), рассмотрим ПБ (11). Если можно получить решения (ϕ, u_0) уравнений (8)–(10), то можно получить и соответствующее решение уравнения (1), используя ПБ (11). Поэтому мы сначала сведем уравнения (8)–(10) к уравнению, которое может быть решено с помощью какого-либо известного метода. Дифференцируя уравнение (8) по t и используя (9), получим линейное дифференциальное уравнение

$$2A\phi_{xxx} - \mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}(3Bu_0 + E)\phi_{xx} - \left(3Bu_0^2 + 2Eu_0 + D + 3B\mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}u_{0x}\right)\phi_x = 0.$$

Если положить $u_0 = \text{const}$, это уравнение можно записать как линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами,

$$2A\phi_{xxx} - \mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}(3Bu_0 + E)\phi_{xx} - (3Bu_0^2 + 2Eu_0 + D)\phi_x = 0. \quad (13)$$

Характеристическое уравнение для (13) имеет вид

$$2A\lambda^3 - \mu\sqrt{-\frac{2A}{B}}(3Bu_0 + E)\lambda^2 - (3Bu_0^2 + 2Eu_0 + D)\lambda = 0. \quad (14)$$

Теперь обсудим точные решения уравнения (1) для ряда случаев.

Случай 1. При $u_0 = 0$ и $D \neq 0$ уравнение (14) имеет три корня, а именно

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= -\sqrt{-\frac{1}{8AB}}(\mu E + \sqrt{E^2 - 4BD}), \\ \lambda_3 &= -\sqrt{-\frac{1}{8AB}}(\mu E - \sqrt{E^2 - 4BD}).\end{aligned}$$

Таким образом, решение уравнения (13) можно записать в виде

$$\phi(x, t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)e^{\lambda_2 x} + \alpha_3(t)e^{\lambda_3 x}. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (8) и (9) дает

$$\alpha_1'(t) + [\alpha_2'(t) - k_2(t)\alpha_2(t)]e^{\lambda_2 x} + [\alpha_3'(t) - k_3(t)\alpha_3(t)]e^{\lambda_3 x} = 0,$$

где

$$\begin{aligned}k_2(t) &= \frac{1}{4B}(E^2 - 6BD + \mu E \sqrt{E^2 - 4BD})h_1(t) + \sqrt{-\frac{1}{8AB}}(\mu E + \sqrt{E^2 - 4BD})h_2(t), \\ k_3(t) &= \frac{1}{4B}(E^2 - 6BD - \mu E \sqrt{E^2 - 4BD})h_1(t) + \sqrt{-\frac{1}{8AB}}(\mu E - \sqrt{E^2 - 4BD})h_2(t).\end{aligned}$$

Поскольку функции 1 , $e^{\lambda_2 x}$ и $e^{\lambda_3 x}$ линейно независимы, мы получаем систему уравнений

$$\alpha_1'(t) = 0, \quad \alpha_2'(t) - k_2(t)\alpha_2(t) = 0, \quad \alpha_3'(t) - k_3(t)\alpha_3(t) = 0,$$

имеющую общее решение

$$\alpha_1(t) = c_1, \quad \alpha_2(t) = c_2 \exp\left[\int k_2(t) dt\right], \quad \alpha_3(t) = c_3 \exp\left[\int k_3(t) dt\right], \quad (16)$$

где c_1 , c_2 и c_3 — произвольные постоянные. Из соотношений (11), (15) и (16) получаем следующее семейство решений уравнения (1):

$$u(x, t) = \mu \sqrt{-\frac{2A}{B}} \frac{c_2 \lambda_2 \exp[\lambda_2 x + \int k_2(t) dt] + c_3 \lambda_3 \exp[\lambda_3 x + \int k_3(t) dt]}{c_1 + c_2 \exp[\lambda_2 x + \int k_2(t) dt] + c_3 \exp[\lambda_3 x + \int k_3(t) dt]}. \quad (17)$$

Случай 2. При $u_0 = 0$ и $D = 0$ три корня уравнения (14) имеют вид

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}}.$$

Тогда общее решение уравнения (13) можно записать как

$$\phi(x, t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)x + \alpha_3(t) \exp\left(-\mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}}x\right). \quad (18)$$

Аналогично предыдущему случаю находим

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= c_1 \mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}} \int h_1 dt - \int h_2 dt, & \alpha_2(t) &= c_1, \\ \alpha_3(t) &= c_3 \exp \left[\frac{E^2}{2B} \int h_1(t) dt + \mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}} \int h_2(t) dt \right].\end{aligned}\quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (11), получим

$$u(x, t) = \mu \sqrt{-\frac{2A}{B}} \frac{c_1 - c_3 \mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}} \alpha_3(t) \exp \left(-\mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}} x \right)}{c_1 x + c_1 \mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}} \int h_1 dt - \int h_2 dt + c_3 \alpha_3(t) \exp \left(-\mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}} x \right)}.\quad (20)$$

Случай 3. При $u_0 = -E/B$ и $D = 0$ уравнение (14) имеет три корня

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}}.$$

Тогда решение уравнения (13) записывается в виде

$$\phi(x, t) = \alpha_1(t) + [\alpha_2(t) + \alpha_3(t)x] \exp \left(\mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}} x \right).\quad (21)$$

Как и в предыдущих случаях, имеем

$$\alpha_1(t) = c_1, \quad \alpha_2(t) = \int k_2(t) dt \exp \left\{ \int k_3(t) dt \right\}, \quad \alpha_3(t) = c_3 \exp \left\{ \int k_3(t) dt \right\},\quad (22)$$

где

$$k_2(t) = \mu E \sqrt{-\frac{2A}{B}} h_1(t) - h_2(t)$$

и

$$k_3(t) = -\frac{E^2}{2B} h_1(t) - \mu E \sqrt{-\frac{1}{2AB}} h_2(t).$$

Обозначим $\mu E \sqrt{-1/2AB} = M$. С учетом формул (11), (21) и (22) решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(x, t) = \mu \sqrt{-\frac{2A}{B}} \frac{[c_3 + M \left(\int k_2(t) dt + c_3 x \right)] \exp [Mx + \int k_3 dt]}{c_1 + \left(\int k_2(t) dt + c_3 x \right) \exp [Mx + \int k_3 dt]} - \frac{E}{B}.\quad (23)$$

Случай 4. При

$$u_0 = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4BD}}{2B}, \quad E^2 - 4BD > 0,$$

можно аналогично описанному выше вывести точное решение уравнения (1) вида

$$u = \mu \sqrt{-\frac{2A}{B}} \frac{c_2 \lambda_2 \exp[\lambda_2 x + \int k_2(t) dt] + c_3 \lambda_3 \exp[\lambda_3 x + \int k_3(t) dt]}{c_1 + c_2 \exp[\lambda_2 x + \int k_2(t) dt] + c_3 \exp[\lambda_3 x + \int k_3(t) dt]} + \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4BD}}{2B}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \mp \mu \sqrt{-\frac{1}{2AB}(E^2 - 4BD)}, \quad \lambda_3 = \frac{\mu}{2} \sqrt{-\frac{1}{2AB}(E \mp \sqrt{E^2 - 4BD})}, \\ k_2(t) &= \pm \left[\frac{E}{2B} \sqrt{E^2 - 4BD} h_1(t) + \mu \sqrt{-\frac{1}{2AB}(E^2 - 4BD)} h_2(t) \right], \\ k_3(t) &= \frac{-E^2 + 6BD \pm E \sqrt{E^2 - 4BD}}{4B} h_1(t) + \frac{\mu}{2} \sqrt{-\frac{1}{2AB}(-E \pm \sqrt{E^2 - 4BD})} h_2(t). \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы нашли несколько типов явных точных решений уравнения (1). Полученные результаты могут быть полезны для решения некоторых физических задач. Известно, что уравнение Ньюэлла–Уайтхеда, уравнение Фитцхью–Нагумо, уравнение Чаффи–Инфанте, уравнение КПП и уравнение Хаксли представляют собой частные случаи уравнения (1).

При $h_1(t) = 1$, $h_2(t) = 0$, $A = -1$, $B = \beta$, $E = 0$, $D = -\beta$ уравнение (1) сводится к уравнению Чаффи–Инфанте [8]–[10],

$$u_t - u_{xx} + \beta u^3 - \beta u = 0.$$

С помощью (17) и (24) можно получить два двухсолитонных решения,

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \mu \frac{-c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\beta}{2}}x + \frac{3\beta}{2}t\right) + c_3 \exp\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}x + \frac{3\beta}{2}t\right)}{c_1 + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\beta}{2}}x + \frac{3\beta}{2}t\right) + c_3 \exp\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}x + \frac{3\beta}{2}t\right)}, \\ u_2(x, t) = \mu \frac{\pm 2c_2 \exp(\pm \sqrt{2\beta}x) \pm c_3 \exp\left(\pm \sqrt{\frac{\beta}{2}}x - \frac{3\beta}{2}t\right)}{c_1 + c_2 \exp(\pm \sqrt{2\beta}x) + c_3 \exp\left(\pm \sqrt{\frac{\beta}{2}}x - \frac{3\beta}{2}t\right)} \pm 1. \end{cases}$$

Необходимо специально отметить, что решение $u_1(x, t)$ не появлялось в работе [8].

Кроме того, можно получить четыре односолитонных решения уравнения (1),

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \frac{1}{2}\mu \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{2}}x \mp \frac{3\beta}{4}t + c_0\right) + \frac{1}{2}\mu \pm 1, \\ u_2(x, t) = \frac{1}{2}\mu \operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{2}}x \mp \frac{3\beta}{4}t + c_0\right) + \frac{1}{2}\mu \pm 1, \\ u_3(x, t) = \mu \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}x + c_0\right) + \mu \pm 1, \\ u_4(x, t) = \mu \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}x + c_0\right) + \mu \pm 1. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим уравнение Фитцхью–Нагумо [5]–[7], [11], [13], имеющее вид

$$H_t - \frac{1}{2}H_{xx} + (\alpha - H)(1 - H^2) = 0, \quad -1 < \alpha < 0. \quad (25)$$

Если $H(x, t) = \alpha - u$, то уравнение (25) относится к частному случаю уравнения (1). Поэтому мы также можем найти новые точные решения, включающие солитонные решения. Здесь мы их приводить не будем.

Благодарности. Женья Ян глубоко признателен анонимному рецензенту за ценные советы и поправки, учтенные в переработанном варианте статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке Национального Естественно-научного фонда Китая (грант № 10072013), NKBRSF (грант № G1998030600) и Докторского фонда высшей школы (грант № 98014119).

Список литературы

- [1] *M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson.* Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [2] *Soliton Theory and its Applications.* Ed. C. H. Gu. Berlin: Springer, 1995.
- [3] *Z. Y. Yan, H. Q. Zhang.* Phys. Lett. A. 1999. V. 252. P. 291–296.
- [4] *Z. Y. Yan, H. Q. Zhang.* Phys. Lett. A. 2001. V. 285. P. 355–362.
- [5] *Z. Y. Yan, H. Q. Zhang.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 1785–1794.
- [6] *Backlund Transformation, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications.* Lect. Notes in Math. V. 515. Ed. M. R. Miura. Berlin: Springer, 1976.
- [7] *Z. Y. Yan, H. Q. Zhang.* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 1999. V. 4(2). P. 145–149.
- [8] *E. G. Fan, H. Q. Zhang.* Acta Physics Sinica. 1997. V. 46(7). P. 1254–1259.
- [9] *P. Constantin et al.* Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations. New York: Springer, 1989.
- [10] *G. Eilenberger.* Solitons-Mathematical Methods for Physicist. New York: Springer, 1981.
- [11] *M. L. Wang.* Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 279–287.
- [12] *Z. Y. Yan.* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2000. V. 5(1). P. 31–35.
- [13] *Z. Y. Yan, H. Q. Zhang.* Acta Physics Sinica (Overseas Edition). 1999. V. 8(12). P. 889–894.

Поступила в редакцию 16.XI.2001 г.,
после доработки 21.I.2002 г.