Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси,
ТМФ, 2002, том 132, номер 1, 97–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:18:15

© 2002 г.

Р. Р. Гадильшин*

О ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ОСИ

Приведены необходимые и достаточные условия существования собственных значений оператора Шредингера на оси при малых и локальных возмущениях. В случае, когда собственные значения имеются, построены их асимптотики.

Ключевые слова: оператор Шредингера, возмущение, собственное значение, асимптотика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для оператора Шредингера с малым потенциалом на оси вопросы существования связанных состояний и асимптотик соответствующих собственных значений (в случае их существования) исследовались в работах [1]–[4]. Используемая в этих статьях техника доказательств опиралась на самосопряженность возмущенного уравнения. В настоящей работе рассмотрено малое возмущение, которое представляет собой произвольный локализованный оператор второго порядка, и приведены необходимые и достаточные условия существования собственных значений у возмущенного оператора. В случае, когда собственные значения имеются, построены их асимптотики. Суть предлагаемого подхода, дающего простое объяснение “нерегулярного” (необязательного) появления собственных значений при регулярном возмущении, состоит в следующем. Вместо спектрального параметра λ вводится более естественный частотный параметр k , связанный со спектральным равенством $\lambda = -k^2$, где k лежит в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} k > 0$. Решения как невозмущенного, так и возмущенного уравнений продолжаются по частотному параметру во всю комплексную плоскость. При таком продолжении решение невозмущенного уравнения имеет полюс в нуле, который при возмущении сдвигается, а вычет в этом полюсе (как для возмущенной, так и для невозмущенной задачи) является решением соответствующего однородного уравнения. Для невозмущенной задачи этот вычет есть константа, которая рассматривается как экспонента с показателем $-kx$, где $k = 0$. В зависимости от того, в какую сторону полюс сдвигается, происходит экспоненциальное убывание или возрастание вычета для возмущенной

*Башкирский государственный педагогический университет, Уфа, Россия.
E-mail: gadylshin@bspu.ru

задачи. В результате при сдвиге полюса в полуплоскость $\operatorname{Re} k > 0$ собственное значение появляется, а при сдвиге в полуплоскость $\operatorname{Re} k \leq 0$ оно не существует. Направление же сдвига зависит от оператора возмущения.

Структура работы следующая. В разделе 2 дается формулировка основного утверждения, а в разделе 3 – его доказательство. В разделе 4 приведены примеры, иллюстрирующие основное утверждение работы.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $W_{2,\text{loc}}^j(\mathbb{R})$ – множество функций, определенных в пространстве $\mathbb{R}$, сужение которых на любое ограниченное множество $D \subset \mathbb{R}$ принадлежит $W_2^j(D)$, $\|\cdot\|_G$ и $\|\cdot\|_{j,G}$ – нормы в $L_2(G)$ и $W_2^j(G)$, соответственно. Далее, пусть Q – произвольный фиксированный интервал в $\mathbb{R}$, $L_2(\mathbb{R}; Q)$ – подмножество функций из $L_2(\mathbb{R})$ с носителями из $\overline{Q}$, $\mathcal{L}_\varepsilon$ – линейные операторы из $W_{2,\text{loc}}^j(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R}; Q)$ такие, что $\|\mathcal{L}_\varepsilon[u]\|_Q \leq C(\mathcal{L})\|u\|_{2,Q}$, где постоянная $C(\mathcal{L})$ не зависит от ε , $0 < \varepsilon \ll 1$,

$$\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g dx, \quad H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad H_\varepsilon = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon\right).$$

Определим линейные операторы $A(k): L_2(\mathbb{R}; Q) \rightarrow W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ и $T_\varepsilon^{(0)}(k): L_2(\mathbb{R}; Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}; Q)$ следующим образом:

$$A(k)g = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|x-t|} g(t) dt, \quad T_\varepsilon^{(0)}(k)g = \mathcal{L}_\varepsilon[A(k)g] + \frac{\langle g \rangle}{2k} \mathcal{L}_\varepsilon[1].$$

Обозначим через $\mathcal{B}(X, Y)$ банахово пространство линейных ограниченных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y , $\mathcal{B}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}(X, Y)$, через $\mathcal{B}^h(X, Y)$ и $\mathcal{B}^h(X)$ – множества голоморфных операторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}(X, Y)$ и $\mathcal{B}(X)$, соответственно, через I – тождественный оператор, а через S^t – круг радиуса t в $\mathbb{C}$ с центром в нуле. Так как из определения $T_\varepsilon^{(0)}(k)$ следует, что $T_\varepsilon^{(0)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(\mathbb{R}; Q))$,

$$T_\varepsilon^{(0)}(k)g = \frac{1}{2} \mathcal{L}_\varepsilon \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) |x-t| dt \right] + k T_\varepsilon^{(1)}(k)g, \quad T_\varepsilon^{(1)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(\mathbb{R}; Q)),$$

то справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $S_\varepsilon(k) = (I + \varepsilon T_\varepsilon^{(0)}(k))^{-1}$. Тогда для любого $R > 0$ существует $\varepsilon_0(R) > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0(R)$ и $k \in S^R$ операторнозначная функция $S_\varepsilon(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(\mathbb{R}; Q))$, $S_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I$ равномерно по k , а уравнение

$$k - \frac{\varepsilon}{2} \langle S_\varepsilon(k) \mathcal{L}_\varepsilon[1] \rangle = 0 \tag{2.1}$$

имеет единственное решение $k_\varepsilon \in S^R$, причем

$$k_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} (m_\varepsilon^{(1)} + \varepsilon m_\varepsilon^{(2)} + O(\varepsilon^2)), \tag{2.2}$$

где

$$m_\varepsilon^{(1)} = \langle \mathcal{L}_\varepsilon[1] \rangle, \quad m_\varepsilon^{(2)} = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_\varepsilon \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x-y| \mathcal{L}_\varepsilon[1](y) dy \right] (x) dx. \quad (2.3)$$

Будем называть оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ вещественным, если $\text{Im} \langle \bar{g} \mathcal{L}_\varepsilon[g] \rangle = 0$ для любого $g \in W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$. Обозначим $\Pi_s(t) = \{k : |\text{Im } k| < sC(\mathcal{L}), \text{Re } k > t\}$, а через $\Sigma(H_\varepsilon)$ обозначим множество собственных значений оператора H_ε . Целью работы является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\text{Re } k_\varepsilon \leq 0$, то существует $t(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$ такое, что $\Sigma(H_\varepsilon) \subset \Pi_\varepsilon(t(\varepsilon))$. Если к тому же оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ вещественный, то $\Sigma(H_\varepsilon) \subset (t(\varepsilon), \infty)$.*

Если $\text{Re } k_\varepsilon > 0$, то существует $t(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$ такое, что $\Sigma(H_\varepsilon) \setminus \Pi_\varepsilon(t(\varepsilon)) = \{\lambda_\varepsilon\}$,

$$\lambda_\varepsilon = -k_\varepsilon^2, \quad (2.4)$$

а соответствующая единственная собственная функция ϕ_ε имеет вид

$$\phi_\varepsilon = A(k_\varepsilon) S_\varepsilon(k_\varepsilon) \mathcal{L}_\varepsilon[1]. \quad (2.5)$$

Если к тому же оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ вещественный, то $\Sigma(H_\varepsilon) \setminus (t(\varepsilon), \infty) = \{\lambda_\varepsilon\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждения теоремы 1 не исключают ситуации, когда $\text{Re } k_\varepsilon \leq 0$ при одних значениях ε и $\text{Re } k_\varepsilon > 0$ при других значениях ε (см. ниже пример 3).

Непосредственно из леммы 1 (а именно, из уравнения (2.1)) и теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Если $\mathcal{L}_\varepsilon[1] \equiv 0$, то существует $t(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$ такое, что $\Sigma(H_\varepsilon) \subset \Pi_\varepsilon(t(\varepsilon))$. Если к тому же оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ вещественный, то $\Sigma(H_\varepsilon) \subset (t(\varepsilon), \infty)$.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим через $\mathcal{B}^m(X, Y)$ и $\mathcal{B}^m(X)$ множества мероморфных операторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}(X, Y)$ и $\mathcal{B}(X)$, соответственно. Множество линейных операторов из банахова пространства X в $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ таких, что их сужение на любое ограниченное множество D принадлежит $\mathcal{B}(X, W_2^2(D))$, обозначим через $\mathcal{B}(X, W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}))$. Аналогично через $\mathcal{B}^h(X, W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}))$ и $\mathcal{B}^m(X, W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}))$ обозначим множества операторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}(X, W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}))$ таких, что для любого ограниченного D они принадлежат $\mathcal{B}^h(X, W_2^2(D))$ и $\mathcal{B}^m(X, W_2^2(D))$, соответственно. Далее, пусть $P_\varepsilon(k)$ – оператор, определяемый равенством

$$P_\varepsilon(k)f = \varepsilon \frac{\langle S_\varepsilon(k)f \rangle S_\varepsilon(k) \mathcal{L}_\varepsilon[1]}{2k - \varepsilon \langle S_\varepsilon(k) \mathcal{L}_\varepsilon[1] \rangle} + S_\varepsilon(k)f,$$

$$\mathcal{R}_\varepsilon(k) \stackrel{\text{def}}{=} A(k)P_\varepsilon(k), \quad \mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{z : \text{Re } z > 0\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого $R > 0$ существует $\varepsilon_0(k) > 0$ такое, что:

- 1) $\mathcal{R}_\varepsilon(k) \in \mathcal{B}^m(L_2(\mathbb{R}; Q), W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}))$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $k \in S^R$, причем в S^R лежит единственный полюс k_ε , который является решением уравнения (2.1) и имеет первый порядок; если к тому же $k \in \mathbb{C}_+$, то $\mathcal{R}_\varepsilon(k) \in \mathcal{B}^m(L_2(\mathbb{R}; Q), W_2^2(\mathbb{R}))$;
- 2) для любого $f \in L_2(\mathbb{R}; Q)$ функция $u_\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon(k)f$ является решением уравнения

$$-H_\varepsilon u_\varepsilon = k^2 u_\varepsilon + f \quad \text{в } \mathbb{R}; \quad (3.1)$$

- 3) вычет функции u_ε в полюсе k_ε определяется равенством (2.5) с точностью до скалярного множителя, причем этот множитель не равен нулю, если $\langle f \rangle \neq 0$.

ЛОКАТЕЛЬНОСТЬ. По определению $A(k) \in \mathcal{B}^m(L_2(\mathbb{R}; Q), W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}))$, причем $A(k)$ имеет единственный полюс первого порядка в нуле и $A(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(\mathbb{R}; Q), W_2^2(\mathbb{R}))$ при $k \in \mathbb{C}_+$. Тогда, принимая во внимание определение $\mathcal{R}_\varepsilon(k)$ и лемму 1, получаем последовательно отсутствие полюса в нуле у $\mathcal{R}_\varepsilon(k)$ и справедливость утверждений 1.

Покажем справедливость утверждения 2. Решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$u_\varepsilon = A(k)g_\varepsilon, \quad (3.2)$$

где g_ε — пока неизвестная функция из $L_2(\mathbb{R}; Q)$. Подставляя (3.2) в (3.1), получаем, что выражение (3.2) является решением (3.1) в случае, когда

$$(I + \varepsilon T_\varepsilon(k))g_\varepsilon = f, \quad (3.3)$$

где

$$T_\varepsilon(k) = \mathcal{L}_\varepsilon A(k). \quad (3.4)$$

Из (3.4) и определений $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $A(k)$ следует, что оператор $T_\varepsilon(k)$ действует следующим образом:

$$T_\varepsilon(k)g = -\frac{\langle g \rangle}{2k} \mathcal{L}_\varepsilon[1] + T_\varepsilon^{(0)}(k)g. \quad (3.5)$$

Пусть $R > 0$ — произвольное число и ε удовлетворяет утверждению леммы 1. Подействовав на обе части равенства (3.3) оператором $S_\varepsilon(k)$ и приняв во внимание (3.5), получаем

$$\left(g_\varepsilon - \varepsilon \frac{\langle g_\varepsilon \rangle}{2k} S_\varepsilon(k) \mathcal{L}_\varepsilon[1] \right) = S_\varepsilon(k)f, \quad (3.6)$$

что после интегрирования дает

$$\langle g_\varepsilon \rangle \left(1 - \frac{\varepsilon}{2k} \langle S_\varepsilon(k) \mathcal{L}_\varepsilon[1] \rangle \right) = \langle S_\varepsilon(k)f \rangle. \quad (3.7)$$

Определяя из (3.7) $\langle g_\varepsilon \rangle$ и подставляя это значение в (3.6), получаем

$$g_\varepsilon = P_\varepsilon(k)f. \quad (3.8)$$

Из (3.2) и (3.8) следует справедливость утверждения 2. В свою очередь, справедливость утверждения 3 вытекает из утверждений 1 и 2 и определения $\mathcal{R}_\varepsilon(k)$. Теорема доказана.

Обозначим через $R_\varepsilon(\lambda)$ резольвенту оператора H_ε . Хорошо известно, что множество собственных значений совпадает с множеством полюсов резольвенты, а коэффициент в этом полюсе (при наибольшем порядке) является проектором на пространство, натянутое на собственные функции, соответствующие данному собственному значению.

ЛЕММА 2. Число полюсов резольвенты $R_\varepsilon(\lambda)$, их порядки и размерности вычетов в них полностью определяются функциями из $L_2(\mathbb{R}; Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — произвольная функция с финитным носителем D . Не ограничивая общности, будем считать, что $\{0\} \in Q$. Обозначим через $R_+(\lambda)$ и $R_-(\lambda)$ резольвенты задач Дирихле для H_0 на положительной $\mathbb{R}^+$ и отрицательной $\mathbb{R}^-$ вещественных полуосях, соответственно, через F_+ и F_- — сужения F на эти оси, а через $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — обрезающую функцию, тождественно равную нулю в окрестности нуля и единице вне Q . Обозначим через $\mathbb{R}_+$ неотрицательную мнимую полуось и положим $\mathbb{C}^+ = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+$. Так как функция $\lambda = -k^2$ осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathbb{C}^+$ на $\mathbb{C}$, то при $\lambda \in \mathbb{C}$ (или, что то же самое, при $k \in \mathbb{C}^+$)

$$R_\pm(\lambda)F_\pm(x) = R_\pm(-k^2)F_\pm(x) = \pm \frac{1}{2k} \int_0^{\pm\infty} (e^{-k|x-t|} - e^{-k|x+t|})F(t) dt.$$

С другой стороны, функции

$$U_\pm(x; k) = \pm \frac{1}{2k} \int_0^{\pm\infty} (e^{-k|x-t|} - e^{-k|x+t|})F(t) dt$$

являются голоморфными функциями в $\mathbb{C}$ со значениями в $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^\pm)$ (т.е. их сужения на любое ограниченное множество G являются голоморфными функциями со значениями в $W_{2,\text{loc}}^2(G)$). Поэтому функция $\chi(R_+(-k^2)F_+ + R_-(-k^2)F_-)$ допускает продолжение в $\mathbb{C}$ как голоморфная функция со значениями в $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$. Решение уравнения

$$(H_\varepsilon - \lambda)U = F \quad \text{в } \mathbb{R} \quad (3.9)$$

будем искать в виде

$$U = u + \chi(R_+(-k^2)F_+ + R_-(-k^2)F_-), \quad (3.10)$$

где $-k^2 = \lambda$, $k \in \mathbb{C}^+$. Подставляя (3.10) в (3.9), получаем уравнение $(H_\varepsilon - \lambda)u = f$, где функция $f(x; \lambda) = f(x; -k^2)$ допускает продолжение по k в $\mathbb{C}$, которое является голоморфной функцией со значениями в $L_2(\mathbb{R}; Q)$. Так как и второе слагаемое в правой части (3.10) допускает голоморфное продолжение в $\mathbb{C}$, то, следовательно, утверждение леммы справедливо.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $R > 0$ — произвольное число, ε_0 и k_ε удовлетворяют условиям теоремы 2, $\lambda = -k^2$. Тогда

$$\mathcal{R}_\varepsilon(k)f = -R_\varepsilon(\lambda)f \quad (3.11)$$

для любого $f \in L_2(\mathbb{R}; Q)$ и любого $k \in \mathbb{C}_+ \cap S^R$ (или, что то же самое, для любого $\lambda \in S^{R^2}$).

Если $\text{Re } k_\varepsilon \leq 0$, то $\Sigma(H_\varepsilon) \cap S^{R^2} = \emptyset$.

Если $\text{Re } k_\varepsilon > 0$, то $\Sigma(H_\varepsilon) \cap S^{R^2} = \{\lambda_\varepsilon\}$, где λ_ε и соответствующая единственная собственная функция определяются равенствами (2.4) и (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $\lambda = -k^2$ осуществляет взаимнооднозначное отображение $\mathbb{C}^+ \cap S^R$ на S^{R^2} , то справедливость равенства (3.11) вытекает из утверждения 2 теоремы 2 и определения резольвенты. Справедливость остальных утверждений теоремы следует из теоремы 2 и леммы 2. Теорема доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\Sigma(H_\varepsilon) \subset \Pi_\varepsilon(-\varepsilon C(\mathcal{L}))$. Если $\mathcal{L}_\varepsilon$ – вещественный оператор, то $\Sigma(H_\varepsilon) \subset [-\varepsilon C(\mathcal{L}), \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\lambda_\varepsilon \in \Sigma(H_\varepsilon) \setminus \mathbb{R}_+. \quad (3.12)$$

Так как $H_\varepsilon u = H_0 u$ вне $\overline{Q}$, то существует нормированная в $L_2(\mathbb{R})$ функция $\phi_\varepsilon \in W_2^2(\mathbb{R})$ такая, что

$$H_\varepsilon \phi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \phi_\varepsilon. \quad (3.13)$$

Умножая обе части (3.13) на $\bar{\phi}_\varepsilon$ и интегрируя по частям, получаем равенство

$$\|\phi'_\varepsilon\|_{\mathbb{R}}^2 - \varepsilon \langle \bar{\phi}_\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \phi_\varepsilon \rangle = \lambda_\varepsilon. \quad (3.14)$$

Взяв мнимую и реальную части от (3.14), используя оценку $\|\mathcal{L}_\varepsilon \phi_\varepsilon\|_Q \leq C(\mathcal{L})\|\phi_\varepsilon\|_{2,Q}$ и учитывая (3.12), получаем утверждение леммы.

Легко видеть, что теорема 1 является прямым следствием теоремы 3 и леммы 3.

4. ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon[g] = Vg$, где $V \in C_0^\infty(Q)$. Тогда в силу (2.2), (2.3) и теоремы 1 получаем, что если $\operatorname{Re}\langle V \rangle < 0$, то $\operatorname{Re} k_\varepsilon < 0$ и, следовательно, у H_ε собственного значения, сходящегося к нулю, не существует, а если $\operatorname{Re}\langle V \rangle > 0$, то такое собственное значение есть и оно имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{\langle V \rangle}{4} + O(\varepsilon^3). \quad (4.1)$$

В случае же, когда $\langle V \rangle = 0$, с учетом того, что (в этом случае)

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y| V(x)V(y) dy dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^x V(y) dy \right)^2 dx, \quad (4.2)$$

в силу (2.3) получаем

$$m_\varepsilon^{(1)} = \langle V \rangle = 0, \quad m_\varepsilon^{(2)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^x V(y) dy \right)^2 dx. \quad (4.3)$$

Если к тому же $\operatorname{Im} V = 0$, то в силу (4.1), (4.3) и теоремы 1 собственное значение существует и имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = -\varepsilon^4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^x V(y) dy \right)^2 dx \right)^2 + O(\varepsilon^5). \quad (4.4)$$

Для вещественных V асимптотики (4.1), (4.4) построены в работе [1]. Таким образом, асимптотика (4.1) является обобщением на случай комплекснозначных потенциалов. Заметим только, что для вещественных V неравенство $\langle V \rangle \geq 0$ является необходимым и достаточным условием существования собственного значения у H_ε (что и было доказано в [1]). Однако если V – комплекснозначная функция, то условие $\langle V \rangle = 0$ не является достаточным для существования собственного значения. Действительно, легко видеть, что если $V = u' + i2u'$, где $u \in C_0^\infty(Q)$ – вещественная функция, то

$$m_\varepsilon^{(1)} = \langle V \rangle = 0, \quad \operatorname{Re} m_\varepsilon^{(2)} = -6 \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx < 0,$$

и в силу (2.2) и теоремы 1 собственное значение у H_ε отсутствует.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon[g] = V_\varepsilon g$, где $V_\varepsilon = V + \varepsilon V_1$, а V, V_1 – вещественные функции с носителями в Q . В силу (2.2), (2.3), (4.2) и теоремы 1 условие $\langle V_\varepsilon \rangle \geq 0$ является достаточным условием существования собственного значения, которое имеет асимптотику (4.1) при $\langle V \rangle > 0$ и асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = -\varepsilon^4 \left(\frac{1}{2} \langle V_1 \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^x V(y) dy \right)^2 dx \right)^2 + O(\varepsilon^5),$$

если $\langle V \rangle = 0$. Однако в отличие от классического случая (вещественного $V_\varepsilon = V$) условие $\langle V_\varepsilon \rangle < 0$ не является достаточным для отсутствия собственного значения. Действительно, если $Q = (-\pi/2, \pi/2)$, а $V_\varepsilon = \sin x - \varepsilon \cos x$, то в силу (2.2), (2.3) $\langle V_\varepsilon \rangle = -2 < 0$, но $k_\varepsilon = \varepsilon^2(\pi - 2)/2 + O(\varepsilon^3)$. Следовательно, в силу теоремы 1 собственное значение существует.

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon[g] = e^{i\varepsilon^{-1}} V g$, где $V \in C_0^\infty(Q)$ – вещественная функция и $\langle V \rangle > 0$. Тогда в силу (2.2), (2.3) и теоремы 1 получаем, что для достаточно больших n и любого $0 < \delta < \pi/2$ при $(3\pi/2 - \delta + 2\pi n)^{-1} < \varepsilon < (\pi/2 + \delta + 2\pi n)^{-1}$ собственные значения отсутствуют, а при $(\pi/2 - \delta + 2\pi n)^{-1} < \varepsilon < (-\pi/2 + \delta + 2\pi n)^{-1}$ собственное значение существует и имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = - \left(\varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{4} \langle V \rangle^2 + O(\varepsilon^3).$$

ПРИМЕР 4. Пусть

$$\mathcal{L}_\varepsilon = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + V_\varepsilon,$$

где $a_j, V_\varepsilon \in C_0^\infty(Q)$. Так как $\mathcal{L}_\varepsilon[1] = V_\varepsilon$, то в случае $V_\varepsilon \equiv 0$ собственное значение отсутствует в силу следствия теоремы 1, а из равенства $\langle \mathcal{L}_\varepsilon[1] \rangle = \langle V_\varepsilon \rangle$ следует, что

- 1) если $V_\varepsilon = V$ и $\operatorname{Re} V \neq 0$, то k_ε имеет асимптотики, полученные в примере 1;
- 2) если $V_\varepsilon = e^{i\varepsilon^{-1}} V$ и $\langle V \rangle > 0$, то k_ε имеет асимптотики, полученные в примере 3.

ПРИМЕР 5. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon[g] = \varkappa(Q)\langle\rho g\rangle$, где $\rho \in C_0^\infty(Q)$, а $\varkappa(Q)$ – характеристическая функция Q (т.е. функция, равная единице при $x \in Q$ и нулю для остальных x). Тогда в силу (2.2), (2.3), теоремы 1 и ее следствия собственное значение отсутствует, если $\langle\rho\rangle = 0$ или $\operatorname{Re}\langle\rho\rangle < 0$, и собственное значение существует и имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{1}{4} (|Q|\langle\rho\rangle)^2 + O(\varepsilon^3), \quad (4.5)$$

если $\operatorname{Re}\langle\rho\rangle > 0$.

ПРИМЕР 6. Пусть

$$\mathcal{L}_\varepsilon[g] = \varkappa(Q) \int_{-\infty}^x \rho(t)g(t) dt,$$

где $\rho \in C_0^\infty(Q)$. Тогда в силу (2.2), (2.3)

$$k_\varepsilon = \varepsilon \frac{1}{2} (|Q|\langle\rho\rangle - \langle x\rho\rangle) + O(\varepsilon^2), \quad (4.6)$$

и, следовательно, собственное значение существует, если $(|Q|\langle\rho\rangle - \langle x\rho\rangle) > 0$, и отсутствует, если $(|Q|\langle\rho\rangle - \langle x\rho\rangle) < 0$. В частности, если ρ – четная функция и $\langle\rho\rangle > 0$, то в силу (2.4) и (4.6) собственное значение имеет асимптотику (4.5).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 02-01-00693, 00-15-96038) и Министерства образования РФ (Е00-1.0-53).

Список литературы

- [1] *B. Simon.* Ann. Phys. 1976. V. 97. P. 279.
- [2] *M. Klaus.* Ann. Phys. 1977. V. 108. P. 288.
- [3] *R. Blankenbecler, M. L. Goldberger, B. Simon.* Ann. Phys. 1977. V. 108. P. 69.
- [4] *M. Klaus, B. Simon.* Ann. Phys. 1980. V. 130. P. 251.

Поступила в редакцию 25.X.2001 г.