Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Зиновьев, Трёхмерная $\mathbb{Z}_2$ -электродинамика и двумерная модель Изинга,
ТМФ, 2002, том 132, номер 1, 126–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:43:41

ТРЕХМЕРНАЯ $\mathbb{Z}_2$ -ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ИЗИНГА

Для частных значений энергий взаимодействия вычислены корреляционные функции трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики со свободными граничными условиями.

Ключевые слова: статистическая сумма, корреляционная функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Онзагер [1] нашел статистическую сумму двумерной модели Изинга. Другой метод ее вычисления был предложен Кацем и Уордом [2]. Эти авторы рассматривали одновременно две формулы для определителя специальной матрицы $I + T$ (I – единичная матрица). По первой формуле этот определитель пропорционален статистической сумме двумерной модели Изинга, по второй – квадрату статистической суммы. Для доказательства первой формулы Кац и Уорд использовали некоторое топологическое утверждение. Шерман [3], [4] построил контрпример к этому утверждению и привел аргументы в пользу выполнимости формулы

$$Z^2 = C(\beta) \det(I + T), \quad (1.1)$$

где Z – статистическая сумма двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями и $C(\beta)$ – положительная функция обратной температуры β . В работе [5] была доказана формула

$$Z^2 = C(\beta) \det(I - T) \quad (1.2)$$

для произвольной решетки, лежащей на плоскости. Для прямоугольной решетки выражение (1.2) не зависит от знака матрицы T . Для произвольной решетки формула (1.1) неверна. В работе [6] свободная энергия и корреляционные функции двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями были вычислены с помощью формулы (1.2).

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

В данной работе изучается связь между трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамикой и двумерной моделью Изинга. Рассмотрим конечную трехмерную кубическую решетку. Вершины этой решетки задаются векторами $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, где p_i ($i = 1, 2, 3$) – натуральные числа. Неориентированное ребро этой решетки задается парой $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$, где $\mathbf{p}$ – начальная вершина ребра, единичный вектор $\mathbf{e}$ определяет направление ребра и является одним из шести векторов $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Поскольку ребро неориентированно, то $\{\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e}\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$. Неориентированная грань этой решетки задается тройкой $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, где $\mathbf{p}$ – начальная вершина грани и единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, ортогональные друг другу, выбраны из шести единичных векторов $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Поскольку грань неориентированна, то $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$. Обозначим через $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ группу вычетов по модулю 2. Вычеты по модулю 2 можно умножать друг на друга, и группа $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ образует поле. Рассмотрим функцию $A(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})$ на неориентированных ребрах, принимающую значения в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$. Энергия $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики задается формулой

$$H(A) = - \sum_{\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}} E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) \times \\ \times (-1)^{A(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1\}) + A(\{\mathbf{p} + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) + A(\{\mathbf{p} + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}) + A(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_2\})}, \quad (1.3)$$

где суммирование идет по всем неориентированным граням решетки. Число $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})$ называется энергией взаимодействия, соответствующей неориентированной грани $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Для бесконечной энергии взаимодействия энергия (1.3) также бесконечна. Однако можно рассматривать бесконечные значения энергий взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})$ для корреляционных функций и для величины

$$\left(\prod_{\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}} \text{ch } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) \right)^{-1} \sum_A \exp\{-\beta H(A)\}, \quad (1.4)$$

где произведение берется по всем неориентированным граням решетки, а суммирование идет по всем $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ -значным функциям на неориентированных ребрах решетки. Мы покажем, что для энергий взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$, равных $+\infty$ (или $-\infty$), корреляционные функции и величина (1.4) для $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики выражаются через корреляционные функции и статистическую сумму двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями.

Во втором разделе приведены определения статистической суммы и корреляционных функций трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики со свободными граничными условиями. Эти величины вычислены для энергий взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = 0$. Третий раздел посвящен изучению связи между величиной (1.4) для энергий взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = \pm\infty$ и статистической суммой двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями. В четвертом разделе изучается связь между корреляционными функциями трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики с энергиями взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = \pm\infty$ и корреляционными функциями двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями.

2. $\mathbb{Z}_2$ -ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Рассмотрим прямоугольную решетку, образованную вершинами с целыми декартовыми координатами $x = k_1$, $y = k_2$, $z = k_3$, $M'_i \leq k_i \leq M_i$, $i = 1, 2, 3$, и соответствующими ребрами, соединяющими соседние вершины. Обозначим этот граф через $G_3 = G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$. Клеточным комплексом $P(G_3)$ называется множество, состоящее из клеток (вершин, ребер, граней, кубов). Вершину комплекса $P(G_3)$ назовем клеткой размерности нуль и обозначим через s_i^0 . Ребро комплекса $P(G_3)$ назовем клеткой размерности 1 и обозначим через s_i^1 . Грань комплекса $P(G_3)$ назовем клеткой размерности 2 и обозначим через s_i^2 . Куб комплекса $P(G_3)$ назовем клеткой размерности 3 и обозначим через s_i^3 . Любой паре клеток s_i^p, s_j^{p-1} соответствует число $(s_i^p : s_j^{p-1}) \in \mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ (число инцидентности). Если клетка s_j^{p-1} включается в границу клетки s_i^p , то число инцидентности $(s_i^p : s_j^{p-1}) = 1$. В противном случае число инцидентности $(s_i^p : s_j^{p-1}) = 0$. Для любой пары клеток s_i^{p+2}, s_j^p числа инцидентности удовлетворяют условию

$$\sum_m (s_i^{p+2} : s_m^{p+1})(s_m^{p+1} : s_j^p) = 0 \pmod{2}. \quad (2.1)$$

В самом деле, если вершина s_j^0 не входит в границу квадрата s_i^2 , то условие (2.1) выполнено. Если вершина s_j^0 включена в границу квадрата s_i^2 , то она входит в границы шести ребер s_m^1 , два из которых входят в границу квадрата s_i^2 . Условие (2.1) опять выполнено. Если ребро s_j^1 не входит в границу куба s_i^3 , то условие (2.1) выполнено. Если ребро s_j^1 входит в границу куба s_i^3 , то оно входит в границы четырех квадратов s_m^2 , два из которых входят в границу куба s_i^3 . Условие (2.1) опять выполнено.

Коцепью c^p комплекса $P(G_3)$ с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ называется функция на p -мерных клетках, принимающая значения в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$. Обычно рассматривается ориентация клеток, и коцепи являются антисимметричными функциями: $c^p(-s_i^p) = -c^p(s_i^p)$. Однако $-1 = 1 \pmod{2}$ и для коэффициентов в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ можно пренебречь ориентацией клеток. Коцепи образуют абелеву группу

$$(c^p + c'^p)(s_i^p) = c^p(s_i^p) + c'^p(s_i^p) \pmod{2}, \quad (2.2)$$

которую обозначим через $C^p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Отображение

$$\partial c^p(s_i^{p-1}) = \sum_j (s_j^p : s_i^{p-1}) c^p(s_j^p) \pmod{2} \quad (2.3)$$

определяет гомоморфизм группы $C^p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ в группу $C^{p-1}(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Он называется граничным оператором. Отображение

$$\partial^* c^p(s_i^{p+1}) = \sum_j (s_i^{p+1} : s_j^p) c^p(s_j^p) \pmod{2} \quad (2.4)$$

определяет гомоморфизм группы $C^p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ в группу $C^{p+1}(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Он называется кограничным оператором. Из условия (2.1) следует, что $\partial\partial = 0$,

$\partial^* \partial^* = 0$. Ядро $Z_p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ гомоморфизма (2.3) на группе $C^p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ называется группой циклов комплекса $P(G_3)$ с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$. Образ $B_p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ гомоморфизма (2.3) в группе $C^p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ называется группой границ комплекса $P(G_3)$ с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$. Поскольку $\partial \partial = 0$, то группа $B_p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ является подгруппой группы $Z_p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Аналогично для кограничного оператора ∂^* определяются группа коциклов $Z^p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ и группа кограниц $B^p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$.

Введем билинейную форму на $C^p(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$,

$$\langle f^p, g^p \rangle = \sum_i f^p(s_i^p) g^p(s_i^p) \pmod{2}. \quad (2.5)$$

Из определений (2.3), (2.4) следует, что

$$\langle f^p, \partial^* g^{p-1} \rangle = \langle \partial f^p, g^{p-1} \rangle, \quad \langle f^p, \partial g^{p+1} \rangle = \langle \partial^* f^p, g^{p+1} \rangle. \quad (2.6)$$

Пусть коцепь $A^1 \in C^1(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ и энергия имеет вид

$$H'(\partial^* A^1) = \sum_{s_i^2 \in P(G_3)} h_i(\partial^* A^1(s_i^2)), \quad (2.7)$$

где $h_i(\epsilon)$ — произвольная функция на группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$,

$$h_i(\epsilon) = D_i - E_i(-1)^\epsilon, \quad (2.8)$$

постоянные

$$D_i = \frac{1}{2}(h_i(1) + h_i(0)), \quad E_i = \frac{1}{2}(h_i(1) - h_i(0)).$$

Подставляя равенство (2.8) в равенство (2.7), получаем

$$H'(\partial^* A^1) = \sum_{s_i^2 \in P(G_3)} D_i + H(\partial^* A^1), \quad (2.9)$$

где функция

$$H(\partial^* A^1) = - \sum_{s_i^2 \in P(G_3)} E_i(-1)^{\partial^* A^1(s_i^2)} \quad (2.10)$$

называется энергией $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики. Число $E_i = E(s_i^2)$ есть энергия взаимодействия, соответствующая грани s_i^2 . Функция

$$Z_{G_3} = \sum_{A^1 \in C^1(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} \exp\{-\beta H(\partial^* A^1)\} \quad (2.11)$$

называется статистической суммой $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики.

Пусть коцепь $\chi^1 \in C^1(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ принимает значение 1 на ребрах $s_1^1, \dots, s_m^1$ и 0 на всех других ребрах графа G_3 . Корреляционной функцией на ребрах $s_1^1, \dots, s_m^1$ решетки G_3 называется функция

$$W_{G_3}(\chi^1) = (Z_{G_3})^{-1} \sum_{A^1 \in C^1(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \chi^1, A^1 \rangle} \exp\{-\beta H(\partial^* A^1)\}. \quad (2.12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Статистическая сумма $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики на графе G_3 выражается формулой*

$$Z_{G_3} = 2^{\#(EG_3)} \left(\prod_{s_i^2 \in P(G_3)} \operatorname{ch} \beta E(s_i^2) \right) Z_{r, G_3}, \quad (2.13)$$

где редуцированная статистическая сумма $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики на графе G_3 есть

$$Z_{r, G_3} = \sum_{\xi^2 \in Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} \prod_{s_i^2 \in P(G_3)} (\operatorname{th} \beta E(s_i^2))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^2(s_i^2)})} \quad (2.14)$$

и $\#(EG_3)$ – общее число неориентированных ребер графа G_3 .

Корреляционная функция $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики на графе G_3 выражается формулой

$$W_{G_3}(\chi^1) = (Z_{r, G_3})^{-1} \sum_{\substack{\xi^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}}), \\ \partial \xi^2 = \chi^1}} \prod_{s_i^2 \in P(G_3)} (\operatorname{th} \beta E(s_i^2))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^2(s_i^2)})}. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (2.10) следует

$$\exp\{-\beta H(A^2)\} = \prod_{s_i^2 \in P(G_3)} \exp\{\beta E(s_i^2)(-1)^{A^2(s_i^2)}\}, \quad (2.16)$$

где $A^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Нетрудно проверить, что для $\epsilon = 0, 1$ имеет место равенство

$$\exp\{\beta E(s_i^2)(-1)^\epsilon\} = (\operatorname{ch} \beta E(s_i^2)) \sum_{\xi=0,1} (-1)^{\xi \epsilon} (\operatorname{th} \beta E(s_i^2))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^\xi)}. \quad (2.17)$$

Из соотношений (2.16), (2.17) следует, что

$$\begin{aligned} \exp\{-\beta H(A^2)\} &= \left(\prod_{s_i^2 \in P(G_3)} \operatorname{ch} \beta E(s_i^2) \right) \times \\ &\times \sum_{\xi^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \xi^2, A^2 \rangle} \prod_{s_i^2 \in P(G_3)} (\operatorname{th} \beta E(s_i^2))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^2(s_i^2)})}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставляя равенство (2.18) в определение (2.11), используя первое соотношение (2.6) и соотношение

$$\sum_{\xi=0,1} (-1)^{\xi \epsilon} = \begin{cases} 2, & \epsilon = 0, \\ 0, & \epsilon = 1, \end{cases} \quad (2.19)$$

получаем равенства (2.13), (2.14). Подставляя равенство (2.18) в определение (2.12), используя первое равенство (2.6) и соотношение (2.19), получаем равенство (2.15). Предложение 2.1 доказано.

Выше мы использовали определения и методы из работы [7].

Из соотношения (2.15) следует, что корреляционная функция отлична от нуля только для коцепи $\chi^1 \in B_1(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Иначе говоря, коцепь χ^1 равна единице на замкнутых контурах, которые являются границами двумерных областей.

Рассмотрим прямоугольную решетку, образованную вершинами с целыми декартовыми координатами $x = k_1$, $y = k_2$, $M'_i \leq k_i \leq M_i$, $i = 1, 2$, и соответствующими ребрами, соединяющими соседние вершины. Обозначим этот граф через $G_2 = G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Клеточный комплекс $P(G_2)$ определяется аналогично клеточному комплексу $P(G_3)$ для трехмерного графа $G_3 = G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$. Пусть коцепь $\sigma^0 \in C^0(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Энергия модели Изинга имеет следующий вид, аналогичный выражению (2.10):

$$H(\partial^* \sigma^0) = - \sum_{s_i^1 \in P(G_2)} E(s_i^1) (-1)^{\partial^* \sigma^0(s_i^1)}. \quad (2.20)$$

Статистическая сумма и корреляционная функция двумерной модели Изинга определяются соотношениями, подобными соотношениям (2.11), (2.12),

$$Z_{G_2} = \sum_{\sigma^0 \in C^0(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} \exp\{-\beta H(\partial^* \sigma^0)\}, \quad (2.21)$$

$$W_{G_2}(\chi^0) = (Z_{G_2})^{-1} \sum_{\sigma^0 \in C^0(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \chi^0, \sigma^0 \rangle} \exp\{-\beta H(\partial^* \sigma^0)\}, \quad (2.22)$$

где коцепь $\chi^0 \in C^0(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$.

Можно доказать [6], что подобно соотношениям (2.13)–(2.15) имеют место формулы

$$Z_{G_2} = 2^{\#(V G_2)} \left(\prod_{s_i^1 \in P(G_2)} \text{ch } \beta E(s_i^1) \right) Z_{r, G_2}, \quad (2.23)$$

$$Z_{r, G_2} = \sum_{\xi^1 \in Z_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} \prod_{s_i^1 \in P(G_2)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^1(s_i^1)})}, \quad (2.24)$$

$$W_{G_2}(\chi^0) = (Z_{r, G_2})^{-1} \sum_{\substack{\xi^1 \in C^1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}}), \\ \partial \xi^1 = \chi^0}} \prod_{s_i^1 \in P(G_2)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^1(s_i^1)})}, \quad (2.25)$$

где $\#(V G_2)$ – общее число вершин графа G_2 .

Равенства (2.23), (2.24) впервые были доказаны в работе [8].

Рассмотрим соотношения (2.13)–(2.15) для частного случая, когда энергия взаимодействия $E(s_i^2) = 0$ для любой грани s_i^2 , ортогональной координатной оси z . Для графа

$G_3 = G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$ группа $Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ совпадает с группой $B_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ (группа гомологий тривиальна). Граница любого множества кубов содержит грань s_i^2 , ортогональную координатной оси z . Поэтому из равенства $E(s_i^2) = 0$ следует, что сумма (2.14) состоит из единственного члена, отвечающего циклу, который равен нулю на любой грани. Таким образом, из соотношений (2.13), (2.14) следует, что

$$Z_{G_3} = 2^{\#(EG_3)} \prod_{s_i^2 \in P(G_3)} \text{ch } \beta E(s_i^2). \quad (2.26)$$

Рассмотрим сумму (2.15). Уравнение $\partial \xi^2 = \chi^1$ может не иметь решений $\xi^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ таких, что $\xi^2(s_i^2) = 0$ на любой грани s_i^2 , ортогональной координатной оси z . В этом случае из равенства (2.15) следует, что

$$W_{G_3}(\chi^1) = 0. \quad (2.27)$$

Если уравнение $\partial \xi^2 = \chi^1$ имеет решение $\xi^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ такое, что кощепь $\xi^2(s_i^2) = 0$ для любой грани s_i^2 , ортогональной координатной оси z , то это решение единственно, поскольку из равенства $\xi^2(s_i^2) = 0$ для любой грани s_i^2 , ортогональной координатной оси z , следует, что цикл $\xi^2 \in Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ равен нулю на любой грани. Из соотношений (2.13)–(2.15), (2.26) следует, что в этом случае

$$W_{G_3}(\chi^1) = \prod_{\substack{s_i^2 \in P(G_3), \\ \partial \xi^2 = \chi^1}} (\text{th } \beta E(s_i^2))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^2(s_i^2)})}. \quad (2.28)$$

Заметим, что можно рассмотреть бесконечные энергии взаимодействия $E(s_i^2) = \pm\infty$ в редуцированной статистической сумме (2.14) и корреляционных функциях (2.15).

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА

В этом разделе будет изучена связь между редуцированной статистической суммой (2.14) трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики и редуцированной статистической суммой (2.24) двумерной модели Изинга.

Рассмотрим конечную трехмерную решетку $G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$. Неориентированное ребро этой решетки задается парой $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$, где $\mathbf{p}$ – начальная вершина ребра, единичный вектор $\mathbf{e}$ определяет направление ребра и является одним из шести векторов $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Поскольку ребро неориентированно, то $\{\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e}\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$. Начальная вершина $\mathbf{p}$ и конечная вершина $\mathbf{p} + \mathbf{e}$ ребра $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$ являются вершинами графа $G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$. Поэтому компоненты p_i ($i = 1, 2, 3$) являются целыми числами и $M'_i \leq p_i \leq M_i$, $M'_i \leq p_i + e_i \leq M_i$. Для ребра $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$ числа инцидентности $(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\} : \mathbf{p}) = (\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\} : \mathbf{p} + \mathbf{e}) = 1$. Все другие числа инцидентности равны нулю.

Неориентированная грань решетки $G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$ задается тройкой $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, где $\mathbf{p}$ – начальная вершина, ортогональные друг другу единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ выбраны из шести единичных векторов $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$. Поскольку грань неориентированна, то $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$. Любая из четырех вершин $\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{e}_1, \mathbf{p} + \mathbf{e}_2, \mathbf{p} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ грани $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ является вершиной графа $G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$. Поэтому компоненты p_i ($i = 1, 2, 3$) являются целыми числами и $M'_i \leq p_i \leq M_i$, $M'_i \leq p_i + (\mathbf{e}_1)_i \leq M_i$, $M'_i \leq p_i + (\mathbf{e}_2)_i \leq M_i$, $M'_i \leq p_i + (\mathbf{e}_1)_i + (\mathbf{e}_2)_i \leq M_i$. Для неориентированной грани $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ числа инцидентности $(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} : \{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1\}) = (\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} : \{\mathbf{p}, \mathbf{e}_2\}) = (\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} : \{\mathbf{p} + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}) = (\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} : \{\mathbf{p} + \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) = 1$. Все другие числа инцидентности равны нулю.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть редуцированная статистическая сумма Z_{r, G_3} трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики задана соотношением (2.14). Пусть редуцированная статистическая сумма Z_{r, G_2} двумерной модели Изинга задана соотношением (2.24). Тогда

$$\begin{aligned} Z_{r, G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)} \Big|_{E(\{p, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = \infty} &= \\ &= Z_{r, G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)} \Big|_{E(\{p, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = -\infty} = \\ &= \prod_{i=M'_3}^{M_3-1} Z_{r, G(M'_1, M'_2; M_1, M_2), i}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\{\mathbf{p}, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ – любая грань, ортогональная координатной оси z . Редуцированная статистическая сумма $Z_{r, G(M'_1, M'_2; M_1, M_2), i}$ определяется соотношением (2.24) с энергиями взаимодействия $E(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = E(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}, (0, 0, 1)\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цикл $\xi^2 \in Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ на графе $G_3 = G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$. С помощью этого цикла мы определяем $M_3 - M'_3$ копей из группы $C^1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ на графе $G_2 = G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ соотношением

$$\xi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = \xi^2(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}, (0, 0, 1)\}), \quad (3.2)$$

где $i = M'_3, \dots, M_3 - 1$ и единичный вектор $\mathbf{e}$ ортогонален единичному вектору $(0, 0, 1)$. Числа инцидентности удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\} : (q_1, q_2)) = (\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}, (0, 0, 1)\} : \{(q_1, q_2, i), (0, 0, 1)\}), \quad (3.3)$$

где $i = M'_3, \dots, M_3 - 1$. Поэтому из определения (2.3) следует, что

$$\partial \xi_i^1((p_1, p_2)) = \partial \xi^2(\{(p_1, p_2, i), (0, 0, 1)\}). \quad (3.4)$$

Поскольку $\xi^2 \in Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, из равенства (3.4) следует, что $\xi_i^1 \in Z_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$.

С помощью цикла $\xi^2 \in Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ определим $M_3 - M'_3 + 1$ коцепей из группы $C^2(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ на графе $G_2 = G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ соотношением

$$\xi_i^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) = \xi^2(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}), \quad (3.5)$$

где $i = M'_3, \dots, M_3$ и единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ортогональны единичному вектору $(0, 0, 1)$. Поскольку $\xi^2 \in Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, из определения (2.3) и соотношений (3.2), (3.5) следует, что

$$\partial \xi_i^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = \xi_{i-1}^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) + \xi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}), \quad (3.6)$$

$$i = M'_3 + 1, \dots, M_3 - 1,$$

$$\partial \xi_{M'_3}^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = \xi_{M'_3}^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}), \quad (3.7)$$

$$\partial \xi_{M_3}^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = \xi_{M_3-1}^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}), \quad (3.8)$$

где единичный вектор $\mathbf{e}$ ортогонален единичному вектору $(0, 0, 1)$.

Для графа $G_2 = G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ группа $Z_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ совпадает с группой $B_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ и группа $Z_2(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ состоит из единственной коцепи, равной нулю на любой грани (группы гомологий тривиальны). Пусть заданы произвольные циклы $\xi_i^1 \in Z_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, $i = M'_3, \dots, M_3 - 1$. Тогда уравнения (3.6)–(3.8) однозначно определяют коцепи ξ_i^2 , $i = M'_3, \dots, M_3$. Теперь соотношения (3.2), (3.5) однозначно определяют цикл $\xi^2 \in Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Следовательно, цикл $\xi^2 \in Z_2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ однозначно задается циклами $\xi_i^1 \in Z_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, $i = M'_3, \dots, M_3 - 1$. Из соотношений (3.2), (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} & \prod_{\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in P(G_3)} (\text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}))^{\frac{1}{2}(1-(-1)^{\xi^2(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})})} = \\ & = \left(\prod_{i=M'_3}^{M_3} \prod_{\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in P(G_2)} (\text{th } \beta E(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}))^{\frac{1}{2}(1-(-1)^{\xi_i^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})})} \right) \times \\ & \times \left(\prod_{i=M'_3}^{M_3-1} \prod_{\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\} \in P(G_2)} (\text{th } \beta E(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}, (0, 0, 1)\}))^{\frac{1}{2}(1-(-1)^{\xi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\})})} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Поскольку $\beta > 0$, то

$$(\text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})) \Big|_{E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) = \pm \infty} = \pm 1. \quad (3.10)$$

Если $\epsilon = \pm 1$, то для произвольного целого числа m имеем

$$\epsilon^{\frac{1}{2}(1-(-1)^m)} = \epsilon^m. \quad (3.11)$$

Из соотношений (3.9)–(3.11) следует, что

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in P(G_3)} (\text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^2(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})})} \right) \Big|_{E(\{\mathbf{p}, (1,0,0), (0,1,0)\}) = \pm \infty} = \\ & = \left(\prod_{\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in P(G_2)} \epsilon^{\sum_{i=M'_3}^{M_3} \xi_i^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})} \right) \times \\ & \times \left(\prod_{i=M'_3}^{M_3-1} \prod_{\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\} \in P(G_2)} (\text{th } \beta E(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}, (0,0,1)\}))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\})})} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $E(\{\mathbf{p}, (1,0,0), (0,1,0)\})$ – энергия взаимодействия, соответствующая грани $\{\mathbf{p}, (1,0,0), (0,1,0)\}$, ортогональной координатной оси z , и $\epsilon = \pm 1$ в соответствии с соотношением (3.10).

Суммируя равенства (3.6)–(3.8), получаем

$$\partial \left(\sum_{i=M'_3}^{M_3} \xi_i^2 \right) = 0. \quad (3.13)$$

Группа $Z_2(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ состоит из единственной коцепи, равной нулю на любой грани (группа гомологий тривиальна). Тогда из соотношений (2.14), (2.24), (3.12) и (3.13) следует равенство (3.1). Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай, когда энергия взаимодействия зависит лишь от ориентации грани, $E(\{\mathbf{p}, (1,0,0), (0,0,1)\}) = E_1$, $E(\{\mathbf{p}, (0,1,0), (0,0,1)\}) = E_2$. Тогда из соотношения (3.1) следует

$$\begin{aligned} & Z_{r, G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)} \Big|_{E(\{\mathbf{p}, (1,0,0), (0,1,0)\}) = \infty} = \\ & = Z_{r, G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)} \Big|_{E(\{\mathbf{p}, (1,0,0), (0,1,0)\}) = -\infty} = \\ & = (Z_{r, G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)})^{M_3 - M'_3}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где редуцированная статистическая сумма $Z_{r, G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)}$ определяется соотношением (2.24) для энергий взаимодействия $E((p_1, p_2), (1,0)) = E_1$, $E((p_1, p_2), (0,1)) = E_2$.

Общее число $\#(EG_3)$ неориентированных ребер графа $G_3 = G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$ равно

$$\begin{aligned} & (M_1 - M'_1 + 1)(M_2 - M'_2 + 1)(M_3 - M'_3) + (M_1 - M'_1 + 1)(M_2 - M'_2)(M_3 - M'_3 + 1) + \\ & + (M_1 - M'_1)(M_2 - M'_2 + 1)(M_3 - M'_3 + 1). \end{aligned}$$

Тогда из соотношения (3.14) и теоремы 4.2 работы [6] следует, что

$$\begin{aligned}
& \lim_{G_3 \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 3}} (\#(EG_3))^{-1} (\ln Z_{r, G_3}) \big|_{E(\{p, (1,0,0), (0,1,0)\}) = \infty} = \\
& = \lim_{G_3 \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 3}} (\#(EG_3))^{-1} (\ln Z_{r, G_3}) \big|_{E(\{p, (1,0,0), (0,1,0)\}) = -\infty} = \\
& = \frac{1}{3} \lim_{\substack{M_i \rightarrow \infty, M'_i \rightarrow -\infty, \\ i=1,2}} (M_1 - M'_1 + 1)^{-1} (M_2 - M'_2 + 1)^{-1} \ln Z_{r, G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)} = \\
& = \frac{1}{6} (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \times \\
& \quad \times \ln [(1 + z_1^2)(1 + z_2^2) - 2z_1(1 - z_2^2) \cos \theta_1 - 2z_2(1 - z_1^2) \cos \theta_2], \tag{3.15}
\end{aligned}$$

где переменные $z_i = \tanh \beta E_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяют оценке $|z_i| < 1/3$.

Легко показать, что интеграл (3.15) имеет сингулярность при

$$|z_1| |z_2| + |z_1| + |z_2| = 1. \tag{3.16}$$

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе изучается связь между корреляционными функциями трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики и корреляционными функциями двумерной модели Изинга.

Для фиксированной коцепи $\chi^0 \in C^0(P(G_2(\chi^0)), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, где граф $G_2(\chi^0) = G(M'_1(\chi^0), M'_2(\chi^0); M_1(\chi^0), M_2(\chi^0))$, мы определяем корреляционную функцию

$$W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\chi^0) = \lim_{\substack{G_2 \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}, \\ G_2(\chi^0) \subset G_2}} W_{G_2}(\chi^0). \tag{4.1}$$

Следуя [6], опишем функцию (4.1). Ориентированное ребро графа $\mathbb{Z}^{\times 2}$ задается парой $(\mathbf{p}, \mathbf{e})$, где $\mathbf{p}$ – начальная вершина ребра, единичный вектор $\mathbf{e}$ определяет направление ребра и является одним из четырех векторов $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Замкнутый путь определяется как последовательность ориентированных ребер $C = ((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k))$ таких, что

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i + \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_k + \mathbf{e}_k. \tag{4.2}$$

Число $|C| = k$ называется длиной замкнутого пути $C = ((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k))$. Если C – замкнутый путь, то носитель $\|C\|$ – это множество всех неориентированных ребер $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$ таких, что ориентированное ребро $(\mathbf{p}, \mathbf{e})$ включено в замкнутый путь C или ориентированное ребро $(\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e})$ включено в замкнутый путь C . Замкнутый путь C называется редуцированным, если он удовлетворяет следующему условию:

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i + \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{p}_{i+1} + \mathbf{e}_{i+1} \neq \mathbf{p}_i, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_k + \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{e}_1 \neq \mathbf{p}_k. \tag{4.3}$$

Множество всех редуцированных путей на графе $\mathbb{Z}^{\times 2}$ обозначим через $RC(\mathbb{Z}^{\times 2})$.

Пусть любой паре $(\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), (\mathbf{p}_2, \mathbf{e}_2)$ ориентированных ребер графа $\mathbb{Z}^{\times 2}$ таких, что $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{e}_1$, $\mathbf{p}_2 + \mathbf{e}_2 \neq \mathbf{p}_1$, сопоставлено число

$$\rho((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1); (\mathbf{p}_2, \mathbf{e}_2)) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \right\}, \quad (4.4)$$

где $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}$ – радианная мера угла между направлениями векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Тогда любому замкнутому пути $C = ((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k))$ на графе $\mathbb{Z}^{\times 2}$ соответствует число

$$\begin{aligned} \rho(C) &= \rho((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1); (\mathbf{p}_2, \mathbf{e}_2)) \rho((\mathbf{p}_2, \mathbf{e}_2); (\mathbf{p}_3, \mathbf{e}_3)) \dots \\ &\dots \rho((\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{e}_{k-1}); (\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k)) \rho((\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k); (\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1)), \\ \rho(C) &= \exp \left\{ \frac{i}{2} \phi(C) \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\phi(C)$ – полный угол вращения касательного вектора пути C вдоль пути C .

Пусть коцепь $\xi^1 \in C^1(P(\mathbb{Z}^{\times 2}), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Носитель $\|\xi^1\|$ – это множество всех неориентированных ребер графа $\mathbb{Z}^{\times 2}$, на которых коцепь ξ^1 принимает значение 1. Пусть коцепь $\chi^0 \in C^0(P(\mathbb{Z}^{\times 2}), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Носитель $\|\xi^1\|$ называется χ^0 -связным, если любая связная компонента носителя $\|\xi^1\|$ содержит неориентированные ребра, инцидентные вершинам, на которых коцепь χ^0 равна 1. Обозначим через $i(\|\xi^1\|)$ множество всех неориентированных ребер, инцидентных вершинам, которые инцидентны ребрам носителя $\|\xi^1\|$.

Согласно [6] корреляционная функция (4.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\chi^0) &= \sum_{\substack{\xi^1 \in C^1(P(\mathbb{Z}^{\times 2}), \mathbb{Z}_2^{\text{add}}), \partial \xi^1 = \chi^0, \\ \chi^0\text{-связный } \|\xi^1\|}} \\ &\exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in RC(\mathbb{Z}^{\times 2}), \\ \|C\| \cap i(\|\xi^1\|) \neq \emptyset}} |C|^{-1} \rho(C) \prod_{\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\} \in C} \text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}) \right\} \times \\ &\times \prod_{\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\} \in P(\mathbb{Z}^{\times 2})} (\text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^1(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})})}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ряд (4.6) сходится абсолютно, если выполнена оценка

$$|\text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})| < \frac{1}{3} \quad (4.7)$$

и значения энергий взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})$ имеют один и тот же знак для коллинеарных векторов $\mathbf{e}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть для графа

$$G_3(\chi^1) = G(M'_1(\chi^1), M'_2(\chi^1), M'_3(\chi^1); M_1(\chi^1), M_2(\chi^1), M_3(\chi^1))$$

задана коцень $\chi^1 \in B_1(P(G_3(\chi^1)), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Для графа

$$G_2(\chi^1) = G(M'_1(\chi^1), M'_2(\chi^1); M_1(\chi^1), M_2(\chi^1))$$

мы определим $M_3(\chi^1) - M'_3(\chi^1)$ коцень из группы $C^0(P(G_2(\chi^1)), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ соотношением

$$\chi_i^0((p_1, p_2)) = \chi^1(\{(p_1, p_2, i), (0, 0, 1)\}), \quad (4.8)$$

где $i = M'_3(\chi^1), \dots, M_3(\chi^1) - 1$, и $M_3(\chi^1) - M'_3(\chi^1) + 1$ коцень из группы $C^1(P(G_2(\chi^1)), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ соотношением

$$\chi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = \chi^1(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}\}), \quad (4.9)$$

где $i = M'_3(\chi^1), \dots, M_3(\chi^1)$, а единичный вектор $\mathbf{e}$ ортогонален единичному вектору $(0, 0, 1)$.

Если энергии взаимодействия трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики удовлетворяют оценке

$$|\text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}, (0, 0, 1)\})| < \frac{1}{3} \quad (4.10)$$

и значения энергий взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}, (0, 0, 1)\})$ имеют один и тот же знак для всех коллинеарных векторов $\mathbf{e}$, то корреляционные функции трехмерной $\mathbb{Z}_2$ -электродинамики определяются соотношениями

$$\lim_{\substack{G_3 \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 3}, \\ G_3(\chi^1) \subset G_3}} W_{G_3}(\chi^1) \Big|_{E(\{\mathbf{p}, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = \infty} = \prod_{i=M'_3(\chi^1)}^{M_3(\chi^1)-1} W_{\mathbb{Z}^{\times 2}, i}(\chi_i^0), \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{G_3 \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 3}, \\ G_3(\chi^1) \subset G_3}} W_{G_3}(\chi^1) \Big|_{E(\{\mathbf{p}, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = -\infty} = \\ & = (-1)^{S(\sum_{i=M'_3(\chi^1)}^{M_3(\chi^1)} \chi_i^1)} \prod_{i=M'_3(\chi^1)}^{M_3(\chi^1)-1} W_{\mathbb{Z}^{\times 2}, i}(\chi_i^0), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $\{\mathbf{p}, (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ – любая грань, ортогональная координатной оси z . Корреляционная функция $W_{\mathbb{Z}^{\times 2}, i}(\chi_i^0)$ задается соотношением (4.6) для энергий взаимодействия $E(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = E(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}, (0, 0, 1)\})$. Для любой коцени $\chi^1 \in B_1(P(G_3(\chi^1)), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ коцень

$$\sum_{i=M'_3(\chi^1)}^{M_3(\chi^1)} \chi_i^1 = \partial \zeta^2,$$

где коцень $\zeta^2 \in C^2(P(G_2(\chi^1)), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ определяется однозначно. Тогда

$$(-1)^{S(\sum_{i=M'_3(\chi^1)}^{M_3(\chi^1)} \chi_i^1)} = (-1)^{\sum_{\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in P(G_2(\chi^1))} \zeta^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})}. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для графа $G_3 = G(M'_1, M'_2, M'_3; M_1, M_2, M_3)$, $G_3(\chi^1) \subset G_3$, рассмотрим коцепь $\xi^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, удовлетворяющую уравнению $\partial \xi^2 = \chi^1$. Соотношения (3.2) определяют коцепи $\xi_i^1 \in C^1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, $i = M'_3, \dots, M_3 - 1$, для графа $G_2 = G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Из соотношений (3.4), (4.8) следует, что

$$\partial \xi_i^1 = \chi_i^0, \quad (4.14)$$

где $\chi_i^0 = 0$ для $i < M'_3(\chi^1)$ и $i \geq M_3(\chi^1)$.

Для той же самой коцепи $\xi^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ соотношения (3.5) определяют коцепи $\xi_i^2 \in C^2(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, $i = M'_3, \dots, M_3$. Поскольку $\partial \xi^2 = \chi^1$, то из определения (2.3) и соотношений (3.2), (3.5), (4.9) следует, что

$$\partial \xi_i^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = \chi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) + \xi_{i-1}^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) + \xi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}), \quad (4.15)$$

$i = M'_3 + 1, \dots, M_3 - 1$,

$$\partial \xi_{M'_3}^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = \chi_{M'_3}^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) + \xi_{M'_3}^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}), \quad (4.16)$$

$$\partial \xi_{M_3}^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) = \chi_{M_3}^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}) + \xi_{M_3-1}^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}), \quad (4.17)$$

где $\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\}$ — неориентированная грань графа G_2 , и коцепи $\chi_i^1 = 0$ для $i < M'_3(\chi^1)$ и $i > M_3(\chi^1)$.

Пусть заданы произвольные коцепи $\xi_i^1 \in C^1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, $i = M'_3, \dots, M_3 - 1$, удовлетворяющие уравнениям (4.14). Поскольку $\chi^1 \in B_1(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}}) = Z_1(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, из равенств (4.14) следует, что правые части равенств (4.15)–(4.17) являются циклами, т.е. принадлежат группе $Z_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Для графа $G_2 = G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ группа $Z_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ совпадает с группой $B_1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ и группа $Z_2(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ состоит из единственной коцепи, которая равна нулю на любой грани (группы гомологий тривиальны). Следовательно, коцепи $\xi_i^2 \in C^2(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ однозначно определяются равенствами (4.15)–(4.17). Тогда равенства (3.2), (3.5) однозначно определяют коцепь $\xi^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, удовлетворяющую уравнению $\partial \xi^2 = \chi^1$. Следовательно, коцепь $\xi^2 \in C^2(P(G_3), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, удовлетворяющая уравнению $\partial \xi^2 = \chi^1$, однозначно задается коцепями $\xi_i^1 \in C^1(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$, $i = M'_3, \dots, M_3 - 1$, удовлетворяющими уравнениям (4.14).

Из соотношений (3.2), (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in P(G_3)} (\text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi^2(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})})} \right) \Big|_{E(\{\mathbf{p}, (1,0,0), (0,1,0)\}) = \infty} = \\ &= \prod_{i=M'_3}^{M_3-1} \prod_{\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\} \in P(G_2)} (\text{th } \beta E(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}, (0,0,1)\}))^{\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\})})}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Теперь из соотношений (2.15), (2.25), (3.1), (4.1), (4.18) и теоремы 4.3 работы [6] следует соотношение (4.11).

Из соотношений (3.2), (3.5), (3.10), (3.11) следует, что

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in P(G_3)} (\text{th } \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}))^{\frac{1}{2}(1-(-1)^{\xi^2(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})})} \right) \Big|_{E(\{\mathbf{p}, (1,0,0), (0,1,0)\}) = -\infty} = \\ & = (-1)^{\sum_{i=M'_3}^{M_3} \sum_{\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in P(G_2)} \xi_i^2(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})} \times \\ & \times \left(\prod_{i=M'_3}^{M_3-1} \prod_{\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\} \in P(G_2)} (\text{th } \beta E(\{(p_1, p_2, i), \mathbf{e}, (0, 0, 1)\}))^{\frac{1}{2}(1-(-1)^{\xi_i^1(\{(p_1, p_2), \mathbf{e}\})})} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Суммируя равенства (4.15)–(4.17), получаем

$$\partial \left(\sum_{i=M'_3}^{M_3} \xi_i^2 \right) = \sum_{i=M'_3}^{M_3} \chi_i^1. \quad (4.20)$$

Группа $Z_2(P(G_2), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ состоит из единственной коцепи, равной нулю на любой грани (группа гомологий тривиальна). Следовательно, равенство (4.20) однозначно определяет коцепь $\sum_{i=M'_3}^{M_3} \xi_i^2$. Тогда из соотношений (2.15), (2.25), (3.1), (4.1), (4.19), (4.20) и теоремы 4.3 работы [6] следуют равенства (4.12), (4.13). Теорема доказана.

Благодарности. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 00–01–00083).

Список литературы

- [1] *L. Onsager.* Phys. Rev. 1944. V. 65. P. 117–149.
- [2] *M. Kac, J. C. Ward.* Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 1332–1337.
- [3] *S. Sherman.* J. Math. Phys. 1960. V. 1. P. 202–217.
- [4] *S. Sherman.* J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1213–1214.
- [5] *Н. П. Долбилин, Ю. М. Зиновьев, А. С. Миценко, М. А. Штанько, М. И. Штогрин.* Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. С. 79–100.
- [6] *Ю. М. Зиновьев.* ТМФ. 2001. Т. 126. С. 84–101.
- [7] *Ю. М. Зиновьев.* ТМФ. 1980. Т. 43. С. 309–322.
- [8] *B. L. van der Waerden.* Z. Phys. 1941. V. 118. P. 473–488.

Поступила в редакцию 10.XII.2001 г.