Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Горжини, Д. П. Санкович, Локальная гауссова доминантность: ангармоническое возмущение свободных бозонов, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 1, 150–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:59:08

© 2002 г.

М. Горжини*, Д. П. Санкович†

ЛОКАЛЬНАЯ ГАУССОВА ДОМИНАНТНОСТЬ: АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ СВОБОДНЫХ БОЗОНОВ

Для бозе-системы, гамильтониан которой диагонален относительно операторов чисел заполнения, доказано условие локальной гауссовой доминантности. Доказательство основано на получении оценки сверху для боголюбовского внутреннего произведения бозе-операторов рождения и уничтожения.

Ключевые слова: локальная гауссова доминантность, мера, бозе-газ, функция распределения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из результатов развития концепции квазисредних [1] явилось построение метода доказательства существования в системах взаимодействующих бозонов фазового перехода, связанного с возникновением дальнего порядка, так называемой бозе-конденсации [2]. Центральное место в этом методе занимает условие гауссовой доминантности, введенное в связи с исследованием (метод инфракрасных оценок) фазовых переходов в спиновых системах [3], [4]. В дальнейшем было показано, что при доказательстве возможности фазового перехода достаточно рассматривать более слабое условие – так называемое условие локальной гауссовой доминантности [5]. Важность и достаточно общий характер условия гауссовой доминантности в методе инфракрасных оценок [6] обусловили самостоятельный интерес к доказательству как гауссовой доминантности, так и локальной гауссовой доминантности для различных задач математической физики.

Целью данной статьи является дальнейшее изучение условия локальной гауссовой доминантности. Рассматривается бозе-система с конечным числом степеней свободы и диагональным относительно операторов чисел заполнения гамильтонианом. При доказательстве локальной гауссовой доминантности существенную роль играет получение

*Departamento de Matemáticas, Universidad de La Serena, La Serena, Chile

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

подходящих верхних оценок для так называемого внутреннего произведения Боголюбова [7] операторов рождения и уничтожения бозонов. В разделе 3 будет получена точная формула, выражающая данное внутреннее произведение в виде соответствующего ряда, из которой и следует локальная гауссова доминантность. Показано, что это внутреннее произведение может быть записано как классическое среднее по мере, отвечающей заданному гиббсовскому распределению. Рассматриваемый нами подход позволяет расширить рамки метода доказательства условия локальной гауссовой доминантности и уточняет некоторые полученные ранее результаты [8], [9].

2. МОДЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

Предположим, что рассматриваемая система имеет $M < \infty$ степеней свободы. Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}^M = \bigotimes_{i=1}^M \mathcal{H}_i$, где $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ для $i \in I$, $I = \{1, 2, \dots, M\}$. Алгебра $\mathcal{U}(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ определяется с помощью обычных одномодовых бозе-операторов рождения и уничтожения частиц $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ как алгебра с системой образующих $\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i\}$, $i \in I$, где

$$\begin{aligned}\hat{a}_i^\dagger &= \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \hat{I}_{i-1} \otimes \hat{a}^\dagger \otimes \hat{I}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{I}_M, \\ \hat{a}_i &= \hat{I}_1 \otimes \dots \otimes \hat{I}_{i-1} \otimes \hat{a} \otimes \hat{I}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{I}_M,\end{aligned}$$

$\hat{I}_i$ – единичный оператор, определенный на $\mathcal{H}_i$ для $i \in I$. Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i = \delta_{i,j}.$$

Определим также оператор числа заполнения состояния с индексом i как $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$.

Будем предполагать, что для каждого индекса $i \in I$ существует вектор $\phi_{i,0} \equiv \phi_0 \in \mathcal{H}$, $\|\phi_0\| = 1$ такой, что $\hat{a}_i \phi_0 = 0$, а последовательность векторов

$$\left\{ \phi_{i,n} = \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \phi_0 \right\}$$

образует ортонормированный базис в $\mathcal{H}_i$, для которого

$$\hat{a}_i^\dagger \phi_{i,n} = \sqrt{n+1} \phi_{i,n+1}, \quad \hat{a}_i \phi_{i,n} = \sqrt{n} \phi_{i,n-1}.$$

Вакуумный вектор $\psi_0^M \in \mathcal{H}^M$ задается соотношением

$$\psi_0^M = \bigotimes_{i=1}^M \phi_{i,0} \in \mathcal{H}^M.$$

В этом случае каждый вектор $\psi^B \in \mathcal{H}_B^M$, где $\mathcal{H}_B^M$ – пространство состояний бозе-системы, может быть записан как симметричная линейная комбинация базисных функций $\{\psi_{n_1, n_2, \dots, n_M}\}$ в $\mathcal{H}_B^M$, где

$$\psi_{n_1, n_2, \dots, n_M} = \prod_{k=1}^M \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} \psi_0^M.$$

Другими словами, каждый вектор $\psi^B \in \mathcal{H}_B^M$ имеет вид

$$\psi^B = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!}} \sum_{p_1, \dots, p_m}^M K_{p_1, \dots, p_m} \hat{a}_{p_1}^\dagger \dots \hat{a}_{p_m}^\dagger \psi_0^M,$$

где

$$\sum_{p_1, \dots, p_m}^{\infty} |K_{p_1, \dots, p_m}|^2 < \infty,$$

а коэффициенты $K_{p_1, \dots, p_m}$ симметричны по отношению к перестановке индексов p_j . Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \hat{a}_k^\dagger \psi_{n_1, \dots, n_k, \dots, n_M} &= \sqrt{n_k + 1} \psi_{n_1, \dots, n_k + 1, \dots, n_M}, \\ \hat{a}_k \psi_{n_1, \dots, n_k, \dots, n_M} &= \sqrt{n_k} \psi_{n_1, \dots, n_k - 1, \dots, n_M} \end{aligned}$$

и

$$\hat{n}_k \psi_{n_1, \dots, n_k, \dots, n_M} = n_k \psi_{n_1, \dots, n_k, \dots, n_M}.$$

Исследуемая далее модель определена гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^M \lambda(j) \hat{n}_j + \gamma \sum_{j=1}^M f(\hat{n}_j). \quad (1)$$

Имея в виду дальнейшее рассмотрение случая с $M \rightarrow \infty$, предположим, что $\lambda(j) > 0$ для $j \in I$, $\gamma > 0$ и $f(\omega)$ — непрерывная положительная функция, возрастающая при $\omega > \omega_0$ и ограниченная при $0 \leq \omega \leq \omega_0$, где ω_0 — некоторое положительное число.

Определим оператор $\hat{H}_\mu$ соотношением

$$\hat{H}_\mu = \hat{H} - \mu \hat{N},$$

где $\hat{N}$ — оператор полного числа частиц. Большая статистическая сумма может быть записана как

$$Z_{\beta, \mu}[\hat{H}] = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}. \quad (2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $R(n_1, n_2, \dots, n_M)$ — функция, определенная соотношением

$$R(n_1, n_2, \dots, n_M) = \sum_{i=1}^M T(n_i),$$

где $n_i = 0, 1, 2, \dots$ для всех положительных целых $i \in I$ и T — такая действительная функция, что

$$\sum_{\{n_j: j \in I\}} e^{-R} < \infty.$$

Тогда

$$\sum_{\{n_j: j \in I\}} e^{-R} = \sum_{\{n_j: j \in I\}} \prod_{i=1}^M e^{-T(n_i)} = \prod_{i=1}^M \sum_{n_i} e^{-T(n_i)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно записать:

$$\begin{aligned} \sum_{\{n_j: j \in I\}} \prod_{i=1}^M e^{-T(n_i)} &= \sum_{\{n_j: j \in I\}} \left[\prod_{\{i \neq k\}}^M e^{-T(n_i)} \right] e^{-T(n_k)} = \\ &= \sum_{\{n_j: j \in I; j \neq k\}} \sum_{n_k} \left[\prod_{\{i \neq k\}}^M e^{-T(n_i)} \right] e^{-T(n_k)}. \end{aligned}$$

Поскольку произведение

$$\prod_{i=1, i \neq k}^M e^{-T(n_i)}$$

не зависит от n_k , правую часть этих тождеств можно переписать в виде

$$\sum_{\{n_j: j \neq k\}} \sum_{n_k} \left[\prod_{i \neq k}^M e^{-T(n_i)} \right] e^{-T(n_k)} = \sum_{\{n_j: j \neq k\}} \left[\prod_{\{i \neq k\}}^M e^{-T(n_i)} \right] \sum_{n_k} e^{-T(n_k)}$$

и получить

$$\sum_{\{n_j: j \in I\}} \prod_{i=1}^M e^{-T(n_i)} = \sum_{\{n_j: j \neq k\}} \left[\prod_{\{i \neq k\}}^M e^{-T(n_i)} \right] \sum_{n_k} e^{-T(n_k)}.$$

Повторяя данную процедуру для каждого n_i , получим окончательно

$$\sum_{\{n_j, j \in I\}} \prod_{i=1}^M e^{-T(n_i)} = \prod_{i=1}^M \sum_{n_i} e^{-T(n_i)},$$

что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $f(\omega)$ – такая функция, что $\lim_{\omega \rightarrow \infty} g(\omega) = \infty$, где $g(\omega) = f(\omega + 1) - f(\omega)$. Тогда $Z_{\beta, \mu}[\widehat{H}] < \infty$ для $\mu \in (-\infty, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вводя классические переменные $n_i = 0, 1, 2, \dots$ для $i \geq 1$, запишем большую статистическую сумму (2) как

$$Z_{\beta, \mu}[\widehat{H}] = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_i: \sum n_i = N\}} \prod_{i=1}^M e^{-\beta((\lambda(i) - \mu)n_i + \gamma f(n_i))}. \quad (3)$$

Двойное суммирование в формуле (3) эквивалентно суммированию независимо по каждому n_i , поскольку каждый член при одном способе суммирования встречается один раз и только один раз при другом, и наоборот [10]. Тогда, используя утверждение 1, статистическую сумму (3) можно представить в виде

$$Z_{\beta, \mu}[\widehat{H}] = \prod_{i=1}^M \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta((\lambda(i) - \mu)n_i + \gamma f(n_i))}.$$

Обозначим n_i -е слагаемое входящего в это выражение ряда $u_{n_i} = e^{-\beta((\lambda(i)-\mu)n_i + \gamma f(n_i))}$. В силу принципа сходимости Д'Аламбера ряд $\sum_{n_i=0}^{\infty} u_{n_i}$ сходится, если

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n_i+1}}{u_{n_i}} \right| = e^{-\beta(\lambda(i)-\mu)} \lim_{n_i \rightarrow \infty} e^{-\gamma\beta(f(n_i+1)-f(n_i))} < A < 1.$$

Но по предположению $\lim_{\omega \rightarrow \infty} g(\omega) = \infty$, т.е. рассматриваемый ряд сходится для всех $i \in I$ и $\mu \in R$ и, следовательно, $Z_{\beta, \mu}[\hat{H}] < \infty$ для всех μ . Утверждение 2 доказано.

3. ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ БОГОЛЮБОВСКИХ ВНУТРЕННИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Поскольку в случае нашей системы базисные состояния представляют собой прямое произведение состояний для отдельной моды, дальнейшее рассмотрение можно сосредоточить на одной моде. Обобщение на конечномодовый случай не вызовет затруднений. Возьмем поэтому гамильтониан

$$\hat{H}_\mu = (\lambda - \mu)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \gamma f(\hat{n}),$$

где $\lambda > 0$. Сопоставим этому гамильтониану действительнзначную функцию

$$H_\mu(\omega) = (\lambda - \mu)\omega + \gamma f(\omega), \quad \omega \in R^+.$$

Очевидно, что $H_\mu(\omega+1) - H_\mu(\omega) = \lambda - \mu + \gamma g(\omega)$. Будем обозначать в рассматриваемом случае большую статистическую сумму $Z_{\beta, \mu}[\hat{H}]$ как Z .

Пусть $\hat{A}(x)$ – оператор, определенный соотношением

$$\hat{A}(x) = (\hat{a}^\dagger e^{-x\beta\hat{H}_\mu} \hat{a} e^{x\beta\hat{H}_\mu}) e^{-\beta\hat{H}_\mu}$$

для $x \in [0, 1]$, и ϕ_n – собственная функция оператора заполнения $\hat{n}$ единственной моды. Тогда

$$\hat{A}(x)\phi_n = E_n(x)\phi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$E_n(x) = n e^{-\beta H_\mu(n)} e^{x\beta(H_\mu(n) - H_\mu(n-1))}.$$

Из последних соотношений следует, что внутреннее произведение Боголюбова для операторов рождения и уничтожения частиц, обозначаемое как $(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ и определенное формулой

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = Z^{-1} \int_0^1 \text{Tr } \hat{A}(x) dx,$$

принимает вид

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = Z^{-1} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_n, \hat{A}(x)\phi_n \rangle dx = Z^{-1} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) dx.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $f(\omega)$ – функция, заданная в утверждении 2, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) < \infty$$

для $\mu \in (-\infty, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя явный вид функции $E_n(x)$, можно записать:

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_{n+1}(x)}{E_n(x)} \right| &= \frac{(n+1)e^{-\beta H_\mu(n+1)} e^{x\beta(H_\mu(n+1)-H_\mu(n))}}{ne^{-\beta H_\mu(n)} e^{x\beta(H_\mu(n)-H_\mu(n-1))}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\beta[\lambda-\mu+\gamma(f(n+1)-f(n))]} e^{\gamma x\beta(f(n+1)+f(n-1)-2f(n))} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\beta(\lambda-\mu)} e^{-\beta\gamma(1-x)[f(n+1)-f(n)]} e^{-x\beta\gamma[f(n)-f(n-1)]}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{E_{n+1}(x)}{E_n(x)} \right| = 0$$

для любого $x \in [0, 1]$ и $\mu \in (-\infty, \infty)$, что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. При тех же предположениях о функции $f(\omega)$, что и в утверждении 2, справедлива формула

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = (\beta Z)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-\beta H_\mu(n-1)} - e^{-\beta H_\mu(n)}}{H_\mu(n) - H_\mu(n-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $E_n(x)$ – положительная непрерывная интегрируемая функция на пространстве $([0, 1], dx)$. Более того, из наложенных на функцию $f(\omega)$ условий следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)$$

сходится для всех $x \in [0, 1]$. Тогда из теоремы об интегрировании монотонных последовательностей следует, что

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = Z^{-1} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) dx = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 E_n(x) dx.$$

Интегрируя последнее выражение и отмечая, что первое слагаемое ряда исчезает, получаем требуемый результат.

Пусть $F(\omega)$ – функция равномерного распределения на сегменте $[0, 1]$. Преобразование Лапласа для нее имеет вид

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Введем функцию $u_1(\omega) = \delta(\omega - 1)$, где $\delta(\omega)$ — дираковская дельта-функция. В этом случае

$$\mathcal{L}(u_1)(s) = e^{-s}.$$

Пусть $s_{\beta,\mu}(\omega)$ и $W_{\beta,\mu}^n(\omega)$ — функции $\omega \in R$, определенные соотношениями

$$s_{\beta,\mu}(\omega) \equiv s_{\beta,\mu}^\omega = \beta(H_\mu(\omega) - H_\mu(\omega - 1)) = \beta(\lambda - \mu + \gamma g(\omega - 1))$$

и

$$W_{\beta,\mu}^n(\omega) = e^{(s_{\beta,\mu}^n - \beta H_\mu(n-1))\omega} u_1(\omega).$$

ТЕОРЕМА 1. Для боголюбовского внутреннего произведения $(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ справедлива формула

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{L}(W_{\beta,\mu}^n * F)(s) \delta_{s, s_{\beta,\mu}^n},$$

где “*” означает свертку, а $\delta_{s,t}$ — символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $V_{\beta,\mu}^n$ n -й член ряда для $(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$, т.е.

$$V_{\beta,\mu}^n = n \frac{e^{-\beta H_\mu(n-1)} - e^{-\beta H_\mu(n)}}{\beta(H_\mu(n) - H_\mu(n-1))}.$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned} V_{\beta,\mu}^n &= n e^{-\beta H_\mu(n-1)} \left[\frac{1 - e^{-\beta(H_\mu(n) - H_\mu(n-1))}}{\beta(H_\mu(n) - H_\mu(n-1))} \right] = \\ &= n e^{-\beta H_\mu(n-1)} \mathcal{L}(F)(s) \delta_{s, s_{\beta,\mu}^n} = n e^{-\beta H_\mu(n-1)} \mathcal{L}(F)(s_{\beta,\mu}^n). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathcal{L}(W_{\beta,\mu}^n)(s) = e^{-(s - s_{\beta,\mu}^n + \beta H_\mu(n-1))}.$$

Тогда

$$V_{\beta,\mu}^n = n \mathcal{L}(W_{\beta,\mu}^n)(s) \mathcal{L}(F)(s) \delta_{s, s_{\beta,\mu}^n} = n \mathcal{L}(W_{\beta,\mu}^n * F)(s) \delta_{s, s_{\beta,\mu}^n}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $V_{\beta,\mu}^n$ не имеет сингулярностей как функция μ и β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого $n = n_0 + 1 \geq 1$ и $\beta \neq 0$ выполняется равенство $s_{\beta,\mu}^n = 0$, т.е. $\lambda - \mu_0 + \gamma g(n_0) = 0$. В этом случае

$$V_{\beta,\mu_0}^{n_0+1} = (n_0 + 1) e^{-\beta H_{\mu_0}(n_0)} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1 - e^{-s}}{s} \right] = (n_0 + 1) e^{-\beta H_{\mu_0}(n_0)} < \infty,$$

что и требовалось доказать.

С помощью полученной в утверждении 4 формулы можно легко найти внутреннее произведение $(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ для свободного бозона, когда

$$H_\mu(\omega) = \alpha\omega, \quad \alpha > 0.$$

В этом случае

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = (\beta Z)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-\beta\alpha(n-1)} - e^{-\beta\alpha n}}{\alpha n - \alpha(n-1)} = \frac{e^{\beta\alpha} - 1}{\beta\alpha} Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\beta\alpha n},$$

где

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta H_\mu(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\alpha n} = (1 - e^{-\beta\alpha})^{-1}.$$

Окончательно получаем

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = (\beta\alpha)^{-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Внутреннее произведение Боголюбова можно записать в виде*

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathcal{L}(F)(s) \delta_{s, s_{\beta, \mu}^{n+1}} \rho_n,$$

где ρ_n – распределение Гиббса, заданное формулой

$$\rho_n = \frac{e^{-\beta H_\mu(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta H_\mu(n)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем записать

$$\begin{aligned} (\hat{a}^\dagger, \hat{a}) &= Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} V_{\beta, \mu}^n = Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\beta H_\mu(n-1)} \mathcal{L}(F)(s_{\beta, \mu}^n) = \\ &= Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{-\beta H_\mu(n)} \mathcal{L}(F)(s_{\beta, \mu}^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathcal{L}(F)(s) \delta_{s, s_{\beta, \mu}^{n+1}} \rho_n, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Введем функцию распределения, ассоциированную с гиббсовским распределением:

$$\rho(\omega) = \sum_{\{n: n \leq \omega\}} \rho_n, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Функция $\rho(\omega)$ непрерывна справа и не убывает. С помощью соответствующей этой функции меры Лебега–Стилтьеса для любой интегрируемой функции $g(\omega): R \rightarrow R$ можно определить гиббсовское среднее

$$\langle g \rangle_G = \int g(\omega) d\rho(\omega).$$

Из этого определения и следствия 2 вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 3. *Имеет место формула*

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = \langle (\omega + 1) \mathcal{L}(F)(s_{\beta, \mu}^{\omega+1}) \rangle_G.$$

После сделанных замечаний можно получить требуемую оценку сверху для $(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $f(\omega)$ удовлетворяет условиям утверждения 2. Пусть, кроме того, $g_0 = \inf_{x \in [0, \infty)} g(x) < \infty$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} m e^{-\beta H_\mu(m)} = 0$ для любого $\mu \leq g\gamma_0$. Тогда для $\mu \leq g\gamma_0$ имеет место неравенство*

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) \leq (\beta\lambda)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для внутреннего произведения можно записать

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-\beta H_\mu(n-1)} - e^{-\beta H_\mu(n)}}{\beta(H_\mu(n) - H_\mu(n-1))} = Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-\beta H_\mu(n-1)} - e^{-\beta H_\mu(n)}}{\beta(\lambda - \mu + \gamma g(n-1))}.$$

Поскольку

$$n \frac{e^{-\beta H_\mu(n-1)} - e^{-\beta H_\mu(n)}}{\beta(\lambda - \mu + \gamma g(n-1))} \leq n \frac{e^{-\beta H_\mu(n-1)} - e^{-\beta H_\mu(n)}}{\beta(\lambda - \mu + \gamma g_0)},$$

то для $\mu \leq g\gamma_0$ получаем

$$\begin{aligned} (\hat{a}^\dagger, \hat{a}) &\leq (Z\beta\lambda)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n [e^{-\beta H_\mu(n-1)} - e^{-\beta H_\mu(n)}] = \\ &= (Z\beta\lambda)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)e^{-\beta H_\mu(n-1)} - ne^{-\beta H_\mu(n)} + e^{-\beta H_\mu(n-1)}]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta H_\mu(n-1)}$, и полагая $u_m = m e^{-\beta H_\mu(m)}$, приходим к неравенству

$$(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) \leq \frac{1}{\beta\lambda Z} \sum_{m=0}^{\infty} (u_m - u_{m+1}) + \frac{1}{\beta\lambda}.$$

Поскольку $\lim_{p \rightarrow \infty} u_{p+1} = 0$ и $u_0 = 0$, то

$$\sum_{m=0}^{\infty} (u_m - u_{m+1}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^p (u_m - u_{m+1}) = u_0 - \lim_{p \rightarrow \infty} u_{p+1} = 0,$$

откуда следует требуемое неравенство. Теорема 2 доказана.

Данный результат легко распространяется на случай конечного числа степеней свободы.

ТЕОРЕМА 3. Для бозевской системы с гамильтонианом (1) оценка сверху для внутреннего произведения Боголюбова при $\mu \leq \gamma g_0$ имеет вид

$$(\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k) \leq \frac{1}{\beta \lambda(k)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя ортонормированный базис $\{\psi_{n_1, n_2, \dots, n_M}\}$ пространства $\mathcal{H}_B^M$ для вычисления большой статистической суммы и отмечая, что операторы $\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k$ коммутируют с операторами $\hat{n}_i$ при всех $i \neq k$, получаем

$$(\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k) = Z_{\beta, \mu}^{-1}[\hat{H}] \sum_{\{n_i: i \neq k\}} e^{-\beta H_\mu(n_i)} \sum_{n_k=1}^{\infty} n_k \frac{e^{-\beta H_\mu(n_k-1)} - e^{-\beta H_\mu(n_k)}}{\beta(H_\mu(n_k) - H_\mu(n_k-1))}.$$

Отсюда следует, что

$$(\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k) \leq (\beta \lambda(k) Z_{\beta, \mu}[\hat{H}])^{-1} \sum_{\{n_i: i \neq k\}} e^{-\beta H_\mu(n_i)} \sum_{n_k=1}^{\infty} e^{-\beta H_\mu(n_k-1)} = \frac{1}{\beta \lambda(k)}.$$

Теорема 3 доказана.

4. ЛОКАЛЬНАЯ ГАУССОВА ДОМИНАНТНОСТЬ

Рассмотрим семейство операторов

$$\hat{H}(\{h_l\}) = \sum_{j=1}^M \lambda(j) (\hat{a}_j^\dagger - h_j^*)(\hat{a}_j - h_j) + \gamma \sum_{j=1}^M f(\hat{n}_j) \equiv H_0(\{h_l\}) + \gamma \sum_{j=1}^M f(\hat{n}_j),$$

где $h_j \in C$, $j \in I$.

Температурное среднее определяется формулой

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr}(\hat{A} e^{-\beta \hat{H}_\mu})}{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}_\mu}}.$$

Инвариантность модельной системы (1) при градиентных преобразованиях

$$\hat{a}_j^\dagger \rightarrow e^{i\theta} \hat{a}_j^\dagger, \quad \hat{a}_j \rightarrow e^{-i\theta} \hat{a}_j$$

ведет к правилам отбора

$$\langle \hat{a}_j^\dagger \rangle = \langle \hat{a}_j \rangle = 0.$$

ТЕОРЕМА 4 (локальная гауссова доминантность). Для $\mu \leq \gamma g_0$ и достаточно малых $\{h_l\}$ справедливо соотношение

$$\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}_\mu(\{h_l\})} \leq \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}_\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 и правил отбора следует, что для $\mu \leq \gamma g_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_j} \ln \operatorname{Tr} e^{-\beta \hat{H}_\mu(\{h_l\})} \Big|_{\{h_l=0\}} &= \beta \lambda(j) \langle \hat{a}_j^\dagger \rangle = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial h_j^* \partial h_j} \ln \operatorname{Tr} e^{-\beta \hat{H}_\mu(\{h_l\})} \Big|_{\{h_l=0\}} &= -\beta \lambda(j) + \beta^2 \lambda^2(j) (\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_j) \leq 0, \end{aligned}$$

т.е. функция $\operatorname{Tr} e^{-\beta \hat{H}_\mu(\{h_l\})}$ имеет локальный максимум в точке $\{h_l = 0\}$:

$$\operatorname{Tr} e^{-\beta \hat{H}_\mu(\{h_l\})} \leq \operatorname{Tr} e^{-\beta \hat{H}_\mu}$$

для всех достаточно малых $\{h_l\}$. Теорема 4 доказана.

Благодарности. Работа поддержана FONDECYT (Chile) (грант № 1010759) и РФФИ (проект № 02-01-00795).

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов.* Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ Д-781. Дубна: ОИЯИ, 1961.
- [2] *Д. П. Санкович.* Инфракрасные оценки и фазовый переход в модели неидеального бозе-газа. Сообщения ОИЯИ, Р17-88-348. Дубна: ОИЯИ, 1988.
- [3] *J. Fröhlich, B. Simon, T. Spencer.* Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 79.
- [4] *F. Dyson, E. Lieb, B. Simon.* Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 120.
- [5] *Д. П. Санкович.* ТМФ. 1989. Т. 79. С. 460.
- [6] *Д. П. Санкович.* ТМФ. 2001. Т. 126. С. 149.
- [7] *N. N. Bogolubov.* Phys. Abh. S. U. 1962. V. 1. P. 113.
- [8] *N. N. Bogolubov, Jr., D. P. Sankovich.* Phys. Lett. A. 1989. V. 137. P. 179.
- [9] *M. Corgini, D. P. Sankovich.* Mod. Phys. Lett. B. 1999. V. 13. P. 411.
- [10] *К. Хуанг.* Статистическая механика. М.: Мир, 1966.

Поступила в редакцию 24.I.2002 г.