Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Морозов, Г. Репке, А. Хелль, Кинетическая теория квантово-электродинамической плазмы в сильном электромагнитном поле. II. Ковариантное приближение среднего поля, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 1, 161–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:41:37

© 2002 г.

В. Г. Морозов*, Г. Рёпке†, А. Хёлль†

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КВАНТОВО- ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. II. КОВАРИАНТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Исходя из общего кинетического уравнения для фермионной подсистемы квантово-электродинамической плазмы выведено ковариантное кинетическое уравнение для матричной функции Вигнера в приближении среднего поля. Показано, что в квазиклассическом пределе уравнения для компонент функции Вигнера можно преобразовать в замкнутые кинетические уравнения для лоренц-инвариантных функций распределения частиц и античастиц.

Ключевые слова: релятивистская кинетическая теория, квантово-электродинамическая плазма, ковариантное приближение среднего поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей статье [1] нами был развит ковариантный подход кинетической теории квантово-электродинамической (КЭД) плазмы в сильном внешнем поле, который основан на обобщенном уравнении фон Неймана для неравновесного статистического оператора, заданного на пространственноподобных гиперплоскостях в пространстве Минковского. В данной работе мы рассмотрим ковариантное кинетическое уравнение для фермионной подсистемы в приближении среднего поля. В дальнейшем ссылки на формулы из статьи [1] будут обозначаться как (I.N), где N – номер формулы в этой статье.

Если не указано иначе, мы используем систему единиц, где $\hbar = c = 1$. Ненулевые компоненты метрического тензора: $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$.

Напомним некоторые обозначения из предыдущей статьи. Мы рассматриваем квантовую релятивистскую плазму, состоящую из заряженных фермионов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля. Для определенности будем считать эти

*Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет), Москва, Россия. E-mail: vmorozov@orc.ru

†Physics Department, University of Rostock, Rostock, Germany.
E-mail: hoell@darss.mpg.uni-rostock.de; gerd@darss.mpg.uni-rostock.de

фермионы электронами и позитронами, однако включение других фермионов (скажем, протонов), описываемых дополнительными полями Дирака, не представляет особых затруднений. Предполагается, что система находится в заданном внешнем электромагнитном поле, которое не обязательно является слабым.

В статье [1] одночастичная матрица плотности для фермионов была определена как среднее

$$N_{aa'}(x_\perp, x'_\perp; \tau) = \langle \hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) \rangle^\tau \equiv \text{Tr}(\hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) \varrho(n, \tau)), \quad (1.1)$$

где $\varrho(n, \tau)$ – неравновесный статистический оператор на гиперплоскости $\sigma_{n, \tau}$, которая характеризуется единичным времениподобным 4-вектором нормали n^μ и скалярным параметром $\tau = x \cdot n$, играющим роль “инвариантного времени”. Фермионный оператор плотности $\hat{N}_{aa'}$ в представлении Шредингера на гиперплоскости дается формулой

$$\hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp) = -\frac{1}{2}[\hat{\psi}_a(x_\perp), \hat{\psi}_{a'}(x'_\perp)], \quad (1.2)$$

где a, a' – спинорные индексы операторов поля Дирака. Поперечные и продольные по отношению к нормали n компоненты 4-вектора пространства-времени $x = \{x^\mu\}$ и других 4-векторов $V = \{V^\mu\}$ вводятся с помощью разложения

$$x^\mu = n^\mu \tau + x_\perp^\mu, \quad V^\mu = n^\mu V_\parallel + V_\perp^\mu, \quad (1.3)$$

где

$$V_\parallel = n \cdot V, \quad V_\perp^\mu = \Delta^\mu{}_\nu V^\nu, \quad \Delta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - n^\mu n_\nu. \quad (1.4)$$

Наш дальнейший анализ в значительной степени основан на антикоммутиационных соотношениях для операторов поля Дирака на пространственноподобных гиперплоскостях (см. (I.3.24) и (I.3.25))

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_a(\tau, x_\perp), \hat{\psi}_{a'}(\tau, x'_\perp)\} &= [\gamma_\parallel(n)]_{aa'} \delta^3(x_\perp - x'_\perp), \\ \{\hat{\psi}_a(\tau, x_\perp), \hat{\psi}_{a'}(\tau, x'_\perp)\} &= \{\hat{\psi}_a(\tau, x_\perp), \hat{\psi}_{a'}(\tau, x'_\perp)\} = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\delta^3(x_\perp) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} \delta(p \cdot n) \quad (1.6)$$

– трехмерная δ -функция на гиперплоскости, а матрица $\gamma_\parallel(n)$ определяется следующим разложением матриц Дирака:

$$\gamma^\mu = n^\mu \gamma_\parallel(n) + \gamma_\perp^\mu(n), \quad \gamma_\parallel(n) = n_\mu \gamma^\mu, \quad \gamma_\perp^\mu(n) = \Delta^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (1.7)$$

Как показано в работе [1], эффективный гамильтониан, описывающий фермионную подсистему в приближении среднего поля, можно записать в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_0^\tau(n) = \int_{\sigma_n} d\sigma : \hat{\psi} \left(-\frac{i}{2} \gamma_\perp^\mu(n) \vec{\nabla}_\mu + m \right) \hat{\psi} : + \int_{\sigma_n} d\sigma \hat{j}_\mu(x_\perp) \mathcal{A}^\mu(\tau, x_\perp). \quad (1.8)$$

Символ $\widehat{O}$ означает нормальное упорядочение в операторах, а пространственно-подобные производные $\overleftrightarrow{\nabla}_\mu = \overrightarrow{\nabla}_\mu - \overleftarrow{\nabla}_\mu$ определяются соотношениями

$$\partial_\mu = n_\mu \frac{\partial}{\partial \tau} + \nabla_\mu, \quad \nabla_\mu = \Delta_\mu{}^\nu \partial_\nu = \Delta_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x_\perp^\nu}. \quad (1.9)$$

В дальнейшем обозначение $G(\tau, x_\perp) \equiv G(n\tau + x_\perp)$ используется для любой функции $G(x)$ на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$.

Первый член в правой части (1.8) есть гамильтониан свободных фермионов на гиперплоскости, а второй член описывает их взаимодействие с полным электромагнитным полем $\mathcal{A}^\mu$. Тензор поля $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) + j_{\text{ext}}^\nu(x), \quad (1.10)$$

где $j_{\text{ext}}^\nu(x)$ — плотность заданного внешнего тока, а

$$j^\mu(x) = \langle \hat{j}^\mu(x_\perp) \rangle^\tau \quad (1.11)$$

— плотность поляризационного тока. Для электрон-позитронной плазмы оператор плотности тока дается выражением ($e < 0$)

$$\hat{j}^\mu(x_\perp) = e: \hat{\psi}(x_\perp) \gamma^\mu \hat{\psi}(x_\perp) :. \quad (1.12)$$

Если протоны рассматриваются как динамическая подсистема, то в оператор плотности тока нужно добавить соответствующий член.

Вообще говоря, полный гамильтониан системы содержит, кроме (1.8), гамильтониан свободных фотонов $\hat{H}_{\text{ЕМ}}(n)$ и оператор $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^\tau(n)$, который описывает взаимодействие между фермионами и фотонами. В приближении среднего поля этот оператор взаимодействия не учитывается.

При выводе кинетического уравнения для фермионов требуется вычислять коммутаторы полевых операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ с гамильтонианом (см. ниже). Член $\hat{H}_{\text{ЕМ}}(n)$, построенный только из фотонных операторов $\hat{A}_\perp^\mu$, не дает вклада в эти коммутаторы и, следовательно, может быть опущен. Это означает, что в рассматриваемом приближении динамика электромагнитного поля полностью определяется уравнениями Максвелла (1.10).

Наконец, выпишем выражение для калибровочно-инвариантной “одновременной” функции Вигнера на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$. Эта функция связана с одночастичной матрицей плотности (1.1) преобразованием Вигнера [1]

$$W_{aa'}(x_\perp, p_\perp; \tau) = \int d^4y \, e^{ip \cdot y} \delta(y \cdot n) \times \\ \times \exp \left\{ ie\Lambda \left(x_\perp + \frac{1}{2}y_\perp, x_\perp - \frac{1}{2}y_\perp; \tau \right) \right\} N_{aa'} \left(x_\perp + \frac{1}{2}y_\perp, x_\perp - \frac{1}{2}y_\perp; \tau \right), \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda(x_\perp, x'_\perp; \tau) &= \int_{x'_\perp}^{x_\perp} \mathcal{A}_{\perp\mu}(\tau, R_\perp) dR_\perp^\mu \equiv \\ &\equiv \int_0^1 ds (x_\perp^\mu - x_\perp'^\mu) \mathcal{A}_{\perp\mu}(\tau, x'_\perp + s(x_\perp - x'_\perp))\end{aligned}\quad (1.14)$$

—калибровочная функция. Нашей ближайшей задачей будет вывод кинетического уравнения для функции W в приближении среднего поля.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Удобно начать с уравнения движения для одночастичной матрицы плотности (1.1). Используя выражение (1.8) в качестве гамильтониана подсистемы фермионов, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N_{aa'}(x_\perp, x'_\perp; \tau) = -i \langle [\hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp), \hat{\mathcal{H}}_0^\tau(n)] \rangle^\tau. \quad (2.1)$$

Коммутатор в правой части легко вычисляется с помощью тождества

$$\begin{aligned}[\hat{N}_{aa'}(x_\perp, x'_\perp), :\hat{\psi}_b(y_\perp)\hat{\psi}_{b'}(y'_\perp):] &= (\gamma_\parallel)_{ab} \delta^3(x_\perp - y_\perp) \hat{N}_{b'a'}(y'_\perp, x'_\perp) - \\ &- (\gamma_\parallel)_{b'a'} \delta^3(x'_\perp - y'_\perp) \hat{N}_{ab}(x_\perp, y_\perp),\end{aligned}\quad (2.2)$$

которое следует из соотношений (1.5). После простых преобразований находим, что уравнение (2.1) можно записать в матричных обозначениях $N \equiv [N_{aa'}]$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} N(x_\perp, x'_\perp; \tau) &= -im[\gamma_\parallel, N(x_\perp, x'_\perp; \tau)] - \\ &- ie(\mathcal{A}_\parallel(\tau, x_\perp) - \mathcal{A}_\parallel(\tau, x'_\perp))N(x_\perp, x'_\perp; \tau) + \\ &+ (-i\nabla_\mu + e\mathcal{A}_{\perp\mu}(\tau, x_\perp))S^\mu N(x_\perp, x'_\perp; \tau) + \\ &+ (i\nabla'_\mu + e\mathcal{A}_{\perp\mu}(\tau, x'_\perp))N(x_\perp, x'_\perp; \tau)S^\mu,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где введены матрицы

$$S^\mu = \sigma^{\mu\nu} n_\nu, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) описывает эволюцию одночастичной матрицы плотности фермионов при времениподобных трансляциях гиперплоскостей $\sigma_{n,\tau}$. В системе отсчета, где $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ (для определенности будем называть эту специальную систему отсчета “лабораторной”), имеем $\tau = t$, поэтому уравнение (2.3) описывает эволюцию одночастичной матрицы плотности со временем. Отметим, что в рамках приближения среднего поля нет необходимости знать явное выражение для неравновесного статистического оператора $\varrho(n, \tau)$. Кинетическое уравнение следует непосредственно из уравнений движения для оператора плотности $\hat{N}_{aa'}$ с эффективным гамильтонианом (1.8).

Применяя преобразование Вигнера (1.13) к (2.3), получаем кинетическое уравнение для матрицы $W \equiv [W_{aa'}]$ в приближении среднего поля:

$$D_\tau W = -im[\gamma_\parallel, W] - \frac{i}{2}D_{\perp\mu}[S^\mu, W] - P_\mu\{S^\mu, W\}, \quad (2.5)$$

где введены операторы

$$\begin{aligned} D_\tau &= \frac{\partial}{\partial\tau} - e \int_{-1/2}^{1/2} ds n^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau, x_\perp - is\nabla_p) \nabla_p^\nu, \\ D_{\perp\mu} &= \nabla_\mu - e \int_{-1/2}^{1/2} ds \mathcal{F}_{\perp\mu\nu}(\tau, x_\perp - is\nabla_p) \nabla_p^\nu, \\ P_\mu &= p_{\perp\mu} - ie \int_{-1/2}^{1/2} s ds \mathcal{F}_{\perp\mu\nu}(\tau, x_\perp - is\nabla_p) \nabla_p^\nu \end{aligned} \quad (2.6)$$

и поперечный градиент в пространстве импульсов $\nabla_p^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial/\partial p_\perp^\nu$. Поперечная часть полного тензора электромагнитного поля определяется соотношением

$$\mathcal{F}_{\perp}^{\mu\nu} = \nabla^\mu \mathcal{A}_\perp^\nu - \nabla^\nu \mathcal{A}_\perp^\mu. \quad (2.7)$$

Еще раз подчеркнем, что функция Вигнера W , матрицы $\gamma_\parallel$, S^μ и операторы (2.6) определены на семействе гиперплоскостей $\sigma_{n,\tau}$. Тот факт, что n есть произвольный времениподобный единичный 4-вектор, отражает лоренц-ковариантность уравнения (2.5). Компоненты n^μ и n'^μ вектора нормали для одной и той же гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$ в двух различных системах отсчета связаны преобразованием $n'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu n^\nu$, которое соответствует преобразованию пространственно-временных координат $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Заметим, что в обеих системах отсчета параметр τ имеет одно и то же значение, поскольку $n \cdot x = n' \cdot x'$. Для любого заданного n существует специальная (“лабораторная”) система отсчета, в которой $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ и, следовательно, $\tau = t$. В приложении показано, что в “лабораторной” системе отсчета уравнение (2.5) сводится к кинетическому уравнению, полученному Бялинишки-Бирулой и др. [2] на основе другого подхода.

Несмотря на компактный вид, соотношение (2.5) является довольно сложным матричным уравнением. Более удобно работать с компонентами матричной функции Вигнера W , которые определяются ее разложением по полному базису в спинорном пространстве:

$$W = \frac{1}{4}(IW + \gamma_\mu \mathcal{W}^\mu + \gamma_5 \mathcal{W}_{(P)} + \gamma_5 \gamma_\mu \mathcal{W}_{(A)}^\mu + \sigma_{\mu\nu} \mathcal{W}^{\mu\nu}). \quad (2.8)$$

Здесь I – единичная матрица, а $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}^\mu$, $\mathcal{W}_{(P)}$, $\mathcal{W}_{(A)}^\mu$, $\mathcal{W}^{\mu\nu}$ – соответственно скалярная, векторная, псевдоскалярная, псевдовекторная и тензорная коэффициентные функции.

Используя правила вычисления следа матриц Дирака (см., например, [3]), легко проверить, что

$$\mathcal{W} = \text{tr}(W), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{W}^\mu = \text{tr}(\gamma^\mu W), \quad (2.10)$$

$$\mathcal{W}_{(P)} = \text{tr}(\gamma_5 W), \quad (2.11)$$

$$\mathcal{W}_{(A)}^\mu = \text{tr}(\gamma^\mu \gamma_5 W), \quad (2.12)$$

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^{\mu\nu} W), \quad (2.13)$$

где символ “tr” означает след по спинорным индексам. Система уравнений для коэффициентных функций выводится из кинетического уравнения (2.5) и соотношений (2.9)–(2.13). После простых преобразований имеем

$$D_\tau \mathcal{W} = 2(n_\alpha P_\beta - n_\beta P_\alpha) \mathcal{W}^{\alpha\beta}, \quad (2.14)$$

$$D_\tau \mathcal{W}^\mu = -(n^\mu D_{\perp\alpha} - n_\alpha D_\perp^\mu) \mathcal{W}^\alpha - 2\varepsilon^\mu_{\alpha\beta\lambda} n^\alpha P^\beta \mathcal{W}_{(A)}^\lambda - 4m \mathcal{W}^{\mu\alpha} n_\alpha, \quad (2.15)$$

$$D_\tau \mathcal{W}_{(P)} = 2im n_\alpha \mathcal{W}_{(A)}^\alpha + 2i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\varrho} n^\alpha P^\beta \mathcal{W}^{\lambda\varrho}, \quad (2.16)$$

$$D_\tau \mathcal{W}_{(A)}^\mu = -2\varepsilon^\mu_{\alpha\beta\lambda} n^\alpha P^\beta \mathcal{W}^\lambda + 2im n^\mu \mathcal{W}_{(P)} - (n^\mu D_{\perp\alpha} - n_\alpha D_\perp^\mu) \mathcal{W}_{(A)}^\alpha, \quad (2.17)$$

$$D_\tau \mathcal{W}^{\mu\nu} = (n^\mu P^\nu - n^\nu P^\mu) \mathcal{W} - m(n^\mu \mathcal{W}^\nu - n^\nu \mathcal{W}^\mu) + i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha P_\beta \mathcal{W}_{(P)} + \\ + (n^\mu D_{\perp\alpha} - n_\alpha D_\perp^\mu) \mathcal{W}^{\nu\alpha} - (n^\nu D_{\perp\alpha} - n_\alpha D_\perp^\nu) \mathcal{W}^{\mu\alpha}, \quad (2.18)$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ – тензор Леви-Чивита.

Структура уравнений (2.14)–(2.18) становится более наглядной, если записать эти уравнения через продольные и поперечные компоненты векторов и тензоров по отношению к гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$. Векторную и псевдовекторную коэффициентные функции можно записать в виде

$$\mathcal{W}^\mu = n^\mu \mathcal{W}_\parallel + \mathcal{W}_\perp^\mu, \quad \mathcal{W}_{(A)}^\mu = n^\mu \mathcal{W}_{\parallel(A)} + \mathcal{W}_{\perp(A)}^\mu, \quad (2.19)$$

где

$$\mathcal{W}_\parallel = n_\alpha \mathcal{W}^\alpha, \quad \mathcal{W}_{\parallel(A)} = n_\alpha \mathcal{W}_{(A)}^\alpha, \quad \mathcal{W}_\perp^\mu = \Delta^\mu_\alpha \mathcal{W}^\alpha, \quad \mathcal{W}_{\perp(A)}^\mu = \Delta^\mu_\alpha \mathcal{W}_{(A)}^\alpha. \quad (2.20)$$

Для тензорной функции $\mathcal{W}^{\mu\nu}$ имеем разложение

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = \mathcal{U}^\mu n^\nu - \mathcal{U}^\nu n^\mu + \mathcal{W}_\perp^{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

в котором 4-вектор $\mathcal{U}^\mu$ и тензор $\mathcal{W}_\perp^{\mu\nu}$ даются формулами

$$\mathcal{U}^\mu = n_\alpha \mathcal{W}^{\mu\alpha}, \quad \mathcal{W}_\perp^{\mu\nu} = \Delta^\mu_\alpha \Delta^\nu_\beta \mathcal{W}^{\alpha\beta}. \quad (2.22)$$

Теперь (2.14)–(2.18) преобразуются в следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
D_\tau \mathcal{W} &= -4P_\alpha \mathcal{U}^\alpha, \\
D_\tau \mathcal{W}_\parallel &= -D_{\perp\alpha} \mathcal{W}_\perp^\alpha, \\
D_\tau \mathcal{W}_\perp^\mu &= D_\perp^\mu \mathcal{W}_\parallel - 2\varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\lambda} n^\alpha P^\beta \mathcal{W}_{\perp(A)}^\lambda - 4m\mathcal{U}^\mu, \\
D_\tau \mathcal{W}_{(P)} &= 2im\mathcal{W}_{\parallel(A)} + 2i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\varrho} n^\alpha P^\beta \mathcal{W}_{\perp}^{\lambda\varrho}, \\
D_\tau \mathcal{W}_{\parallel(A)} &= 2im\mathcal{W}_{(P)} - D_{\perp\alpha} \mathcal{W}_{\perp(A)}^\alpha, \\
D_\tau \mathcal{W}_{\perp(A)}^\mu &= -2\varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\lambda} n^\alpha P^\beta \mathcal{W}_{\perp}^\lambda + D_\perp^\mu \mathcal{W}_{\parallel(A)}, \\
D_\tau \mathcal{U}^\mu &= -P^\mu \mathcal{W} + m\mathcal{W}_\perp^\mu - D_{\perp\alpha} \mathcal{W}_\perp^{\mu\alpha}, \\
D_\tau \mathcal{W}_{\perp}^{\mu\nu} &= i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha P_\beta \mathcal{W}_{(P)} - D_\perp^\mu \mathcal{U}^\nu + D_\perp^\nu \mathcal{U}^\mu.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Это представление ковариантного кинетического уравнения (2.5) оказывается особенно удобным в квазиклассическом пределе (см. ниже).

Кинетическое уравнение (2.5) и уравнения Максвелла (1.10) описывают самосогласованным образом динамические процессы в КЭД плазме в рамках приближения среднего поля, поскольку поляризационный ток (1.11) можно выразить через функцию Вигнера (см. (I.5.9)):

$$j^\mu(x) = e \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p \cdot n) \mathcal{W}^\mu(x_\perp, p_\perp; \tau)|_{\tau=x \cdot n}, \tag{2.24}$$

где $\mathcal{W}^\mu$ – векторная компонента (2.10) функции Вигнера.

Покажем, что уравнение (2.5) согласуется с законом сохранения заряда $\partial_\mu j^\mu = 0$. С этой целью определим для любой функции $G(x_\perp, p_\perp; \tau)$ преобразование

$$\overline{G}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p \cdot n) G(x_\perp, p_\perp; \tau)|_{\tau=x \cdot n}. \tag{2.25}$$

Тогда соотношение (2.24) примет компактный вид:

$$j^\mu(x) = e \overline{\mathcal{W}^\mu}(x). \tag{2.26}$$

Из (2.25) следует, что

$$\partial_\mu \overline{G}(x) = n_\mu \overline{\left(\frac{\partial G}{\partial \tau} \right)} + \nabla_\mu \overline{G}(x). \tag{2.27}$$

Заметим также, что для функций G , которые стремятся к нулю при $|p_\perp| \rightarrow \infty$,

$$\overline{D_\tau G} = n^\mu \partial_\mu \overline{G}, \quad \overline{D_\perp^\mu G} = \nabla^\mu \overline{G}, \quad \overline{P^\mu G} = \overline{p_\perp^\mu G}. \tag{2.28}$$

Таким образом, применяя преобразование (2.25) к уравнению (2.15), получим

$$n^\lambda \partial_\lambda j^\mu = -(n^\mu \nabla_\nu - n_\nu \nabla^\mu) j^\nu - 2e\varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\lambda} n^\alpha \overline{(p_\perp^\beta \mathcal{W}_{(A)}^\lambda)} - 4em \overline{\mathcal{W}^{\mu\nu}} n_\nu. \tag{2.29}$$

С другой стороны, мы можем записать

$$\partial_\mu j^\mu = n_\mu n^\lambda \partial_\lambda j^\mu + \nabla_\mu j^\mu.$$

Подставляя (2.29) и учитывая очевидные соотношения $n_\mu \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\lambda} n^\alpha = 0$, $n_\mu \overline{W}^{\mu\nu} n_\nu = 0$, видим, что $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Аналогичная процедура может быть использована для вывода других законов сохранения и уравнений баланса для локальных величин, таких как плотность потока массы, плотность магнитного момента и плотность момента импульса. Преимуществом формализма гиперплоскостей над другими подходами к кинетической теории КЭД плазмы в приближении среднего поля (см., например, [2], [4]) является то, что все уравнения баланса и законы сохранения будут иметь явно ковариантный вид.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

С точки зрения практических приложений теории представляет интерес изучение кинетических процессов в КЭД плазме в медленно меняющемся внешнем электромагнитном поле. Чтобы рассмотреть этот случай, введем постоянные $\hbar$ и c в уравнение (2.5) и операторы (2.6). Тогда кинетическое уравнение принимает вид

$$D_\tau W = -\frac{imc}{\hbar}[\gamma_\parallel, W] - \frac{i}{2}D_{\perp\mu}[S^\mu, W] - \frac{1}{\hbar}P_\mu\{S^\mu, W\}. \quad (3.1)$$

Мы также имеем следующие выражения для операторов с соответствующими разложениями по градиентам:

$$\begin{aligned} D_\tau &= \frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{e}{c} \int_{-1/2}^{1/2} ds n^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau, x_\perp - is\hbar\nabla_p) \nabla_p^\nu = \\ &= \frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{e}{c} n^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau, x_\perp) \nabla_p^\nu + \frac{e\hbar^2}{24c} (\nabla_\alpha \nabla_p^\alpha)^2 n^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau, x_\perp) \nabla_p^\nu + \dots, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} D_{\perp\mu} &= \nabla_\mu - \frac{e}{c} \int_{-1/2}^{1/2} ds \mathcal{F}_{\perp\mu\nu}(\tau, x_\perp - is\hbar\nabla_p) \nabla_p^\nu = \\ &= \nabla_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{F}_{\perp\mu\nu}(\tau, x_\perp) \nabla_p^\nu + \frac{e\hbar^2}{24c} (\nabla_\alpha \nabla_p^\alpha)^2 n^\mu \mathcal{F}_{\perp\mu\nu}(\tau, x_\perp) \nabla_p^\nu + \dots, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} P_\mu &= p_{\perp\mu} - \frac{ie\hbar}{c} \int_{-1/2}^{1/2} s ds \mathcal{F}_{\perp\mu\nu}(\tau, x_\perp - is\hbar\nabla_p) \nabla_p^\nu = \\ &= p_{\perp\mu} - \frac{e\hbar^2}{12c} (\nabla_\alpha \nabla_p^\alpha) \mathcal{F}_{\perp\mu\nu}(\tau, x_\perp) \nabla_p^\nu + \dots. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В дальнейшем ограничимся *локальным приближением*, т.е. все члены, содержащие производные тензора электромагнитного поля, будут опущены. Это приближение применимо, когда

$$\bar{\lambda}_B \ll l_{EM}, \quad (3.5)$$

где $\bar{\lambda}_B$ – средняя длина волны де Бройля для фермионов, а l_{EM} – характерная длина, на которой меняется электромагнитное поле в системе. Отметим, что неравенство (3.5) выполняется для КЭД плазмы, создаваемой лазерным излучением, поскольку в этом случае l_{EM} примерно равна длине волны поля излучения.

Итак, в локальном приближении имеем

$$D_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{e}{c} n^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \nabla_p^\nu, \quad D_{\perp\mu} = \nabla_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{F}_{\perp\mu\nu} \nabla_p^\nu, \quad P_\mu = p_{\perp\mu}, \quad (3.6)$$

так что уравнения (2.23) принимают вид (с подставленными $\hbar$ и c)

$$D_\tau \mathcal{W} = -\frac{4}{\hbar} p_{\perp\mu} \mathcal{U}^\mu, \quad (3.7)$$

$$D_\tau \mathcal{W}_\parallel = -D_{\perp\mu} \mathcal{W}_\perp^\mu, \quad (3.8)$$

$$D_\tau \mathcal{W}_\perp^\mu = D_\perp^\mu \mathcal{W}_\parallel - \frac{2}{\hbar} \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\lambda} n^\alpha p_\perp^\beta \mathcal{W}_{\perp(A)}^\lambda - \frac{4mc}{\hbar} \mathcal{U}^\mu, \quad (3.9)$$

$$D_\tau \mathcal{W}_{(P)} = i \frac{2mc}{\hbar} \mathcal{W}_{\parallel(A)} + i \frac{2}{\hbar} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\varrho} n^\alpha p_\perp^\beta \mathcal{W}_{\perp}^{\lambda\varrho}, \quad (3.10)$$

$$D_\tau \mathcal{W}_{\parallel(A)} = i \frac{2mc}{\hbar} \mathcal{W}_{(P)} - D_{\perp\mu} \mathcal{W}_{\perp(A)}^\mu, \quad (3.11)$$

$$D_\tau \mathcal{W}_{\perp(A)}^\mu = -\frac{2}{\hbar} \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\lambda} n^\alpha p_\perp^\beta \mathcal{W}_{\perp}^\lambda + D_\perp^\mu \mathcal{W}_{\parallel(A)}, \quad (3.12)$$

$$D_\tau \mathcal{U}^\mu = -\frac{1}{\hbar} p_\perp^\mu \mathcal{W} + \frac{mc}{\hbar} \mathcal{W}_\perp^\mu - D_{\perp\alpha} \mathcal{W}_{\perp}^{\mu\alpha}, \quad (3.13)$$

$$D_\tau \mathcal{W}_{\perp}^{\mu\nu} = \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha p_{\perp\beta} \mathcal{W}_{(P)} - D_\perp^\mu \mathcal{U}^\nu + D_\perp^\nu \mathcal{U}^\mu. \quad (3.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Хорошо известно, что в нерелятивистской кинетической теории условие (3.5) соответствует квазиклассическому пределу в кинетическом уравнении. В релятивистском случае имеет место иная ситуация. Из уравнений (3.7)–(3.14) легко заметить, что некоторые компоненты функции Вигнера обладают особенностями в пределе $\hbar \rightarrow 0$ и описывают квантовые эффекты типа рождения электрон-позитронных пар [5], [6]. Этот аспект “одновременного” формализма в квантовой электродинамике обсуждался Бялинишки-Бирулой и др. [2] при изучении дираковского вакуума в сильных внешних полях. Для КЭД плазмы ситуация несколько напоминает задачу о дираковском вакууме, но, вообще говоря, самосогласованное описание квантовых эффектов в плазме должно включать кинетику фотонов. Этот вопрос будет рассмотрен в последующей публикации.

Оставляя в стороне процесс образования пар, который играет незначительную роль в реальных экспериментах, имеет смысл рассмотреть квазиклассический предел ($\hbar \rightarrow 0$) в уравнениях для функций $\mathcal{W}^\mu$, определяющих поляризационный ток (2.24). Прежде всего заметим, что в правой части (3.7) можно исключить вектор $\mathcal{U}^\mu$ с помощью уравнения (3.9), из которого следует

$$p_{\perp\mu} \mathcal{U}^\mu = \frac{\hbar}{4mc} p_{\perp\mu} (D_\perp^\mu \mathcal{W}_\parallel - D_\tau \mathcal{W}_\perp^\mu). \quad (3.15)$$

Легко также видеть, что в пределе $\hbar \rightarrow 0$ уравнение (3.13) сводится к простому соотношению

$$\mathcal{W}_{\perp}^{\mu} = \frac{p_{\perp}^{\mu}}{mc} \mathcal{W}. \quad (3.16)$$

Таким образом, из (3.7) и (3.8) получаем замкнутую систему квазиклассических кинетических уравнений для $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}_{\parallel}$:

$$\begin{aligned} D_{\tau} \mathcal{W} - \frac{1}{m^2 c^2} p_{\perp \mu} D_{\tau} (p_{\perp}^{\mu} \mathcal{W}) + \frac{1}{mc} p_{\perp}^{\mu} D_{\perp \mu} \mathcal{W}_{\parallel} &= 0, \\ D_{\tau} \mathcal{W}_{\parallel} + \frac{1}{mc} D_{\perp \mu} (p_{\perp}^{\mu} \mathcal{W}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Зная $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}_{\parallel}$, можно вычислить функцию

$$\mathcal{W}^{\mu} = n^{\mu} \mathcal{W}_{\parallel} + \mathcal{W}_{\perp}^{\mu} = n^{\mu} \mathcal{W}_{\parallel} + \frac{p_{\perp}^{\mu}}{mc} \mathcal{W}, \quad (3.18)$$

а затем и поляризационный ток (2.24).

То, что квазиклассический поляризационный ток определяется двумя независимыми функциями $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}_{\parallel}$, имеет простое физическое объяснение. Действительно, этот ток есть сумма двух членов: тока частиц (электронов) и тока античастиц (позитронов), которые независимо движутся в среднем электромагнитном поле. Покажем, что уравнения (3.17) можно преобразовать в кинетические уравнения для функций распределения электронов и позитронов.

С помощью (3.6) легко проверить, что в квазиклассическом пределе выполняются соотношения

$$p_{\perp \mu} D_{\tau} p_{\perp}^{\mu} = -\frac{e}{c} n^{\mu} \mathcal{F}_{\mu \nu} p_{\perp}^{\nu}, \quad D_{\perp \mu} p_{\perp}^{\mu} = 0, \quad (3.19)$$

используя которые, можно записать уравнения (3.17) в более симметричном виде:

$$\begin{aligned} D_{\tau} \left(\frac{\epsilon(p_{\perp})}{mc^2} \mathcal{W} \right) + \frac{v_{\perp}^{\mu}}{c} D_{\perp \mu} \mathcal{W}_{\parallel} &= 0, \\ D_{\tau} \mathcal{W}_{\parallel} + \frac{v_{\perp}^{\mu}}{c} D_{\perp \mu} \left(\frac{\epsilon(p_{\perp})}{mc^2} \mathcal{W} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где введены дисперсионное соотношение для фермионов на гиперплоскости

$$\epsilon(p_{\perp}) = c \sqrt{m^2 c^2 - p_{\perp}^2} \equiv c \sqrt{m^2 c^2 - p_{\perp}^{\mu} p_{\perp \mu}} \quad (3.21)$$

и поперечная 4-скорость

$$v_{\perp}^{\mu} = \frac{c^2}{\epsilon(p_{\perp})} p_{\perp}^{\mu}. \quad (3.22)$$

Определим теперь функции распределения для электронов (w) и позитронов ($\bar{w}$) на гиперплоскости $\sigma_{n,\tau}$:

$$\begin{aligned} w(x_\perp, p_\perp; \tau) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\epsilon(p_\perp)}{mc^2} \mathcal{W}(x_\perp, p_\perp; \tau) + \mathcal{W}_\parallel(x_\perp, p_\perp; \tau) \right\}, \\ \bar{w}(x_\perp, p_\perp; \tau) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\epsilon(p_\perp)}{mc^2} \mathcal{W}(x_\perp, -p_\perp; \tau) - \mathcal{W}_\parallel(x_\perp, -p_\perp; \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Они удовлетворяют независимым уравнениям, которые следуют из (3.20):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{v_\perp^\mu}{c} \nabla_\mu \right) w - \frac{e}{c} \left(n^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{v_\perp^\mu}{c} \mathcal{F}_{\perp\mu\nu} \right) \nabla_p^\nu w &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{v_\perp^\mu}{c} \nabla_\mu \right) \bar{w} + \frac{e}{c} \left(n^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{v_\perp^\mu}{c} \mathcal{F}_{\perp\mu\nu} \right) \nabla_p^\nu \bar{w} &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В “лабораторной” системе отсчета, где $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ и $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$, получаем хорошо известные релятивистские уравнения Власова (см. приложение)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w + e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{p}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{w} - e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathbf{p}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{c}\mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}$ – вектор скорости частицы, а $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – средние электрическое и магнитное поля. Таким образом, уравнения (3.24) являются обобщением релятивистских уравнений Власова на случай, когда функции распределения для частиц и античастиц заданы на произвольном семействе гиперплоскостей $\sigma_{n,\tau}$.

Кинетические уравнения (3.24) описывают эволюцию функций распределения по отношению к “инвариантному времени” τ . Отметим, однако, что w и $\bar{w}$ можно рассматривать как функции пространственно-временной точки x и 4-вектора $p_\perp$, т.е.

$$w(x, p_\perp) \equiv w(x_\perp, p_\perp; \tau)|_{\tau=x \cdot n}, \quad \bar{w}(x, p_\perp) \equiv \bar{w}(x_\perp, p_\perp; \tau)|_{\tau=x \cdot n}. \quad (3.26)$$

Эта интерпретация функций распределения позволяет записать уравнения (3.24) в более компактном виде. Вводя единичный времениподобный 4-вектор

$$u^\mu = \frac{\epsilon(p_\perp)}{mc^2} \left(n^\mu + \frac{v_\perp^\mu}{c} \right), \quad (3.27)$$

легко проверить, что

$$\begin{aligned} u^\mu \partial_\mu w(x, p_\perp) &= u^\mu \nabla_\mu w(x, p_\perp) + (u \cdot n) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w(x_\perp, p_\perp; \tau) \right) \Big|_{\tau=x \cdot n}, \\ u^\mu \partial_\mu \bar{w}(x, p_\perp) &= u^\mu \nabla_\mu \bar{w}(x, p_\perp) + (u \cdot n) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{w}(x_\perp, p_\perp; \tau) \right) \Big|_{\tau=x \cdot n}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Производные по τ можно исключить с помощью (3.24). После простых преобразований приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} u^\mu \left(\partial_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \nabla_p^\nu \right) w(x, p_\perp) &= 0, \\ u^\mu \left(\partial_\mu + \frac{e}{c} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \nabla_p^\nu \right) \bar{w}(x, p_\perp) &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Чтобы выяснить смысл 4-вектора u^μ , входящего в эти уравнения, запишем выражение (3.27) в “лабораторной” системе отсчета. Тогда с учетом (3.22) находим

$$u^\mu = \left(\frac{E_p}{mc^2}, \frac{\mathbf{p}}{mc} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right), \quad (3.30)$$

откуда видно, что u^μ формально совпадает с 4-скоростью частицы, если ее 4-импульс p^μ удовлетворяет условию массовой поверхности $p^2 = m^2 c^2$.

Чтобы уравнения Максвелла (1.10) и кинетические уравнения (3.29) представляли замкнутую систему уравнений эволюции, описывающих КЭД-плазму в квазиклассическом приближении, остается записать поляризационный ток (2.24) через функции распределения w и $\bar{w}$. С этой целью удобно воспользоваться квазиклассическим результатом (3.16) для векторной компоненты функции Вигнера. Исключение $\mathcal{W}_\parallel$ и $\mathcal{W}$ с помощью формул (3.23) дает

$$\mathcal{W}^\mu(x, p_\perp) = \frac{mc^2}{\epsilon(p_\perp)} \{ u^\mu(p_\perp) w(x, p_\perp) - u^\mu(-p_\perp) \bar{w}(x, -p_\perp) \}, \quad (3.31)$$

так что выражение (2.24) для поляризационного тока принимает вид (с введенной постоянной Планка)

$$j^\mu(x) = e \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(p \cdot n) \frac{mc^2}{\epsilon(p_\perp)} u^\mu(p_\perp) [w(x, p_\perp) - \bar{w}(x, p_\perp)]. \quad (3.32)$$

С помощью кинетических уравнений (3.29) легко убедиться, что это выражение согласуется с законом сохранения $\partial_\mu j^\mu = 0$.

4. ИНВАРИАНТНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Покажем, что поляризационный ток (3.32) можно представить в таком виде, что в него не будет входить 4-вектор n . Прежде всего заметим, что δ -функцию $\delta(p \cdot n)$ можно заменить на $\delta(p \cdot n - \epsilon(p_\perp)/c)$, поскольку остальные функции под знаком интеграла не зависят от $p_\parallel = p \cdot n$. Тогда согласно тождеству

$$\int d^4 p \frac{\delta(p \cdot n - \epsilon(p_\perp)/c)}{\epsilon(p_\perp)} (\dots) = \frac{2}{c} \int_{p^0 > 0} d^4 p \delta(p^2 - m^2 c^2) (\dots) \quad (4.1)$$

для поляризационного тока (3.32) имеем

$$j^\mu(x) = 2emc \int_{p^0 > 0} \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(p^2 - m^2c^2) u^\mu(p_\perp) [w(x, p_\perp) - \bar{w}(x, p_\perp)]. \quad (4.2)$$

Далее, из (3.22) и (3.27) следует

$$u^\mu(p_\perp) = \frac{p^\mu}{mc} - \frac{n^\mu}{mc} \left[p \cdot n - \frac{\epsilon(p_\perp)}{c} \right]. \quad (4.3)$$

Таким образом, при условии, что $p^2 = m^2c^2$, имеем $u^\mu = p^\mu/mc$, и выражение (4.2) приводится к виду

$$j^\mu(x) = 2e \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^3} p^\mu [f(x, p) - \bar{f}(x, p)], \quad (4.4)$$

где введены функции распределения для частиц и античастиц на массовой поверхности:

$$\begin{aligned} f(x, p) &= \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2c^2) w(x, p_\perp), \\ \bar{f}(x, p) &= \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2c^2) \bar{w}(x, p_\perp). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ступенчатая функция $\theta(p^0)$ равна нулю при $p^0 < 0$ и единице при $p^0 > 0$.

Как видно из (4.4), функции $f(x, p)$ и $\bar{f}(x, p)$ играют роль лоренц-инвариантных квазиклассических функций распределения для электронов и позитронов. Кинетические уравнения для этих функций в приближении среднего поля можно вывести из уравнений (3.29). Умножая первое из уравнений (3.29) на $\theta(p^0) \delta(p^2 - m^2c^2)$ и снова используя тот факт, что на массовой поверхности $u^\mu = p^\mu/mc$, получим

$$\theta(p^0) \delta(p^2 - m^2c^2) p^\mu \left(\partial_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{F}_{\mu\nu} \nabla_p^\nu \right) w = 0. \quad (4.6)$$

Поперечный градиент в импульсном пространстве ∇_p^ν можно записать в виде

$$\nabla_p^\nu = \partial_p^\nu - n^\nu \frac{\partial}{\partial p_\parallel}, \quad (4.7)$$

где $\partial_p^\nu = g^{\nu\lambda} \partial / \partial p^\lambda$ и $p_\parallel = p \cdot n$. Поскольку w не зависит от $p_\parallel$, из (4.7) следует, что оператор ∇_p^ν в (4.6) можно заменить на ∂_p^ν . Наконец, с помощью очевидных соотношений

$$\partial_p^\nu [\theta(p^0) \delta(p^2 - m^2c^2)] = 2\theta(p^0) p^\nu \frac{\partial \delta(p^2 - m^2c^2)}{\partial p^2}, \quad p^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} p^\nu = 0$$

уравнение (4.6) преобразуется в соотношение

$$p^\mu \left(\partial_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \partial_p^\nu \right) f(x, p) = 0. \quad (4.8)$$

Аналогичное кинетическое уравнение для античастиц выводится точно таким же способом. В результате получаем

$$p^\mu \left(\partial_\mu + \frac{e}{c} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \partial_p^\nu \right) \bar{f}(x, p) = 0. \quad (4.9)$$

Формально уравнение (4.8) совпадает с хорошо известным релятивистским кинетическим уравнением для заряженных частиц в заданном электромагнитном поле (см., например, [7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы видим, что кинетические уравнения (4.8) и (4.9) не содержат никакой информации о семействе гиперплоскостей $\sigma_{n,\tau}$, которое использовалось при их выводе. Отметим, однако, что единственное решение этих уравнений существует только тогда, когда функции $f(x, p)$ и $\bar{f}(x, p)$ заданы на некоторой пространственноподобной гиперповерхности σ в пространстве Минковского. Чтобы сформулировать это “начальное условие”, мы должны вернуться к соотношениям (4.5); они выражают инвариантные функции распределения через функции w и $\bar{w}$, определенные на семействе гиперплоскостей $\sigma_{n,\tau}$. Лоренц-ковариантность теории проявляется в том, что “начальное условие” для $f(x, p)$ и $\bar{f}(x, p)$ можно задать с помощью *произвольного* семейства гиперплоскостей.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является кинетическое уравнение (2.5) для подсистемы фермионов КЭД плазмы в приближении среднего поля. Это уравнение является ковариантным обобщением кинетического уравнения, полученного ранее Бялиньски-Бирулой и др. [2], и сводится к последнему в специальной “лабораторной” системе отсчета. Ковариантная структура уравнения (2.5) особенно удобна для разложения матричной функции Вигнера по спинорному базису (2.8), которое позволяет разделить кинетические процессы в различных каналах. Другим достоинством этого уравнения является то, что его можно использовать для построения дальнейших приближений в ковариантной форме. Например, в квазиклассическом пределе получаются явно ковариантные кинетические уравнения для функций распределения частиц и античастиц.

Кинетические уравнения (2.23) описывают два физических механизма, приводящих к обмену энергией между электромагнитным полем и квантовыми подсистемами фермионов и фотонов. Первым механизмом является рождение электрон-позитронных пар в сильном электромагнитном поле. В работах [5], [6] этот процесс в КЭД плазме рассматривался с использованием сильно упрощенных кинетических моделей. Отметим, однако, что соотношения (2.23) представляют собой систему *связанных* уравнений для компонент полной матричной функции Вигнера, и, вообще говоря, процессы в различных каналах могут взаимодействовать. Это подтверждается анализом рождения пар из дираковского вакуума [2], когда приходится рассматривать уравнения для трех компонент функции Вигнера. Другим механизмом в приближении среднего поля является затухание Ландау, которое пока не изучено в контексте КЭД плазмы.

Для достижимых в настоящее время значений интенсивности лазерного излучения прямое рождение пар и затухание Ландау играют незначительную роль в кинетике КЭД плазмы. Наиболее важными видами взаимодействия между подсистемами являются тормозное излучение и поглощение фотонов фермионами в сильном электромагнитном поле [8]. Чтобы учесть этот механизм, нужно выйти за рамки приближения среднего поля. Это можно сделать путем разложения интегралов столкновений для фотонов и фермионов (см. (I.5.34) и (I.5.35)) по постоянной тонкой структуре α . Эффекты, связанные с поглощением и излучением фотонов в КЭД плазме, будут рассмотрены в следующей статье.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим уравнение (2.5) в “лабораторной” системе отсчета, где $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ и $\tau = x^0 = t$ ($c = \hbar = 1$). Вводя обычное обозначение $x^\mu = (t, \mathbf{r})$ для пространства-времени, имеем

$$x_\perp^\mu = (0, \mathbf{r}), \quad x_{\perp\mu} = (0, -\mathbf{r}), \quad p_\perp^\mu = (0, \mathbf{p}), \quad p_{\perp\mu} = (0, -\mathbf{p}).$$

Поперечные 4-градиенты по пространственно-временным и импульсным переменным записываются в “лабораторной” системе отсчета следующим образом:

$$\nabla_\mu = (0, \nabla), \quad \nabla^\mu = (0, -\nabla), \quad \nabla_{p\mu} = (0, \partial_p), \quad \nabla_p^\mu = (0, -\partial_p),$$

где $\nabla = \partial/\partial \mathbf{r}$ и $\partial_p = \partial/\partial \mathbf{p}$. В дальнейшем декартовы компоненты всех трехмерных векторов, тензоров и градиентов будут записываться с верхними латинскими индексами, принимающими значения от 1 до 3. Например, $\nabla^i = \partial/\partial r^i$ и $\partial_p^i = \partial/\partial p^i$. Предполагается суммирование по повторяющимся латинским индексам.

Средние электрическое и магнитное поля определяются обычным образом:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \nabla \mathcal{A}^0, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathcal{A}, \quad (\text{П.1})$$

или, что то же самое,

$$E^i = \mathcal{F}_{0i}, \quad B^i = \varepsilon^{ijk} \nabla^j \mathcal{A}^k, \quad (\text{П.2})$$

где ε^{ijk} – антисимметричный тензор с $\varepsilon^{123} = 1$. Отметим также, что ненулевые компоненты тензора (2.7) теперь даются формулой $\mathcal{F}_{\perp}^{ij} = \mathcal{F}_{\perp ij} = -(\nabla^i \mathcal{A}^j - \nabla^j \mathcal{A}^i)$.

Легко проверить, что в лабораторной системе отсчета операторы (2.6) можно записать как

$$D_\tau = D_t, \quad D_{\perp\mu} = (0, \mathbf{D}), \quad P_{\perp\mu} = (0, -\mathbf{P}), \quad (\text{П.3})$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + e \int_{-1/2}^{1/2} ds \mathbf{E}(t, \mathbf{r} + is \partial_p) \cdot \partial_p, \quad (\text{П.4})$$

$$\mathbf{D} = \nabla + e \int_{-1/2}^{1/2} ds \mathbf{B}(t, \mathbf{r} + is \partial_p) \times \partial_p, \quad (\text{П.5})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - ie \int_{-1/2}^{1/2} s ds \mathbf{B}(t, \mathbf{r} + is \partial_p) \times \partial_p. \quad (\text{П.6})$$

Наконец, в этой системе отсчета $\gamma_\parallel = \gamma^0 \equiv \beta$, а матрицы S^μ (см. (2.4)) выражаются через дираковские α -матрицы:

$$S^\mu = (0, -i\boldsymbol{\alpha}). \quad (\text{П.7})$$

Остается подставить выражения (П.3) и (П.7) в уравнение (2.5). Следуя работе [2], перепишем это уравнение для эрмитовой функции Вигнера $\widetilde{W} = W\gamma^0$, которая соответствует фермионному оператору плотности (ср. (1.2))

$$\widehat{N}_{aa'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2}[\hat{\psi}_a(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{a'}^\dagger(\mathbf{r}')].$$

Тогда уравнение (2.5) принимает вид

$$D_t \widetilde{W} = -im[\beta, \widetilde{W}] - \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \{\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{W}\} - i\mathbf{P} \cdot [\boldsymbol{\alpha}, \widetilde{W}]. \quad (\text{П.8})$$

Оно совпадает с кинетическим уравнением, полученным в работе [2] другим способом.

Покажем теперь, что в “лабораторной” системе отсчета квазиклассические кинетические уравнения (3.24) принимают вид (3.25). Прежде всего заметим, что в этой системе отсчета поперечная 4-скорость (3.22) записывается как $v_\perp^\mu = (0, \mathbf{v})$, где $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / E_p$ — трехмерный вектор скорости частицы с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией $E_p = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$. Тогда, используя приведенные выше выражения для поперечных 4-градиентов в “лабораторной” системе отсчета, находим, что

$$\begin{aligned} n^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} \nabla_p^\nu &= -\mathcal{F}_{0i} \partial_p^i = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \\ v_\perp^\mu \mathcal{F}_{\perp\mu\nu} \nabla_p^\nu &= -v^i \mathcal{F}_{ij} \partial_p^j = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Наконец, в “лабораторной” системе отсчета имеем очевидное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{v_\perp^\mu}{c} \nabla_\mu = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right). \quad (\text{П.10})$$

Подстановка выражений (П.9) и (П.10) в (3.24) приводит к кинетическим уравнениям (3.25).

Благодарности. В.Г. Морозов и А. Хёлль признательны фонду Deutsche Forschungsgemeinschaft за поддержку этой работы. А. Хёлль выражает благодарность фонду Studienstiftung des deutschen Volkes за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] В. Г. Морозов, Г. Рёнке, А. Хёлль. ТМФ. 2002. Т. 131. № 3. С. 432.
- [2] I. Bialynicki-Birula, P. Górnicki, J. Rafelski. Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1825.
- [3] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. Квантовая теория поля. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.
- [4] G. R. Shin, J. Rafelski. Phys. Rev. A. 1993. V. 48. P. 4639.
- [5] C. D. Roberts, S. M. Schmidt. Progr. Part. Nucl. Phys. 2000. V. 45. P. 1.
- [6] J. C. R. Bloch, V. A. Mizerny, A. V. Prozorkevich, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, S. A. Smolyansky, D. V. Vinnik. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 116011.
- [7] С. де Гроот, В. ван Леувен, Х. ван Верт. Релятивистская кинетическая теория. М.: Мир, 1983.
- [8] P. L. Shkolnikov et al. Appl. Phys. Lett. 1997. V. 71. P. 3471.

Поступила в редакцию 11.I.2002 г.