Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Денисов, Исследование эффективного пространства-времени нелинейной электродинамики вакуума в поле магнитного диполя, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 2, 211–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 04:03:59

© 2002 г.

В. И. Денисов*

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ВАКУУМА В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

В параметризованной постмаксвелловской электродинамике вакуума найден метрический тензор эффективного псевдориманова пространства-времени для электромагнитной волны, распространяющейся в магнитном дипольном и гравитационном полях нейтронной звезды. На основе анализа изотропных геодезических этого пространства вычислены углы нелинейно-электродинамического и гравитационного искривлений лучей для электромагнитных волн, распространяющихся в плоскости магнитного экватора звезды.

Показано, что для всех нелинейных теорий, у которых постмаксвелловские параметры не совпадают, скорость распространения электромагнитных сигналов во внешних полях и лучи, по которым они распространяются, зависят от поляризации электромагнитных волн. Для двух главных поляризационных состояний электромагнитных сигналов вычислена разность времен распространения этих сигналов от источника до детектора.

Ключевые слова: нелинейная электродинамика вакуума, эффективное пространство-время, нейтронная звезда, искривление лучей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], [2], любому физическому полю соответствует некоторая геометрия, называемая естественной, именно такая, что в отсутствие взаимодействия с другими полями фронт свободной волны этого физического поля движется по геодезическим естественного пространства-времени. Вопрос о выборе естественной геометрии — это вопрос о том, посредством какого эффективного метрического тензора свертываются старшие производные в плотности лагранжиана. Вполне возможна отмечавшаяся еще Лобачевским [3] ситуация, когда различные физические явления будут описываться в терминах различных естественных геометрий.

Поэтому в сформулированных в некотором псевдоримановом пространстве-времени нелинейных моделях, содержащих нелинейность при старших производных, распрос-

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: denisov@srd.sinp.msu.ru

транение фронта волны физического поля будет происходить по геодезическим эффективным пространства-времени, метрический тензор которого зависит от метрического тензора исходного псевдориманова пространства-времени и полевых переменных этого физического поля.

Все это в полной мере относится и к нелинейной теории электромагнитного поля. В теории поля рассматривается несколько различных моделей нелинейной электродинамики вакуума. В случае слабых полей их лагранжиан в псевдоевклидовом пространстве-времени может быть записан [4] в параметризованном постмаксвелловском виде, аналогичном постньютоновскому разложению [5], применяющемуся в теории гравитации:

$$L = \frac{1}{8\pi} \{ (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \xi[\eta_1(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4\eta_2(\mathbf{B}\mathbf{E})^2] \} + \\ + O(\eta\xi^2\mathbf{B}^6) - \rho\varphi + \frac{1}{c}(\mathbf{j}\mathbf{A}). \quad (1)$$

Здесь $\xi = 1/B_q^2$, $B_q = m^2c^3/e\hbar = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс – характерное квантовоэлектродинамическое значение, а величина безразмерных постмаксвелловских параметров η_1 и η_2 зависит от выбора модели нелинейной электродинамики вакуума.

В частности, в нелинейной электродинамике Гейзенберга–Эйлера [6] параметры η_1 и η_2 имеют вполне конкретные значения $\eta_1 = \alpha/(45\pi) = 5.1 \cdot 10^{-5}$, $\eta_2 = 7\alpha/(180\pi) = 9.0 \cdot 10^{-5}$, в то время как в теории Борна–Инфельда [7] $\eta_1 = \eta_2 = a^2 B_q^2/4$, причем для постоянной a^2 известна лишь оценка снизу: $a^2 > 1.2 \cdot 10^{-32}$ Гс $^{-2}$.

Наиболее ярко нелинейные свойства электродинамики вакуума должны проявляться в сильных электромагнитных полях. Такие поля макроскопических размеров в природе существуют только в окрестности нейтронных звезд. В частности, астрофизические наблюдения показывают, что у многих пульсаров магнитное поле на поверхности достигает значений $10^{12} \div 10^{13}$ Гс, а у недавно открытых магнетаров 10^{15} Гс.

По этой причине мы будем рассматривать основные нелинейно-электродинамические эффекты, которые возникают при распространении электромагнитных волн в магнитном поле нейтронных звезд.

Так как нейтронные звезды обладают значительным гравитационным полем, то выражение (1) следует записать в общековариантном виде:

$$L = \frac{\sqrt{-g}}{32\pi} \{ 2J_2 + \xi[(\eta_1 - 2\eta_2)J_2^2 + 4\eta_2 J_4] \} + O(\eta\xi^2\mathbf{B}^6) - \frac{\sqrt{-g}}{c} j^n A_n, \quad (2)$$

где g – определитель метрического тензора исходного псевдориманова пространства-времени, а $J_2 = F_{ik}F^{ki}$ и $J_4 = F_{ik}F^{km}F_{mi}F^{li}$ – независимые инварианты тензора электромагнитного поля F_{ik} .

Система уравнений электромагнитного поля нелинейной электродинамики вакуума с плотностью лагранжиана (2) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^n} \{ \sqrt{-g} Q^{mn} \} = -\frac{4\pi}{c} j^m, \\ \frac{\partial F_{mn}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x^n} = 0, \quad (3)$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$Q^{mn} = [1 + \xi(\eta_1 - 2\eta_2)J_2]F^{mn} + 4\xi\eta_2 F^{ml}F_{lk}F^{kn}.$$

Найдем метрический тензор эффективного пространства-времени нелинейной электродинамики вакуума с плотностью функции Лагранжа (2) и проанализируем основные эффекты, которые возникают при прохождении слабой электромагнитной волны через магнитное дипольное и гравитационное поля нейтронной звезды. В качестве метрического тензора исходного псевдориманова пространства-времени будем использовать решение Шварцшильда

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{rr} = -\frac{r}{r - r_g}, \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (4)$$

где r_g – гравитационный радиус нейтронной звезды.

В рассматриваемой нами задаче имеются два малых параметра: r_g/r и $\eta_{1,2}\xi\mathbf{B}^2$. Проведем вычисление основных нелинейно-электродинамических и гравитационных эффектов с квадратичной точностью по параметру r_g/r и линейной по параметру $\eta_{1,2}\xi\mathbf{B}^2$.

2. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

В линейном приближении решение уравнений (3), описывающее дипольное магнитное поле нейтронной звезды, имеет вид

$$F_{31}^{(0)} = -\frac{|\mathbf{m}|}{r^2} \sin^2 \theta, \quad F_{32}^{(0)} = \frac{2|\mathbf{m}|}{r} \sin \theta \cos \theta, \quad (5)$$

где $\mathbf{m}$ – магнитный дипольный момент.

Найдем теперь уравнение Гамильтона–Якоби, которому удовлетворяют лучи слабой высокочастотной электромагнитной волны, распространяющейся в гравитационном (4) и магнитном (5) полях нейтронной звезды.

Тензор электромагнитного поля, входящий в уравнения (3), в этом случае следует представить в виде суммы дипольного магнитного поля $F_{ik}^{(0)}$ звезды (5) и поля слабой электромагнитной волны f_{ik} : $F_{ik} = F_{ik}^{(0)} + f_{ik}$.

В линейном приближении по слабой электромагнитной волне f_{ik} уравнения (3) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^n} \{ \sqrt{-g} Q_{(1)}^{mn} \} &= 0, \\ \frac{\partial f_{mn}}{\partial x^k} + \frac{\partial f_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial f_{km}}{\partial x^n} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{(1)}^{mn} &= [1 + \xi(\eta_1 - 2\eta_2)J_2^{(0)}]f^{mn} + 4\xi\eta_2 [f^{ml}F_{lk}^{(0)}F_{(0)}^{kn} + \\ &+ F_{(0)}^{ml}f_{lk}F_{(0)}^{kn} + F_{(0)}^{ml}F_{lk}^{(0)}f^{kn}] + [2\xi(\eta_1 - 2\eta_2)f_{ik}F_{(0)}^{ki}]F_{(0)}^{mn}. \end{aligned}$$

Так как нас интересует прежде всего воздействие гравитационного и магнитного полей звезды на лучи слабой электромагнитной волны, то, используя систему уравнений (6), найдем уравнение, которому должен удовлетворять в рассматриваемом случае эйконал. Для этого представим тензор f_{nm} слабой электромагнитной волны в виде

$$f_{nm} = A_{nm}(\mathbf{r}, t) e^{iS(\mathbf{r}, t)}, \quad (7)$$

где, как обычно, амплитуда $A_{nm}(\mathbf{r}, t)$ является медленно изменяющейся функцией координат и времени, а эйконал $S(\mathbf{r}, t)$ – быстро изменяющейся функцией.

В результате производные от S оказываются чрезвычайно большими величинами, так что выполняется условие

$$\left| A_{nm}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial S}{\partial x^l} \right| \gg \left| \frac{\partial A_{nm}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^l} \right|.$$

Подставим выражение (7) в уравнения (6). Учтем, что для точек, находящихся вне звезды, по порядку величины выполняются соотношения

$$\frac{\partial F_{nm}^{(0)}}{\partial r} \sim \frac{F_{nm}^{(0)}}{R}, \quad \left| \frac{\partial g_{nm}^{(0)}}{\partial r} \right| \ll \left| \frac{g_{nm}^{(0)}}{R} \right|, \quad \frac{\partial S}{\partial r} \sim \frac{S}{\lambda},$$

где R – радиус звезды, λ – длина волны.

Так как для высокочастотного электромагнитного излучения $R/\lambda \gg 1$, то при дифференцировании $Q_{(1)}^{nm}$ в уравнениях (6) следует оставить только производные от эйконала S . В результате линейно-независимые уравнения системы (6) примут вид однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & [1 + \xi(\eta_1 - 2\eta_2) J_2^{(0)}] f^{\mu n} \frac{\partial S}{\partial x^n} + \\ & + 4\xi\eta_2 [f^{\mu l} F_{lk}^{(0)} F_{(0)}^{kn} + F^{\mu l} f_{lk} F_{(0)}^{kn} + F_{(0)}^{\mu l} F_{lk}^{(0)} f^{kn}] \frac{\partial S}{\partial x^n} + \\ & + [2\xi(\eta_1 - 2\eta_2) f_{ik} F_{(0)}^{ki}] F_{(0)}^{\mu n} \frac{\partial S}{\partial x^n} = 0, \\ & f_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^0} + f_{\beta 0} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} + f_{0\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Домножая первое уравнение системы (8) на $\partial S / \partial x^0$ и исключая из него компоненты $f_{\alpha\beta}$ с помощью второго уравнения, приходим к системе уравнений вида

$$\Pi^{\mu\beta} f_{0\beta} = 0.$$

Уравнение эйконала, как известно, является следствием условия

$$\det \|\Pi^{\mu\beta}\| = 0.$$

Учитывая, что в нашей задаче отличными от нуля компонентами тензора $F_{ik}^{(0)}$ являются только компоненты (5), и используя алгоритм, развитый в работах [8]–[10], после

сокращения на несущественный множитель получаем следующее уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{r}{r-r_g} \left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \right. \\ & \quad - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{4\eta_1 \xi \mathbf{m}^2}{r^6} \left[\left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + O(\eta \xi^2 B^4) \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{r}{r-r_g} \left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \right. \\ & \quad - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{4\eta_2 \xi \mathbf{m}^2}{r^6} \left[\left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + O(\eta \xi^2 B^4) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в зависимости от поляризации слабой электромагнитной волны ее эй-конал будет удовлетворять одному из двух уравнений Гамильтона–Якоби:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{r-r_g} \left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \\ & \quad - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{4\eta_{1,2} \xi \mathbf{m}^2}{r^6} \left[\left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] = O(\eta \xi^2 B^4), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\eta_{1,2} = \eta_2$ для электромагнитной волны, поляризованной в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{k}$, и $\eta_{1,2} = \eta_1$ для электромагнитной волны, поляризованной перпендикулярно к этой плоскости.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ МЕТРИКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

Сравнивая уравнение (9) с уравнением Гамильтона–Якоби в общем виде

$$g^{mn} \frac{\partial S}{\partial x^m} \frac{\partial S}{\partial x^n} = 0,$$

найдем компоненты метрического тензора эффективного пространства-времени для электромагнитных волн, распространяющихся в поле нейтронной звезды:

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{r}{r-r_g}, \quad g^{rr} = -1 + \frac{r_g}{r} + \frac{4\eta_{1,2} \xi \mathbf{m}^2}{r^6} \sin^2 \theta, \\ g^{\theta\theta} &= -\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{16\eta_{1,2} \xi \mathbf{m}^2}{r^6} \cos^2 \theta \right), \quad g^{r\theta} = -\frac{8\eta_{1,2} \xi \mathbf{m}^2}{r^7} \sin \theta \cos \theta, \\ g^{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[1 - \frac{4\eta_{1,2} \xi \mathbf{m}^2}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя эти выражения, несложно вычислить компоненты тензора Риччи для пространства с метрическим тензором (10):

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -\frac{24\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2(5+12\cos^2\theta)}{r^8}, & R_{r\theta} &= -\frac{48\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2\sin\theta\cos\theta}{r^7}, \\ R_{\theta\theta} &= -\frac{12\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2(3+7\cos^2\theta)}{r^6}, & R_{\varphi\varphi} &= -\frac{60\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta}{r^6}. \end{aligned}$$

Отметим, что скалярная кривизна этого пространства также отлична от нуля:

$$R = R_{ik}g^{ik} = \frac{216\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2(1+2\cos^2\theta)}{r^8}.$$

Следует, однако, подчеркнуть, что эффективное пространство-время при $\eta_1 \neq \eta_2$ не является универсальным даже для электродинамики, так как его воздействие на распространение электромагнитных волн зависит от их состояния поляризации.

В результате во внешних электромагнитных полях возникает эффект двулучепреломления: скорость распространения электромагнитных волн становится зависящей от их поляризации. И только в тех нелинейных моделях электродинамики вакуума, где $\eta_1 = \eta_2$, метрический тензор (10) в рассматриваемом приближении становится одинаковым для всех электромагнитных волн независимо от их поляризации. Примером такой теории является теория Борна–Инфельда.

4. УРАВНЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ЛУЧЕЙ

Найдем решение уравнений (9) для лучей, лежащих в плоскости магнитного экватора нейтронной звезды. Поместим начало координат в центр нейтронной звезды и сориентируем ось z вдоль вектора дипольного магнитного момента $\mathbf{m}$. В плоскости магнитного экватора $\theta = \pi/2$ введем полярные координаты r и φ .

Тогда уравнение Гамильтона–Якоби для лучей, лежащих в плоскости $\theta = \pi/2$, принимает вид

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{r^2}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \\ + \frac{4\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{r^6} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, получим

$$S = -\mathcal{E}_0 t + \alpha \varphi \pm \int^r dr \sqrt{f(r)}, \quad (11)$$

где знак плюс соответствует распространению электромагнитной волны от нейтронной звезды, а знак минус – к звезде, $\mathcal{E}_0$ и α – произвольные постоянные и введено обозначение

$$f(r) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} \left(1 + \frac{2r_g}{r} + \frac{3r_g^2}{r^2} + \frac{4\xi\eta_{1,2}\mathbf{m}^2}{r^6}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2} \left(1 + \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{r^2}\right). \quad (12)$$

Рассмотрим некоторый луч электромагнитной волны частоты ω_0 , начинающийся на пространственной бесконечности и имеющий прицельное расстояние $b_{1,2}$. Если этот луч обходит нейтронную звезду в направлении по часовой стрелке, то константы интегрирования $\mathcal{E}_0$ и α , входящие в выражения (11) и (12), принимают вид

$$\mathcal{E}_0 = \omega_0, \quad \alpha = -\frac{\omega_0 b_{1,2}}{c}. \quad (13)$$

Уравнение луча в аналитическом виде можно получить, если продифференцировать выражение (11) по α , приравнять результат некоторой константе φ_0 и учесть соотношения (13):

$$\varphi = \varphi_0 \mp \frac{\omega_0 b_{1,2}}{c} \int^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(r)}} \left(1 + \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{r^2} \right). \quad (14)$$

Однако исследовать его в таком виде очень сложно. Поэтому продифференцируем равенство (14) по r . Переходя к вспомогательной переменной $u = 1/r$, с принятой точностью будем иметь

$$b_{1,2}^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = 1 + 4\xi\eta_{1,2}\mathbf{m}^2 u^6 - b_{1,2}^2 u^2 (1 - r_g u). \quad (15)$$

Из этого выражения несложно найти перигентр луча – минимальное расстояние от нейтронной звезды до луча. Действительно, записывая условие $du/d\varphi = 0$ и решая полученное уравнение методом последовательных приближений, получим

$$r_{\min} = b_{1,2} \left(1 - \frac{r_g}{2b_{1,2}} - \frac{2\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{b_{1,2}^6} - \frac{3r_g^2}{8b_{1,2}^6} \right). \quad (16)$$

Решение уравнения (15) будем искать методом последовательных приближений. В нулевом приближении по малым параметрам $r_g u$ и $\xi\mathbf{m}^2 u^6$ это уравнение принимает вид

$$b_{1,2}^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = 1 - b_{1,2}^2 u^2.$$

Его решением является прямая $u = 1/r = \sin(\varphi + \varphi_0)/b_{1,2}$, проходящая на расстоянии $b_{1,2}$ от начала координат под углом $-\varphi_0$ к оси x .

Для получения уравнения луча $u = u(\varphi)$ с большей точностью представим функцию u в виде

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{b_{1,2}} [V + W \sin \Psi(\varphi)]. \quad (17)$$

Подставляя это выражение в уравнение (15) и приравнявая члены, имеющие одинаковый порядок малости, получаем

$$\begin{aligned} V_{1,2} &= \frac{r_g}{2b_{1,2}}, \quad W_{1,2} = 1 + \frac{2\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{b_{1,2}^6} + \frac{5r_g^2}{8b_{1,2}^6}, \\ \Psi(\varphi)_{1,2} &= \varphi + \psi_{1,2} + \frac{r_g}{2b_{1,2}} \cos(\varphi + \psi_{1,2}) - \\ &\quad - \frac{r_g^2}{32b_{1,2}^2} [30(\varphi + \psi_{1,2}) + \sin 2(\varphi + \psi_{1,2})] - \\ &\quad - \frac{\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{16b_{1,2}^6} [60(\varphi + \psi_{1,2}) + \sin 4(\varphi + \psi_{1,2}) - 16 \sin 2(\varphi + \psi_{1,2})], \end{aligned} \quad (18)$$

где $\psi_{1,2}$ — постоянная интегрирования.

Для нахождения этой постоянной предположим, что источник гамма-излучения находится в точке $r = 1/u = R_0$, $\varphi = \pi$. Тогда с требуемой точностью приходим к выражению

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} = & -q_{1,2} + \frac{r_g}{2b_{1,2}} \cos q_{1,2} + \frac{3r_g^2}{32b_{1,2}^2} [10(\pi - q_{1,2}) + \sin 2q_{1,2}] + \\ & + \frac{\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{16b_{1,2}^6} [60(\pi - q_{1,2}) - \sin 4q_{1,2} + 16 \sin 2q_{1,2}], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$q_{1,2} = \arcsin \left[\frac{b_{1,2}}{R_0} \left(1 - \frac{2\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{b_{1,2}^6} - \frac{5r_g^2}{8b_{1,2}^2} \right) - \frac{r_g}{2b_{1,2}} \right].$$

Следует отметить, что источник, находящийся в точке $r = R_0$, $\varphi = \pi$, будет лежать на луче, имеющем прицельное расстояние $b_{1,2}$, если и только если $R_0 \geq r_{\min}$, где $r_{\min}$ определено соотношением (16).

Из выражений (17)–(19) следует, что в тех моделях нелинейной электродинамики вакуума, где $\eta_1 \neq \eta_2$, электромагнитные волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющие одинаковые прицельные расстояния $b_1 = b_2$, распространяются по разным лучам.

Найдем углы $\delta\varphi_{1,2}$ нелинейно-электродинамического и гравитационного искривлений лучей в магнитном дипольном и гравитационном полях нейтронной звезды. Предположим, что детектор высокочастотного электромагнитного излучения расположен на рассматриваемом луче с другой стороны нейтронной звезды по отношению к источнику излучения на расстоянии R_1 от нее. Угловую координату $\varphi_{1,2}$ этого детектора можно найти из трансцендентного уравнения $V + W \sin \Psi(\varphi_{1,2}) = b_{1,2}/R_1$. Решая его методом последовательных приближений по малым параметрам $r_g/b_{1,2}$ и $\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2/b_{1,2}^6$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} = & p_{1,2} - \psi_{1,2} - \frac{r_g}{2b_{1,2}} \cos p_{1,2} + \frac{3r_g^2}{32b_{1,2}^2} (10p_{1,2} - \sin 2p_{1,2}) + \\ & + \frac{\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{16b_{1,2}^6} (60p_{1,2} + \sin 4p_{1,2} - 16 \sin 2p_{1,2}), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$p_{1,2} = \arcsin \left[\frac{b_{1,2}}{R_1} \left(1 - \frac{2\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{b_{1,2}^6} - \frac{5r_g^2}{8b_{1,2}^2} \right) - \frac{r_g}{2b_{1,2}} \right]. \quad (21)$$

Рассмотрим две электромагнитные волны, одна из которых поляризована в плоскости магнитного экватора нейтронной звезды, а другая — перпендикулярно этой плоскости, распространяющиеся по лучам, имеющим при $R_0 \rightarrow \infty$ одинаковые прицельные параметры $b_1 = b_2 = b$. Подставляя $R_1 = \infty$ в выражения (20), (21) и ограничиваясь принятой нами точностью, найдем углы искривления этих лучей:

$$\delta\varphi_{1,2} = -\frac{2r_g}{b} - \frac{15\pi r_g^2}{16b^2} - \frac{15\pi\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{4b^6}. \quad (22)$$

Первые два слагаемых в этом выражении дают гравитационное искривление луча [11], а последнее – нелинейно-электродинамическое [12]. Знак минус в выражении (22) показывает, что гравитационное и магнитное поля нейтронной звезды в плоскости магнитного экватора действуют на электромагнитные волны как собирающая линза.

Угол $\delta\varphi$ между асимптотами этих двух лучей при $R_1 = \infty$ будет равен

$$\delta\varphi = \delta\varphi_1 - \delta\varphi_2 = \frac{15\pi(\eta_2 - \eta_1)\xi\mathbf{m}^2}{4b^6}.$$

Таким образом, в нелинейных моделях электродинамики вакуума, для которых $\eta_2 \neq \eta_1$, угол $\delta\varphi \neq 0$.

5. ЗАКОН РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СИГНАЛА ПО ЛУЧУ

Закон движения электромагнитного сигнала $T = T(r)$ по лучу (17) можно найти, если продифференцировать выражение (11) по $\mathcal{E}_0$, приравнять результат некоторой константе t_0 и учесть соотношения (13):

$$T = t_0 \pm \frac{\omega_0}{c^2} \int^r \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} \left(1 + \frac{2r_g}{r} + \frac{3r_g^2}{r^2} + \frac{4\xi\eta_{1,2}\mathbf{m}^2}{r^6} \right).$$

Дифференцируя последнее равенство по r и учитывая выражения (15) и (18), несложно получить

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\Psi} = & -\frac{1}{cb_{1,2}u^2} \left(1 + \frac{2\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{b_{1,2}^6} + \frac{r_g^2}{2b_{1,2}^2} \right) - \frac{3r_g}{2cb_{1,2}u} - \\ & - \frac{b_{1,2}}{c} \left[\frac{2\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{b_{1,2}^6} (1 + \sin^2 \Psi + 2 \sin^4 \Psi) + \frac{15r_g^2}{8b_{1,2}^2} \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\begin{aligned} T = & t_{1,2} - \frac{r_g}{c} \ln \left| V \operatorname{tg} \frac{\Psi(\varphi)}{2} + W - \sqrt{W^2 - V^2} \right| + \\ & + \frac{r_g}{c} \ln \left| V \operatorname{tg} \frac{\Psi(\varphi)}{2} + W + \sqrt{W^2 - V^2} \right| + \frac{r}{c} \left(1 + \frac{r_g^2}{8b_{1,2}^2} \right) \cos \Psi(\varphi) - \\ & - \frac{b_{1,2}}{c} \left\{ \frac{\eta_{1,2}\xi\mathbf{m}^2}{8b_{1,2}^6} [36\Psi(\varphi) - 12 \sin 2\Psi(\varphi) + \sin 4\Psi(\varphi)] + \frac{15r_g^2}{8b_{1,2}^2} \Psi(\varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где t_1 и t_2 – постоянные интегрирования.

Следует отметить, что T – время, измеряемое по часам наблюдателя, находящегося на значительном удалении от нейтронной звезды ($r_g/R_1 \rightarrow 0$). При $r_g \rightarrow 0$ и $\mathbf{m}^2 \rightarrow 0$ выражение (23), как и следовало ожидать, описывает движение электромагнитного сигнала со скоростью $v = c$ по прямой, проходящей на расстоянии $b_{1,2}$ от начала координат.

Из выражения (23) следует, что в плоскости магнитного экватора при $\eta_1 \neq \eta_2$ два электромагнитных сигнала, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях (один в плоскости магнитного экватора, а другой – перпендикулярно этой плоскости) и излученные в один и тот же момент времени из одного и того же источника, придут к наблюдателю по различным лучам и в различные моменты времени $T_1 \neq T_2$.

Как показывает детальный анализ, если источник высокочастотного излучения находится вблизи нейтронной звезды, то асимптотически главный член разности $\Delta T = T_2 - T_1$ принимает вид

$$\Delta T = \frac{9\pi(\eta_2 - \eta_1)\xi \mathbf{m}^2}{4b^5 c}. \quad (24)$$

Величина ΔT существенно зависит от разности постмаксвелловских параметров. В частности, в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда $\Delta T = 0$, в то время как согласно электродинамике Гейзенберга–Эйлера выражение (24) в магнитных полях пульсаров и магнетаров может достигать величины 10^{-6} с. Современная электроника в состоянии зарегистрировать сигналы различной поляризации, разделенные такими промежутками времени.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, наличие нелинейных слагаемых при старших производных в лагранжиане электромагнитного поля приводит к появлению эффективного псевдориманова пространства-времени, метрический тензор которого зависит не только от внешнего электромагнитного поля, но и от поляризации электромагнитной волны, распространяющейся в этом поле.

В результате внешнее электромагнитное поле оказывает на электромагнитные волны нелинейно-электродинамическое действие, во многом аналогичное действию гравитационного поля: лучи электромагнитных волн в неоднородном электромагнитном поле искривляются, а скорость распространения электромагнитных сигналов зависит не только от внешнего поля, но и от их поляризации.

Это нелинейно-электродинамическое воздействие происходит на фоне обычного гравитационного воздействия. Поэтому при проведении измерений различных гравитационных эффектов, происходящих в окрестностях пульсаров и магнетаров, необходимо проводить также поиск и измерение нелинейно-электродинамических эффектов.

Полученные при таких измерениях результаты позволят выяснить экспериментальный статус различных моделей нелинейной электродинамики вакуума и исследовать естественную геометрию для электромагнитного поля в нелинейной электродинамике вакуума.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-02-16598.

Список литературы

- [1] *А. А. Лозунов.* Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Наука, 1987.
- [2] *В. И. Денисов, М. И. Денисов, Н. В. Кравцов, В. Б. Пинчук.* ТМФ. 1998. Т. 117. № 3. С. 498.
- [3] *Н. И. Лобачевский.* Полное собрание сочинений. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1949.
- [4] *В. И. Денисов, И. П. Денисова.* Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 4. С. 463.
- [5] *К. Уилл.* Теория и эксперимент в гравитационной физике. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [6] *W. Heisenberg, H. Euler.* Z. Phys. 1936. V. 26. P. 714.
- [7] *M. Born, L. Infeld.* Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1934. V. 144. P. 425.
- [8] *V. I. Denisov, M. I. Denisov.* Phys. Rev. D. 1999. V. 60. № 4. P. 047301.
- [9] *V. I. Denisov.* Phys. Rev. D. 2000. V. 61. № 3. P. 036004.
- [10] *В. И. Денисов, И. П. Денисова.* Оптика и спектроскопия. 2001. Т. 90. № 2. С. 329.
- [11] *R. Epstein, I. I. Shapiro.* Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 2947.
- [12] *В. И. Денисов, И. П. Денисова, С. И. Свертилов.* Докл. РАН. 2001. Т. 380. С. 754.

Поступила в редакцию 15.III.2002 г.