Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кадышевский, А. С. Сорин, $N = (1|1)$ суперсимметричная бездисперсионная решеточная иерархия Тоды, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 2, 222–237

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:07:01

© 2002 г.

В. Г. Кадьшевский*, А. С. Сорин*

$N = (1|1)$ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ
БЕЗДИСПЕРСИОННАЯ
РЕШЕТОЧНАЯ ИЕРАРХИЯ ТОДЫ

Предложена новая скобочная операция на пространстве градуированных операторов с инволюцией, обобщающая градуированный коммутатор супералгебр. Изучены свойства этой операции. Показано, что представление Лакса для двумерной $N = (1|1)$ суперсимметричной решеточной иерархии Тоды может быть реализовано как обобщенная скобочная операция, что важно для построения квазиклассического (непрерывного) предела этой иерархии. Построен непрерывный предел $N = (1|1)$ решеточной иерархии Тоды – бездисперсионная $N = (1|1)$ иерархия Тоды. Для этого предела получено представление Лакса, в котором обобщенная градуированная скобка переходит в соответствующую скобку Пуассона на градуированном фазовом суперпространстве. Найдены бозонные симметрии бездисперсионного $N = (1|1)$ суперсимметричного уравнения Тоды.

Ключевые слова: интегрируемые иерархии, суперсимметрия, решетка Тоды, квазиклассический предел.

Посвящается 75-летию академика Анатолия Алексеевича Логунова.

Один из нас (В. К.) впервые познакомился с А. А. Логуновым, еще будучи студентом II курса физического факультета МГУ (1956), и на протяжении прошедших десятилетий ощущал с его стороны огромную поддержку как в делах, связанных с наукой, так и в жизни. Будьте здоровы, дорогой Анатолий Алексеевич!

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько десятилетий квантовая теория поля (КТП), приняв на вооружение эффективные математические методы, превратилась в теорию, удовлетворяющую самым строгим математическим требованиям [1]. После возникновения суперсимметричных КТП особое внимание исследователей привлекли многочисленные задачи, решение которых представляет интерес как для математической физики, так и для важных физических приложений.

В этой работе рассмотрено интегрируемое $N = (1|1)$ суперсимметричное обобщение решеточной двумерной бозонной иерархии Тоды (2DTL-иерархии) [2], предложенное в

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: kadyshhev@jinr.ru; sorin@thsun1.jinr.ru

работах [3], [4]. Оно представляет собой бесконечную систему эволюционных (по двум бозонным и двум фермионным бесконечным “башням” времен) уравнений (потоков) для бесконечного набора решеточных бозонных и фермионных полей и содержит как подсистему $N = (1|1)$ суперсимметричное интегрируемое обобщение 2DTL-уравнения, обозначаемое в дальнейшем как $N = (1|1)$ 2DTL.

В работах [5]–[7] были построены две новые бесконечные серии фермионных потоков $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии. Было установлено, что эта иерархия в действительности обладает более высокой симметрией, а именно $N = (2|2)$ суперсимметрией. Эти потоки совместно с ранее известными бозонными потоками $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии являются симметриями $N = (1|1)$ 2DTL-уравнения. Непрерывный предел по шагу решетки этого последнего уравнения [8] представляет собой трехмерное нелинейное уравнение, называемое непрерывным или бездисперсионным $N = (1|1)$ 2DTL-уравнением. В статье [8] рассматривалось также решение соответствующей задачи Коши.

Хотя $N = (1|1)$ 2DTL-иерархия и бездисперсионное $N = (1|1)$ 2DTL-уравнение известны достаточно давно, проблема построения непрерывного (квазиклассического) предела по шагу решетки, играющему здесь роль постоянной Планка, для всех потоков $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии является еще не решенной и достаточно сложной задачей¹⁾. Кроме чисто академического значения этой проблемы, интерес к ее решению связан с рядом важных физических и математических приложений. Речь идет, в частности, о квазиклассическом пределе бозонного прообраза $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии – бездисперсионной 2DTL-иерархии [17], представляющей собой объединение потоков 2DTL-иерархии, возникающих в главном приближении квазиклассического разложения, построенного в работе [18] (см. также обзор [19]). Можно привести следующий перечень возможных приложений бездисперсионной 2DTL-иерархии:

- 1) построение ряда самодуальных вакуумных метрик и метрик Эйнштейна–Вейля;
 - 2) теория твисторов;
 - 3) двумерная конформная и топологическая теория поля;
 - 4) двумерная теория струн
- (см. также работы [20]–[31]).

Имея в виду глубокую связь между 2DTL- и $N = (1|1)$ 2DTL-иерархиями, естественно предположить, что и бездисперсионная $N = (1|1)$ суперсимметричная 2DTL-иерархия должна найти аналогичные приложения в суперсимметричных обобщениях перечисленных выше теорий. Последнее обстоятельство явилось стимулом для построения бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии в данной работе.

Мы хотели бы особо подчеркнуть, что существующий общий алгоритм построения квазиклассических асимптотик, использованный в работе [18] для 2DTL-иерархии, встречает ряд как формальных, так и неформальных препятствий при прямолинейном распространении на случай $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии. Так, общеизвестно, что в квазиклассическом пределе все операторы переходят в их символы, задаваемые на соответствующем фазовом пространстве, а (анти)коммутаторы в стандартных представлениях

¹⁾В этой связи заметим, что аналогичные задачи для дифференциально-разностных уравнений рассматривались в цикле работ [9]–[16].

Лакса заменяются соответствующими скобками Пуассона. Что касается предложенного в работе [3] представления Лакса для $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии, то оно не имеет (анти)коммутаторного вида. Поэтому буквальное применение вышеприведенного качественного рецепта перехода к квазиклассике затруднительно.

Другой принципиально важной, качественно новой чертой $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии по сравнению с ее бозонным прообразом, усложняющей рассмотрение, является то, что операторы, входящие в ее представление Лакса, задаются на пространстве с двумя Z_2 -градуировками, обладая, однако, только одной диагональной Z_2 -градуировкой. По этой причине в общем случае даже в квазиклассическом пределе нельзя ожидать коммутативности символов этих операторов.

К сказанному можно также добавить и возможные усложнения, связанные с тем, что фермионные и бозонные поля $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии могут иметь несовпадающие квазиклассические асимптотики, которые необходимо задать самосогласованно. Аналогичная ситуация имеет место для фермионных и бозонных времен этой иерархии, однако последние можно легко согласовать, дополнительно привлекая соображения размерности.

Совсем недавно наметился определенный прогресс на пути построения квазиклассического предела $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии. В работе [7] было обнаружено, что представление Лакса для этой иерархии может быть приведено к коммутаторной форме (уравнение (39) в [7]) посредством введения ряда новых вспомогательных фермионных постоянных. Хотя получаемое таким способом коммутаторное представление на первый взгляд кажется искусственным, в действительности в нем содержится новая важная обобщенная градуированная скобочная операция, которая может быть определена в достаточно общих терминах, чтобы иметь широкий спектр приложений. Мы вводим ее в рассмотрение в данной работе и используем для решения изучаемой здесь проблемы.

Оказывается, что именно в терминах данной скобочной операции могут быть выражены все основные соотношения, определяющие $N = (1|1)$ 2DTL-иерархию, и для этого не требуется введение никаких вспомогательных объектов типа упомянутых выше фермионных постоянных. Более того, в квазиклассическом пределе именно эта скобочная операция заменяется соответствующей суперскобкой Пуассона на фазовом суперпространстве. Тем самым задается представление Лакса для бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии.

Структура данной работы такова. В разделе 2 мы вводим обобщенную градуированную скобочную операцию на пространстве градуированных операторов с инволюцией, обобщающую градуированный коммутатор для супералгебр, описываем ее свойства и приводим соответствующие обобщенные тождества Якоби. Затем мы получаем представление Лакса $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии, а также все основные определяющие его соотношения в терминах обобщенной градуированной скобки. Приводятся явные выражения для потоков $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии и бозонных симметрий $N = (1|1)$ 2DTL-уравнения, которые впоследствии используются в разделе 3 для получения их бездисперсионных аналогов.

В разделе 3 также определяется квазиклассический предел $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии

и постулируется соответствующее асимптотическое поведение фермионных и бозонных полей, параметризующих операторы Лакса. Затем с помощью этих данных мы вычисляем асимптотическое поведение всех композитных операторов, входящих в представление Лакса и соответствующие ему полевые эволюционные уравнения. Далее мы получаем регулярные главные члены квазиклассического разложения этих эволюционных уравнений, являющихся по определению потоками бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии. Тем самым апостериори демонстрируется самосогласованность наших постулатов, лежащих в основе всех проведенных вычислений. Следующим шагом является моделирование суперскобки Пуассона на фазовом суперпространстве, представляющем собой фазовое пространство бездисперсионной 2DTL-иерархии, расширенное одной грассмановой координатой. Заменяя операторы Лакса на их символы, а обобщенную градуированную скобку на указанную суперскобку Пуассона в представлении Лакса для $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии и во всех определяющих его соотношениях, мы убеждаемся прямым вычислением, что получаемое таким способом операторное представление правильно воспроизводит построенные нами ранее потоки бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии, т.е. является искомым представлением Лакса для последней иерархии.

В разделе 4 мы кратко резюмируем основные результаты, полученные в работе.

2. $N = (1|1)$ 2DTL-ИЕРАРХИЯ

В этом разделе вводится новая градуированная скобочная операция и на этой основе предлагается новая форма для представления Лакса $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии.

2.1. Обобщенные градуированные скобки. Рассмотрим пространство операторов $\mathbb{O}_k$ с градуировкой $d_{\mathbb{O}_k}$ ($d_{\mathbb{O}_k} \in \mathbb{Z}$),

$$d_{\mathbb{O}_1 \mathbb{O}_2} = d_{\mathbb{O}_1} + d_{\mathbb{O}_2}, \quad (1)$$

и инволюцией $*$,

$$\mathbb{O}_k^{*(2)} = \mathbb{O}_k, \quad (2)$$

где $\mathbb{O}_k^{*(m)}$ обозначает m -кратное действие инволюции $*$ на оператор $\mathbb{O}_k$. На этом пространстве можно определить обобщенную градуированную скобочную операцию $[\dots, \dots]$,

$$[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2] := \mathbb{O}_1 \mathbb{O}_2 - (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2}} \mathbb{O}_2^{*(d_{\mathbb{O}_1})} \mathbb{O}_1^{*(d_{\mathbb{O}_2})} \quad (3)$$

со следующими легко проверяемыми свойствами:

а) симметрия

$$[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2] = (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2} + 1} [\mathbb{O}_2^{*(d_{\mathbb{O}_1})}, \mathbb{O}_1^{*(d_{\mathbb{O}_2})}]; \quad (4)$$

б) дифференцирование

$$[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2 \mathbb{O}_3] = [\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2] \mathbb{O}_3 + (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2}} \mathbb{O}_2^{*(d_{\mathbb{O}_1})} [\mathbb{O}_1^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \mathbb{O}_3]; \quad (5)$$

в) тождество Якоби

$$\begin{aligned} & (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_3}} [[\mathbb{O}_1^{*(d_{\mathbb{O}_3})}, \mathbb{O}_2\}, \mathbb{O}_3^{*(d_{\mathbb{O}_1})}] + \\ & + (-1)^{d_{\mathbb{O}_2} d_{\mathbb{O}_1}} [[\mathbb{O}_2^{*(d_{\mathbb{O}_1})}, \mathbb{O}_3\}, \mathbb{O}_1^{*(d_{\mathbb{O}_2})}] + \\ & + (-1)^{d_{\mathbb{O}_3} d_{\mathbb{O}_2}} [[\mathbb{O}_3^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \mathbb{O}_1\}, \mathbb{O}_2^{*(d_{\mathbb{O}_3})}] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения (4)–(6) обобщают соответствующие свойства градуированного коммутатора супералгебр Ли. Подчеркнем, что в частном случае, когда инволюция $*$ (2) действует как тождественное преобразование, скобка (3) воспроизводит градуированный коммутатор супералгебр Ли. В общем случае действия инволюции эта скобка является нетривиальным обобщением последнего.

2.2. Представление Лакса и потоки. Начнем этот пункт с детализации пространства операторов, их градуировки и инволюции. Рассматриваемые операторы могут быть представлены в следующем общем виде:

$$\mathbb{O}_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где параметризующие их функции $f_{2k,j}^{(m)}$ ($f_{2k+1,j}^{(m)}$) являются Z_2 -градуированными,

$$d'_{f_{k,j}^{(m)}} = |k| \mod 2, \quad (8)$$

бозонными (фермионными) решеточными полями ($j \in \mathbb{Z}$), а оператор $e^{l\partial}$ ($l \in \mathbb{Z}$) действует на эти поля как дискретный решеточный сдвиг

$$e^{l\partial} f_{k,j}^{(m)} \equiv f_{k,j+l}^{(m)} e^{l\partial} \quad (9)$$

и обладает другой Z_2 -градуировкой

$$d_{e^{l\partial}} = |l| \mod 2. \quad (10)$$

Операторы (7) допускают задание только одной диагональной Z_2 -градуировки

$$d_{\mathbb{O}_m} = d'_{f_{k,j}^{(m)}} + d_{e^{(k-m)\partial}} = |m| \mod 2 \quad (11)$$

и инволюции

$$\mathbb{O}_m^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}. \quad (12)$$

В дальнейшем нам также понадобятся проекции $(\mathbb{O}_m)_{\pm}$ операторов $\mathbb{O}_m$ (7), определяемые как

$$(\mathbb{O}_m)_+ = \sum_{k=m}^{\infty} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}, \quad (\mathbb{O}_m)_- = \sum_{k=-\infty}^{m-1} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}. \quad (13)$$

Операторы Лакса $L^\pm$ $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии принадлежат пространству операторов (7) [3], [7],

$$L^+ = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,j} e^{(1-k)\partial}, \quad u_{0,j} = 1, \quad L^- = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,j} e^{(k-1)\partial}, \quad v_{0,j} \neq 0, \quad (14)$$

и имеют градуировку $d_{L^\pm} = 1$.

Теперь мы располагаем всеми необходимыми данными для того, чтобы выразить представление Лакса $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии в терминах скобочной операции (3) и тем самым придать ему очень простой вид:

$$D_n^\pm L^\alpha = \mp \alpha (-1)^n r[(((L^\pm)_*)^n - \alpha)^*, L^\alpha], \quad \alpha = +, -, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

где $D_{2n}^\pm$ ($D_{2n+1}^\pm$) – бозонные (фермионные) эволюционные производные.

Для входящих в это представление композитных операторов $(L^\pm)_*^n$ также могут быть получены весьма простые выражения в терминах операторов Лакса и скобочной операции (3),

$$(L^\alpha)_*^{2n} := \left(\frac{1}{2} [(L^\alpha)^*, (L^\alpha)] \right)^n, \quad (L^\alpha)_*^{2n+1} := L^\alpha (L^\alpha)_*^{2n}. \quad (16)$$

Как и операторы Лакса $L^\pm$, операторы $(L^\pm)_*^n$ принадлежат пространству операторов (7) и могут быть представлены в виде

$$(L^+)_*^m := \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,j}^{(m)} e^{(m-k)\partial}, \quad u_{0,j}^{(m)} = 1, \quad (L^-)_*^m := \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}, \quad (17)$$

где $u_{k,j}^{(m)}$ и $v_{k,j}^{(m)}$ ($u_{k,j}^{(1)} \equiv u_{k,j}$, $v_{k,j}^{(1)} \equiv v_{k,j}$) – функционалы исходных полей $\{u_{k,j}, v_{k,j}\}$. Здесь важно отметить, что в представлении Лакса (15) Z_2 -градуировка операторов $(L^\pm)_*^n$, имеющая вид $d_{(L^\pm)_*^{2n}} = 0$ и $d_{(L^\pm)_*^{2n+1}} = 1$, согласована с другой Z_2 -градуировкой $d'_{D_{2n}^\pm} = 0$ и $d'_{D_{2n+1}^\pm} = 1$, соответствующей статистике эволюционных производных $D_n^\pm$.

Используя скобочные свойства (4)–(6) и соотношения (16) как определения для $(L^\pm)_*^n$, нетрудно получить полезные тождества

$$\begin{aligned} [(L^\alpha)_*^{2n}, (L^\alpha)_*^{2m}] &= 0, \quad [((L^\alpha)_*^{2n})^*, (L^\alpha)_*^{2m+1}] = 0, \\ [(L^\alpha)_*^{2n+1}, (L^\alpha)_*^{2m}] &= 0, \quad [((L^\alpha)_*^{2n+1})^*, (L^\alpha)_*^{2m+1}] = 2(L^\alpha)_*^{2(n+m+1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь, используя равенства (4)–(6), (15), (16), можно вывести уравнения движения для композитных операторов $(L^\pm)_*^n$,

$$D_n^\pm (L^\alpha)_*^m = \mp \alpha (-1)^{nm} [(((L^\pm)_*)^n - \alpha)^{*(m)}, (L^\alpha)_*^m], \quad (19)$$

а также эволюционные уравнения для функционалов $\{u_{k,j}^{(m)}, v_{k,j}^{(m)}\}$ (17), вытекающие из найденных уравнений (19):

$$\begin{aligned}
 D_n^+ u_{k,j}^{(2m)} &= \sum_{p=0}^n (u_{p,j}^{(n)} u_{k-p+n,j-p+n}^{(2m)} - \\
 &\quad - (-1)^{(p+n)(k-p+n)} u_{p,j-k+p-n+2m}^{(n)} u_{k-p+n,j}^{(2m)}), \\
 D_{2n}^+ u_{k,j}^{(2m+1)} &= \sum_{p=0}^{2n} ((-1)^p u_{p,j}^{(2n)} u_{k-p+2n,j-p+2n}^{(2m+1)} - \\
 &\quad - (-1)^{p(k-p)} u_{p,j-k+p-2n+2m+1}^{(2n)} u_{k-p+2n,j}^{(2m+1)}), \\
 D_{2n+1}^+ u_{k,j}^{(2m+1)} &= \sum_{p=1}^k ((-1)^{p+1} u_{p+2n+1,j}^{(2n+1)} u_{k-p,j-p}^{(2m+1)} + \\
 &\quad + (-1)^{p(k-p)} u_{p+2n+1,j-k+p+2m+1}^{(2n+1)} u_{k-p,j}^{(2m+1)}),
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 D_n^- u_{k,j}^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} ((-1)^{(p+n)m} v_{p,j}^{(n)} u_{k+p-n,j+p-n}^{(m)} - \\
 &\quad - (-1)^{(p+n)(k+p-n)} v_{p,j-k+p+n+m}^{(n)} u_{k+p-n,j}^{(m)}),
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 D_n^+ v_{k,j}^{(m)} &= \sum_{p=0}^n ((-1)^{(p+n)m} u_{p,j}^{(n)} v_{k+p-n,j-p+n}^{(m)} - \\
 &\quad - (-1)^{(p+n)(k+p-n)} u_{p,j+k+p-n-m}^{(n)} v_{k+p-n,j}^{(m)}),
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 D_n^- v_{k,j}^{(2m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} (v_{p,j}^{(n)} v_{k-p+n,j+p-n}^{(2m)} - \\
 &\quad - (-1)^{(p+n)(k-p+n)} v_{p,j+k-p+n-2m}^{(n)} v_{k-p+n,j}^{(2m)}), \\
 D_{2n}^- v_{k,j}^{(2m+1)} &= \sum_{p=0}^{2n-1} ((-1)^p v_{p,j}^{(2n)} v_{k-p+2n,j+p-2n}^{(2m+1)} - \\
 &\quad - (-1)^{p(k-p)} v_{p,j+k-p+2n-2m-1}^{(2n)} v_{k-p+2n,j}^{(2m+1)}), \\
 D_{2n+1}^- v_{k,j}^{(2m+1)} &= \sum_{p=0}^k ((-1)^{p+1} v_{p+2n+1,j}^{(2n+1)} v_{k-p,j+p}^{(2m+1)} + \\
 &\quad + (-1)^{p(k-p)} v_{p+2n+1,j+k-p-2m-1}^{(2n+1)} v_{k-p,j}^{(2m+1)})
 \end{aligned} \tag{23}$$

(в правых частях этих уравнений все поля $\{u_{k,j}^{(m)}, v_{k,j}^{(m)}\}$ с $k < 0$ должны быть положены равными нулю).

Представление Лакса (15) генерирует неабелеву алгебру потоков $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии,

$$[D_n^+, D_l^-] = [D_n^\pm, D_{2l}^\pm] = 0, \quad \{D_{2n+1}^\pm, D_{2l+1}^\pm\} = 2D_{2(n+l+1)}^\pm, \quad (24)$$

которая может быть реализована как

$$D_{2n}^\pm = \partial_{2n}^\pm, \quad D_{2n+1}^\pm = \partial_{2n+1}^\pm + \sum_{l=1}^{\infty} t_{2l-1}^\pm \partial_{2(k+l)}^\pm, \quad \partial_n^\pm := \frac{\partial}{\partial t_n^\pm}, \quad (25)$$

где $t_{2n}^\pm$ ($t_{2n+1}^\pm$) – бозонные (фермионные) эволюционные времена. Непрерывный предел потоков (20)–(23) будет построен в п. 3.1 и ляжет в основу определения потоков бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии.

2.3. Бозонные симметрии $N = (1|1)$ 2DTL-уравнения. Суперсимметричное $N = (1|1)$ 2DTL-уравнение

$$D_1^+ D_1^- \ln v_{0,j} = v_{0,j+1} - v_{0,j-1} \quad (26)$$

принадлежит системе уравнений (20)–(23). Оно вытекает из уравнения (21) при $n = m = k = 1$,

$$D_1^- u_{1,j} = -v_{0,j} - v_{0,j+1}, \quad (27)$$

и уравнения (22) при $n = m = 1$, $k = 0$,

$$D_1^+ v_{0,j} = v_{0,j}(u_{1,j} - u_{1,j-1}), \quad (28)$$

после исключения поля $u_{1,j}$. Его бозонные симметрии $D_{2n}^\pm v_{0,j}$,

$$\{D_1^+, D_{2n}^\pm\} = \{D_1^-, D_{2n}^\pm\} = 0, \quad (29)$$

были описаны в работах [5]–[7] в терминах следующей итерационной процедуры:

$$\begin{aligned} D_{2n}^\pm v_{0,j} &= v_{0,j}(u_{2n,j}^{(2n)\pm} - u_{2n,j-1}^{(2n)\pm}), \quad u_{0,j}^{(2n)\pm} = 1, \\ \pm D_1^\mp u_{k,j}^{(2n)\pm} &= v_{0,j} u_{k-1,j-1}^{(2n)\pm} + (-1)^k v_{0,j-k+2n+1} u_{k-1,j}^{(2n)\pm}, \end{aligned} \quad (30)$$

где функции $u_{k,j}^{(n)\pm}$ связаны с исходными функционалами $u_{k,j}^{(n)}$, $v_{k,j}^{(n)}$ [7] следующим образом:

$$u_{k,j}^{(n)+} = u_{k,j}^{(n)}, \quad u_{k,j}^{(n)-} = \frac{v_{k,-j-1}^{(n)}}{\sum_{m=1}^{n-k} v_{0,k+m-n-j-1}}. \quad (31)$$

Непрерывный предел $N = (1|1)$ 2DTL-уравнения (26) и его симметрий $D_{2n}^\pm v_{0,j}$ (30) будет получен в п. 3.2.

3. БЕЗДИСПЕРСИОННАЯ $N = (1|1)$ 2DTL-ИЕРАРХИЯ

В этом разделе строится непрерывный (квазиклассический) по шагу решетки предел $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии (бездисперсионная $N = (1|1)$ 2DTL-иерархия) и конструируется соответствующее ему представление Лакса.

3.1. Квазиклассический предел. Потоки (20)–(23) $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии не содержат явной зависимости от размерных постоянных, а решетка с безразмерной координатой j ($j \in \mathbb{Z}$) имеет единичный шаг. Для изучения непрерывного предела введем явно длину шага решетки. Поскольку этот параметр в дальнейшем будет играть роль постоянной Планка, будем обозначать его как $\hbar$. Таким образом, вместо j возникает комбинация

$$\hbar j \equiv s \quad (32)$$

и все решеточные поля начинают зависеть от параметра $\hbar$. Тогда непрерывный (квазиклассический) предел может быть определен как

$$\hbar \rightarrow 0, \quad s = \lim_{\hbar \rightarrow 0, j \gg 1} (\hbar j), \quad (33)$$

а s выступает в роли непрерывной “решеточной” координаты.

Для того чтобы потоки (20)–(23) были нетривиальными и регулярными в пределе (33), необходимо дополнительно осуществить некоторые масштабные преобразования зависимых и независимых переменных, принадлежащих системе. Мы постулируем следующие правила перехода к новым эволюционным временам и полям иерархии:

$$t_{2n+1}^{\pm} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} t_{2n+1}^{\pm}, \quad t_{2n}^{\pm} \rightarrow \frac{1}{\hbar} t_{2n}^{\pm} \Leftrightarrow D_{2n+1}^{\pm} \rightarrow \sqrt{\hbar} D_{2n+1}^{\pm}, \quad D_{2n}^{\pm} \rightarrow \hbar D_{2n}^{\pm}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} u_{2k,j} &\rightarrow u_{2k}(\hbar j), & v_{2k,j} &\rightarrow v_{2k}(\hbar j), \\ u_{2k+1,j} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} u_{2k+1}(\hbar j), & v_{2k+1,j} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} v_{2k+1}(\hbar j), \end{aligned} \quad (35)$$

.....

полагая их несингулярными при $\hbar = 0$.

Теперь можно установить два важных свойства квазиклассического предела (33)–(35), которые имеют ключевое значение для дальнейшего рассмотрения и проверяются прямыми вычислениями.

Первое свойство состоит в том, что новые композитные поля, определенные по правилам

$$\begin{aligned} u_{2k,j}^{(m)} &\rightarrow u_{2k}^{(m)}(\hbar j), & v_{2k,j}^{(m)} &\rightarrow v_{2k}^{(m)}(\hbar j), \\ u_{2k+1,j}^{(2m+1)} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} u_{2k+1}^{(2m+1)}(\hbar j), & v_{2k+1,j}^{(2m+1)} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} v_{2k+1}^{(2m+1)}(\hbar j), \\ u_{2k+1,j}^{(2m)} &\rightarrow \sqrt{\hbar} u_{2k+1}^{(2m)}(\hbar j), & v_{2k+1,j}^{(2m)} &\rightarrow \sqrt{\hbar} v_{2k+1}^{(2m)}(\hbar j), \end{aligned} \quad (36)$$

регулярны в квазиклассическом пределе.

Из правил (33)–(36) и очевидных тождеств

$$(L^\alpha)_*^{2(m+1)} := (L^\alpha)_*^2 (L^\alpha)_*^{2m}, \quad (L^\alpha)_*^{2m+1} := L^\alpha (L^\alpha)_*^{2m}, \quad (37)$$

следующих из выражений (16), можно получить, например, важные рекуррентные соотношения для главных членов функционалов $u_k^{(m)} \equiv u_k^{(m)}(s)$,

$$\begin{aligned} u_{2k}^{(2(l+1))} &= \sum_{n=0}^k u_{2n}^{(2)} u_{2(k-n)}^{(2l)}, & u_{2k+1}^{(2(l+1))} &= \sum_{n=0}^{2k+1} u_n^{(2)} u_{2k-n+1}^{(2l)}, \\ u_{2k}^{(2l+1)} &= \sum_{n=0}^{2k} u_n u_{2k-n}^{(2l)}, & u_{2k+1}^{(2l+1)} &= \sum_{n=0}^k u_{2n+1} u_{2(k-n)}^{(2l)}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} u_{2k}^{(2)} &= \sum_{n=0}^k u_{2n} u_{2(k-n)} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} (k-n-1) u_{2(k-n)-1} \partial_s u_{2n+1}, \\ u_{2k+1}^{(2)} &= \sum_{n=0}^k [(1-2n) u_{2n} \partial_s u_{2(k-n)+1} + 2(k-n) u_{2(k-n)+1} \partial_s u_{2n}], \end{aligned} \quad (39)$$

где $\partial_s := \partial/\partial s$.

Второе свойство сводится к тому, что в квазиклассическом пределе (33)–(36) потоки (20)–(23) $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии нетривиальны и регулярны. Так, явные выражения для их главных членов следующие.

При $m = 2l$, $k = 2r$ или $m = 2l + 1$, $k = 2r + 1$ имеем

$$\begin{aligned} D_{2n+1}^- u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} [2(p-n) v_{2p+1}^{(2n+1)} \partial_s u_{k+2(p-n)}^{(m)} + \\ &\quad + (k-m+2(p-n)) (\partial_s v_{2p+1}^{(2n+1)}) u_{k+2(p-n)}^{(m)}] + \\ &\quad + 2(-1)^k \sum_{p=0}^n v_{2p}^{(2n+1)} u_{k+2(p-n)-1}^{(m)}, \\ D_{2n}^- u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} [2(p-n) v_{2p}^{(2n)} \partial_s u_{k+2(p-n)}^{(m)} + \\ &\quad + (k-m+2(p-n)) (\partial_s v_{2p}^{(2n)}) u_{k+2(p-n)}^{(m)} + \\ &\quad + 2(-1)^k v_{2p+1}^{(2n)} u_{k+2(p-n)+1}^{(m)}], \\ D_{2n}^+ u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^n [2(n-p) u_{2p}^{(2n)} \partial_s u_{k+2(n-p)}^{(m)} + \\ &\quad + (k-m+2(n-p)) (\partial_s u_{2p}^{(2n)}) u_{k+2(n-p)}^{(m)}] + \\ &\quad + 2(-1)^k \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}^{(2n)} u_{k+2(n-p)-1}^{(m)}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
D_{2n+1}^+ v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^n [2(n-p) u_{2p+1}^{(2n+1)} \partial_s v_{k+2(p-n)}^{(m)} - \\
&\quad - (k-m+2(p-n)) (\partial_s u_{2p+1}^{(2n+1)}) v_{k+2(p-n)}^{(m)} + \\
&\quad + 2(-1)^k u_{2p}^{(2n+1)} v_{k-1+2(p-n)}^{(m)}], \\
D_{2n}^+ v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^n [2(n-p) u_{2p}^{(2n)} \partial_s v_{k+2(p-n)}^{(m)} - \\
&\quad - (k-m+2(p-n)) (\partial_s u_{2p}^{(2n)}) v_{k+2(p-n)}^{(m)}] + \\
&\quad + 2(-1)^k \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}^{(2n)} v_{k+1+2(p-n)}^{(m)}, \\
D_{2n}^- v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} [2(p-n) v_{2p}^{(2n)} \partial_s v_{k+2(n-p)}^{(m)} - \\
&\quad - (k-m+2(n-p)) (\partial_s v_{2p}^{(2n)}) v_{k+2(n-p)}^{(m)} + \\
&\quad + 2(-1)^k v_{2p+1}^{(2n)} v_{k+2(n-p)-1}^{(m)}].
\end{aligned}$$

При $m = 2l$, $k = 2r + 1$ или $m = 2l + 1$, $k = 2r$ имеем

$$\begin{aligned}
D_n^- u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{m(p+n)} [(p-n) v_p^{(n)} \partial_s u_{k+p-n}^{(m)} + \\
&\quad + (k+p-n-m) (\partial_s v_p^{(n)}) u_{k+p-n}^{(m)}], \\
D_{2n}^+ u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{2n} (-1)^{mp} [(2n-p) u_p^{(2n)} \partial_s u_{k-p+2n}^{(m)} + \\
&\quad + (k-p+2n-m) (\partial_s u_p^{(2n)}) u_{k-p+2n}^{(m)}], \\
D_n^+ v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^n (-1)^{m(p+n)} [(n-p) u_p^{(n)} \partial_s v_{k+p-n}^{(m)} - \\
&\quad - (k+p-n-m) (\partial_s u_p^{(n)}) v_{k+p-n}^{(m)}], \\
D_{2n}^- v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^{mp} [(p-2n) v_p^{(2n)} \partial_s v_{k-p+2n}^{(m)} - \\
&\quad - (k-p+2n-m) (\partial_s v_p^{(2n)}) v_{k-p+2n}^{(m)}],
\end{aligned} \tag{41}$$

а также

$$\begin{aligned}
D_{2n+1}^+ u_{2k}^{(2m)} &= 2 \sum_{p=0}^n [(n-p) u_{2p+1}^{(2n+1)} \partial_s u_{2(k-p+n)}^{(2m)} + \\
&\quad + (k-p+n-m) (\partial_s u_{2p+1}^{(2n+1)}) u_{2(k-p+n)}^{(2m)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_{2p}^{(2n+1)} u_{2(k-p+n)+1}^{(2m)} \Big], \\
D_{2n+1}^+ u_{2k+1}^{(2m+1)} &= 2 \sum_{p=1}^k [p u_{2(p+n)+1}^{(2n+1)} \partial_s u_{2(k-p)+1}^{(2m+1)} + \\
& + (m+p-k) (\partial_s u_{2(p+n)+1}^{(2n+1)}) u_{2(k-p)+1}^{(2m+1)}] + \\
& + 2 \sum_{p=0}^k u_{2(p+n+1)}^{(2n+1)} u_{2(k-p)}^{(2m+1)}, \\
D_{2n+1}^+ u_{2k}^{(2m+1)} &= \sum_{p=1}^{2k} (-1)^p [p u_{p+2n+1}^{(2n+1)} \partial_s u_{2k-p}^{(2m+1)} + \\
& + (2(m-k) + p + 1) (\partial_s u_{p+2n+1}^{(2n+1)}) u_{2k-p}^{(2m+1)}], \\
D_{2n+1}^+ u_{2k+1}^{(2m)} &= \sum_{p=0}^{2n+1} [(2n-p+1) u_p^{(2n+1)} \partial_s u_{2(k+n+1)-p}^{(2m)} + \\
& + (2(k+n-m+1) - p) (\partial_s u_p^{(2n+1)}) u_{2(k+n+1)-p}^{(2m)}], \quad (42) \\
D_{2n+1}^- v_{2k}^{(2m)} &= 2 \sum_{p=0}^{n-1} [(p-n) v_{2p+1}^{(2n+1)} \partial_s v_{2(k-p+n)}^{(2m)} - \\
& - (k-p+n-m) (\partial_s v_{2p+1}^{(2n+1)}) v_{2(k-p+n)}^{(2m)}] + \\
& + 2 \sum_{p=0}^n v_{2p}^{(2n+1)} v_{2(k-p+n)+1}^{(2m)}, \\
D_{2n+1}^- v_{2k+1}^{(2m+1)} &= 2 \sum_{p=0}^k [-p v_{2(p+n)+1}^{(2n+1)} \partial_s v_{2(k-p)+1}^{(2m+1)} + \\
& + (k-p-m) \partial_s v_{2(p+n)+1}^{(2n+1)} v_{2(k-p)+1}^{(2m+1)} + \\
& + v_{2(p+n+1)}^{(2n+1)} v_{2(k-p)}^{(2m+1)}], \\
D_{2n+1}^- v_{2k}^{(2m+1)} &= \sum_{p=0}^k (-1)^p [-p v_{p+2n+1}^{(2n+1)} \partial_s v_{2k-p}^{(2m+1)} - \\
& - (2(m-k) + p + 1) (\partial_s v_{p+2n+1}^{(2n+1)}) v_{2k-p}^{(2m+1)}], \\
D_{2n+1}^- v_{2k+1}^{(2m)} &= \sum_{p=0}^{2n} [-(2n-p+1) v_p^{(2n+1)} \partial_s v_{2(k+n+1)-p}^{(2m)} - \\
& - (2(k+n-m+1) - p) (\partial_s v_p^{(2n+1)}) v_{2(k+n+1)-p}^{(2m)}],
\end{aligned}$$

где в правых частях все поля $u_k^{(m)}, v_k^{(m)}$ с $k < 0$ должны быть положены равными нулю. Полученные таким способом потоки (40)–(42) мы называем бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархией. Представление Лакса для них будет построено в п. 3.3.

3.2. Бездисперсионное $N = (1|1)$ 2DTL-уравнение и его бозонные симметрии. Бездисперсионные пределы $N = (1|1)$ 2DTL-уравнения (26) и его бозонных симметрий (30) могут быть получены, если использовать соотношения (31)–(36). Получаем соответственно

$$D_1^+ D_1^- \ln v_0 = 2 \partial_s v_0 \quad (43)$$

и

$$\begin{aligned} D_{2n}^\pm v_0 &= v_0 \partial_s u_{2n}^{(2n)\pm}, \quad u_{0,j}^{(2n)\pm} = 1, \\ \mp D_1^\mp u_{2k+1}^{(2n)\pm} &= v_0 \partial_s u_{2k}^{(2n)\pm} + 2(n-k)(\partial_s v_0) u_{2k}^{(2n)\pm}, \\ \pm D_1^\mp u_{2k}^{(2n)\pm} &= 2v_0 u_{2k-1}^{(2n)\pm}. \end{aligned} \quad (44)$$

Исключая $u_{2k+1}^{(2n)\pm}$ из системы уравнений (44), окончательно получаем следующую рекуррентную систему уравнений для генерации бозонных симметрий бездисперсионного $N = (1|1)$ 2DTL-уравнения (43):

$$\begin{aligned} D_{2n}^\pm v_0 &= v_0 \partial_s u_{2n}^{(2n)\pm}, \quad u_{0,j}^{(2n)\pm} = 1, \\ -D_1^\mp u_{2k}^{(2n)\pm} &= 2v_0 (D_1^\mp)^{-1} [v_0 \partial_s u_{2(k-1)}^{(2n)\pm} + 2(n-k+1)(\partial_s v_0) u_{2(k-1)}^{(2n)\pm}]. \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что симметрии бозонного бездисперсионного 2DTL-уравнения были найдены в работе [32] (см. также работу [26]) путем решения соответствующего достаточно сложного уравнения симметрии.

3.3. Представление Лакса. В п. 3.1 были построены потоки (40)–(42) бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии. Найдем соответствующее им представление Лакса. Поскольку представление Лакса (15) $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии выражается в терминах обобщенной градуированной скобки (3), естественно ожидать, что для получения его квазиклассического предела, соответствующего бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии, достаточно заменить в нем эту скобку на определенную суперскобку Пуассона, а операторы – на их символы, заданные на соответствующем фазовом пространстве.

Нашей ближайшей задачей будет моделирование фазового пространства и суперскобки Пуассона исходя из некоторых свойств, которыми они должны быть наделены. Так, вспоминая, что операторы Лакса $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии, будучи заданными на пространстве операторов, градуированном двумя разными Z_2 -градуировками (8) и (10), обладают только одной диагональной Z_2 -градуировкой (11), можно предположить, что фазовое пространство унаследует эти свойства. Принимая во внимание Z_2 -градуировку $d_{e^\partial} = 1$, $d_{e^{2\partial}} = 0$ (10) оператора решеточного сдвига $e^{l\partial}$, мы предполагаем, что на фазовом пространстве ему соответствуют две координаты, а именно грасманова координата π ($\pi^2 = 0$) и бозонная координата p со следующими правилами соответствия:

$$e^\partial \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \pi, \quad e^{2\partial} \rightarrow p. \quad (46)$$

Несмотря на грасмановость координаты π , она должна обладать “нетипичным” для грасмановых координат свойством коммутировать не только с бозонными, но и с фермионными полями иерархии, что следует из непрерывного предела соотношения (9).

Очевидно, что кроме координат π и p фазовое пространство должно также включать непрерывную “решеточную” координату s (32). Возникающее в результате фазовое суперпространство $\{\pi, p, s\}$ бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии содержит фазовое пространство $\{p, s\}$ бездисперсионной 2DTL-иерархии как подпространство.

После того как координаты фазового пространства установлены, мы можем построить для них суперскобки Пуассона. Вспоминая, что суперскобки Пуассона должны находиться в соответствии с супералгеброй Z_2 -градуированных операторов $\{\sqrt{\hbar}e^\partial, e^{2\partial}, \hbar j\}$, которым отвечают координаты фазового суперпространства $\{\pi, p, s\}$, эти суперскобки могут быть найдены сравнительно легко. Приведем здесь суперскобки Пуассона между двумя произвольными функциями $\mathbb{F}_{1,2} \equiv \mathbb{F}_{1,2}(\pi, p, s)$ на фазовом пространстве, полученные способом, изложенным выше,

$$\begin{aligned} \{\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2\} = & 2p \left(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial p} \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial s} \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial p} + \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \pi} \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \pi} \right) + \\ & + \pi \left(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \pi} \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial s} \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \pi} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь уместно отметить, что после перехода к новому базису $\{\tilde{s}, \tilde{p}, \tilde{\pi}\}$ фазового пространства, задаваемому формулами

$$\tilde{s} := \frac{s}{2}, \quad \tilde{p} := \ln p, \quad \tilde{\pi} := \frac{\pi}{\sqrt{2p}}, \quad (48)$$

суперскобки Пуассона (47) принимают вид

$$\{\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2\} = \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \tilde{p}} \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \tilde{s}} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \tilde{s}} \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \tilde{\pi}} \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \tilde{\pi}}, \quad (49)$$

что соответствует канонической ортосимплектической структуре фазового суперпространства.

Теперь перейдем к следующему этапу получения представления Лакса бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии. Эвристические формулы для символов $\mathcal{L}^\pm$ и $(\mathcal{L}^\pm)_*^{2m}$ операторов Лакса $L^\pm$ (14) и композитных операторов $(L^\pm)_*^n$ (16), (17) имеют вид

$$L^\pm \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \mathcal{L}^\pm,$$

где

$$\mathcal{L}^+ = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k+1} + u_{2k}\pi) p^{-k}, \quad \mathcal{L}^- = \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k-1} + v_{2k}\pi) p^{k-1}, \quad (50)$$

и

$$(L^\pm)_*^{2m} \rightarrow (\mathcal{L}^\pm)_*^{2m}, \quad (L^\pm)_*^{2m+1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} (\mathcal{L}^\pm)_*^{2m+1},$$

где

$$(\mathcal{L}^+)_*^{2m} := \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k}^{(2m)} + u_{2k-1}^{(2m)} \pi) p^{m-k},$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}^-)_*^{2m} &:= \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k}^{(2m)} + v_{2k+1}^{(2m)} \pi) p^{k-m}, \\
(\mathcal{L}^+)_*^{2m+1} &:= \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k+1}^{(2m+1)} + u_{2k}^{(2m+1)} \pi) p^{m-k}, \\
(\mathcal{L}^-)_*^{2m+1} &:= \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k-1}^{(2m+1)} + v_{2k}^{(2m+1)} \pi) p^{k-m-1}.
\end{aligned} \tag{51}$$

По определению все поля $u_k^{(m)}, v_k^{(m)}$ с $k < 0$ должны быть положены равными нулю. При получении выражений (50), (51) мы использовали подстановки (36) и (46). Заметим, что введенные символы в общем случае некоммутативны,

$$(\mathcal{L}^\alpha)_*^k (\mathcal{L}^\beta)_*^m = (-1)^{km} ((\mathcal{L}^\beta)_*^m)^*(k) ((\mathcal{L}^\alpha)_*^k)^*(m), \quad \alpha, \beta = +, -, \tag{52}$$

что связано с нетипичным свойством грассмановой координаты π , отмеченным выше (см. замечание после формулы (46)).

Наконец, заменяя операторы Лакса на их символы (50), (51), а обобщенную градуированную скобку (3) на суперскобку Пуассона (47) в представлениях Лакса (15) и (19) для $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии и в определяющих его соотношениях (16) по правилу

$$[\dots, \dots] \rightarrow \hbar \{ \dots, \dots \}, \tag{53}$$

осуществляя затем подстановку (34) и переходя к пределу (33), мы получаем выражения

$$D_n^\pm \mathcal{L}^\alpha = \mp \alpha (-1)^n \{ (((\mathcal{L}^\pm)_*^n)_{-\alpha})^*, \mathcal{L}^\alpha \}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha = +, -, \tag{54}$$

$$D_n^\pm (\mathcal{L}^\alpha)_*^m = \mp \alpha (-1)^{nm} \{ (((\mathcal{L}^\pm)_*^n)_{-\alpha})^{*(m)}, (\mathcal{L}^\alpha)_*^m \}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \tag{55}$$

$$(\mathcal{L}^\alpha)_*^{2m} := \left(\frac{1}{2} \{ (\mathcal{L}^\alpha)^*, \mathcal{L}^\alpha \} \right)^m, \quad (\mathcal{L}^\alpha)_*^{2m+1} := \mathcal{L}^\alpha (\mathcal{L}^\alpha)_*^{2m} \tag{56}$$

для бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии. Прямые вычисления подтверждают, что полученные соотношения (55), (56) правильно воспроизводят бездисперсионные потоки (38)–(42), т.е. являются искомым представлением Лакса для бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL-иерархии.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы предложили новую скобочную операцию (3) со свойствами (4)–(6) на пространстве градуированных операторов с инволюцией, обобщающую градуированный коммутатор супералгебр. Затем мы получили новую форму представления Лакса (15), (16) и (19) для двумерной $N = (1|1)$ суперсимметричной решеточной иерархии Тоды в терминах обобщенной градуированной скобки. Далее мы использовали это представление при построении квазиклассического предела (33)–(36) этой иерархии – бездисперсионной $N = (1|1)$ иерархии Тоды (40)–(42), и его представления Лакса (50), (51), (54)–(56) на градуированном фазовом суперпространстве со скобкой Пуассона (47). И наконец, мы установили бозонные симметрии (45) бездисперсионного $N = (1|1)$ суперсимметричного уравнения Тоды (43).

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [2] *K. Ueno, K. Takasaki.* Adv. Stud. in Pure Math. 1984. V. 4. P. 1.
- [3] *K. Ikeda.* Lett. Math. Phys. 1987. V. 14. P. 321; RIMS. 1989. V. 25. P. 829.
- [4] *K. Takasaki.* Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. P. 229.
- [5] *A. N. Leznov, A. S. Sorin.* Phys. Lett. B. 1996. V. 389. P. 494; hep-th/9608166; Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1997. V. 56. P. 258.
- [6] *O. Lechtenfeld, A. Sorin.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 557. P. 535; solv-int/9810009; Nonlinear Math. Phys. 2001. V. 8. P. 183; nlin.SI/0007009.
- [7] *V. G. Kadyshevsky, A. S. Sorin.* Supersymmetric Toda lattice hierarchies. In: Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories. Eds. H. Aratyn, A. S. Sorin. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 289; nlin.SI/0011009.
- [8] *M. V. Saveliev, P. Sorba.* Lett. Math. Phys. 1991. V. 22. P. 119.
- [9] *V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov.* Nuovo Cimento. A. 1968. V. 55. P. 233.
- [10] *В. Г. Кадышевский, Р. М. Мур-Касимов, Н. В. Скачков.* ЯФ. 1969. Т. 9. С. 212.
- [11] *В. Г. Кадышевский, Р. М. Мур-Касимов, Н. В. Скачков.* ЯФ. 1969. Т. 9. С. 462.
- [12] *В. Г. Кадышевский, Р. М. Мур-Касимов, М. Фриман.* ЯФ. 1969. Т. 9. С. 646.
- [13] *C. Itzykson, V. G. Kadyshevsky, I. T. Todorov.* Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 2823.
- [14] *В. Г. Кадышевский.* Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны. В сб.: Проблемы теоретической физики. Ред. В. И. Ритус (отв. ред) и др. М.: Наука, 1972. С. 52.
- [15] *V. G. Kadyshevsky.* Fundamental length as a new scale in quantum field theory. In: Proceedings of the International Conference on High Energy Physics and Elementary Particles. Ed. L. D. Nemenov. Dubna: JINR, 1975. P. 305.
- [16] *D. V. Fursaev, V. G. Kadyshevsky.* CRM Proceedings and Lecture Notes. 1996. V. 9. P. 125.
- [17] *K. Takasaki, T. Takebe.* Lett. Math. Phys. 1991. V. 23. P. 205; hep-th/9112042.
- [18] *K. Takasaki, T. Takebe.* Lett. Math. Phys. 1993. V. 28. P. 165; hep-th/9301070.
- [19] *K. Takasaki, T. Takebe.* Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 743; hep-th/9405096.
- [20] *C. P. Boyer, J. D. Finley.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 1126.
- [21] *I. Bakas.* Commun. Math. Lett. 1990. V. 134. P. 487.
- [22] *Q-Han Park.* Phys. Lett. B. 1990. V. 236. P. 429.
- [23] *R. S. Ward.* Class. Quantum Grav. 1990. V. 7. P. L95.
- [24] *I. Krichever.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 415.
- [25] *F. Delduc, M. V. Saveliev, P. Sorba.* Phys. Lett. B. 1992. V. 277. P. 411.
- [26] *J. Hoppe, Q-Han Park.* Phys. Lett. B. 1994. V. 231. P. 333; hep-th/9312020.
- [27] *K. Takasaki.* Commun. Math. Phys. 1995. V. 170. P. 101; hep-th/9403190.
- [28] *L. Bonora, C. S. Xiong.* Phys. Lett. B. 1995. V. 347. P. 41; hep-th/9405004.
- [29] *D. M. Calderbank, P. Tod.* Differ. Geom. Appl. 2001. V. 14. P. 199; math.DG/9911121.
- [30] *V. Kazakov, I. Kostov, D. Kutasov.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 622. P. 141; hep-th/0101011.
- [31] *S. Alexandrov, V. Kazakov.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 610. P. 77; hep-th/0104094.
- [32] *D. B. Fairlie and A. N. Leznov.* Infinite series solutions of the symmetry equation for the $1 + 2$ dimensional continuous Toda chain. hep-th/9512217.

Поступила в редакцию 6.III.2002 г.