Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Малахов, К. А. Свешников, С. М. Федоров, М. Ф. Халили, Модель кирального мешка с составляющими кварками: топологические и нетопологические решения, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 2, 238–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:15:33

© 2002 г.

И. Ю. Малахов*, К. А. Свешников*,
С. М. Федоров*, М. Ф. Халили*

МОДЕЛЬ КИРАЛЬНОГО МЕШКА С СОСТАВЛЯЮЩИМИ КВАРКАМИ: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И НЕТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрена трехфазовая модификация гибридного кирального мешка, содержащая наряду с фазами асимптотической свободы и адронизации также и промежуточную фазу конститuentных кварков. С учетом эффектов поляризации фермионного вакуума найдены самосогласованные решения уравнений модели в $(1+1)$ -мерном случае. Перенормированная полная энергия мешка исследована как функция параметров, характеризующих геометрию мешка, и его топологического (барионного) заряда. Показано, что для ненулевого топологического заряда существует целая серия конфигураций, являющихся локальными минимумами полной энергии мешка и содержащих все три фазы, в то время как в нетопологическом случае минимум энергии мешка соответствует нулевым размерам области, соответствующей фазе асимптотической свободы.

Ключевые слова: гибридные киральные модели мешков, солитоны, эффекты поляризации моря Дирака.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наиболее перспективным подходом к описанию низкоэнергетической структуры барионов является использование гибридных киральных моделей (ГКМ) кварковых мешков [1]–[3]. Исходная формулировка ГКМ представляет собой мешок малого размера, внутри которого заперты безмассовые кварки и глюоны в фазе асимптотической свободы, вне реализуется бесцветная фаза нелинейно взаимодействующих мезонов типа модели Скимма [3]–[5], а граничные условия между фазами соответствуют “киральному конфайнменту” [6]. В $(1+1)$ -мерном случае эти условия совпадают с уравнениями бозонизации. На основании этого была выдвинута гипотеза, что фермионная теория внутри мешка и мезонная вне его в действительности эквивалентны, а физические свойства такого мешка не должны зависеть от выбора граничной поверхности, что представляет из себя суть “принципа Чепирского Кота” (ПЧК) [7], [8]. Однако бозонизация такого рода, а следовательно, и ПЧК могут быть строго обоснованы только в $(1+1)$ -мерном случае, в то время как в $(3+1)$ -мерном случае под вопросом находится

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: costa@bog.msu.ru

сама возможность постановки такой задачи. Как следствие в $(3+1)$ -мерных ГКМ, основанных на ПЧК, существует лишь весьма ограниченный набор характеристик (топологический заряд), действительно не зависящих от радиуса мешка [3], [8]. В то же время вся феноменология сильных взаимодействий однозначно указывает на существование характерного масштаба конфайнмента порядка 0.5 Фм , т.е. вне зависимости от степени обоснованности бозонизации в $(3+1)$ -мерных реалистических моделях ПЧК должен быть весьма сильно нарушен.

Кроме того, в таких двухфазовых ГКМ нет места для массивных составляющих кварков, концепция которых весьма хорошо зарекомендовала себя в адронной спектроскопии [9]. С этой точки зрения наиболее привлекательной была бы модель мешка, в которой свободные, практически безмассовые токовые кварки переходят сначала в одетые в результате взаимодействия массивные конституентные кварки, обладающие теми же квантовыми числами цвета, флейвора и спина, и только потом возникает чисто мезонная бесцветная фаза. Первым приближением к такому варианту мешка является трехфазовая киральная модель с промежуточной фазой взаимодействия между кварками и мезонами ненулевого радиального размера [10], [11]. Эта модель позволяет непротиворечивым образом учесть три фазы: внутреннюю фазу асимптотической свободы со свободными безмассовыми кварками, фазу конституентных кварков, приобретающих эффективную массу за счет кирально-инвариантного взаимодействия с мезонами в промежуточной области конечного размера, и внешнюю фазу адронизации, где кварковая компонента полностью подавлена, а нелинейная динамика мезонного поля приводит к возникновению конденсата в виде солитонного решения, которое обеспечивает топологический характер всей конфигурации и соответствующие квантовые числа.

Отметим, что прямое киральное кварк-мезонное взаимодействие рассматривается и в ряде других подходов к моделированию низкоэнергетической структуры адронов, в частности в моделях мешков с пионным облаком [12]–[14] и различных вариантах киральных кварк-солитонных моделей [15]–[19]. Однако роль этого взаимодействия в каждом случае совершенно различна. В работах [12]–[14] такая $\pi\bar{q}q$ -связь учитывается лишь как возмущение, а в кварк-солитонных моделях, наоборот, как основной нелинейный механизм динамического возникновения конфигурации кваркового мешка во всем пространстве. В рассматриваемом же случае реализуется промежуточный вариант, когда вклад прямого кирального кварк-мезонного взаимодействия в характеристики системы является нелинейным, но конфайнмент кварков обеспечивается дополнительным условием записания. Такой подход, с одной стороны, позволяет реализовать заложенный в таком взаимодействии нелинейный механизм динамической генерации массы кварков в промежуточной фазе, а с другой стороны, в отличие от кварк-солитонных моделей, не имеет проблем, связанных с отсутствием полного конфайнмента.

В данной работе рассматривается $(1+1)$ -мерный вариант такой модели, когда однофлейворное фермионное поле кирально-инвариантным образом взаимодействует в промежуточной области с действительным скалярным полем, обладающим во внешней области нелинейным солитонным решением. С учетом эффектов поляризации фермионного вакуума найдены самосогласованные решения уравнений модели, обладающие различными значениями топологического заряда. Перенормированная полная энергия мешка исследована как функция параметров, характеризующих геометрию мешка, и то-

топологического заряда решения. Показано, что для ненулевого топологического заряда существует целая серия конфигураций, являющихся локальными минимумами полной энергии мешка и содержащих все три фазы, в то время как при нулевом топологическом заряде минимум энергии мешка соответствует нулевым размерам области фазы асимптотической свободы.

2. ЛАГРАНЖИАНЫ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Разбиение пространства мешка на области, соответствующие отдельным фазам, осуществляется посредством системы вспомогательных полей $\theta(x)$. Основой метода является лагранжиан типа

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \theta V(\phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta)^2 - g_0^2 W(\theta), \quad (2.1)$$

где считается, что константа связи g_0 самодействия поля θ настолько велика, что в первом приближении влиянием материальных полей ϕ на динамику поля θ можно пренебречь, а потом использовать полученные решения для управления их динамикой [10], [20]. Очевидно, что можно составить лагранжиан, включающий необходимое число полей $\theta(x)$ с соответствующим самодействием, которые будут задавать (почти) прямоугольное разбиение пространства на области, соответствующие различным фазам, а лоренц-ковариантность будет нарушена при этом лишь спонтанно, на уровне решений уравнений движения, поэтому для восстановления ковариантности можно использовать метод ковариантных групповых переменных [21].

В дальнейшем мы будем считать, что вспомогательные поля $\theta(x)$ уже сформировали требуемую конфигурацию мешка, и будем исходить из следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \varphi^2 \theta_I - \frac{M}{2}[\bar{\psi}, e^{ig\gamma_5 \varphi} \psi]_- \theta_{II} - \left(\frac{M_0}{2}[\bar{\psi}, e^{ig\gamma_5 \varphi} \psi]_- + V(\varphi) \right) \theta_{III}, \quad (2.2)$$

где $\theta_I = \theta(|x| < x_1)$, $\theta_{II} = \theta(x_1 \leq |x| \leq x_2)$, $\theta_{III} = \theta(|x| > x_2)$ – ступенчатые функции, выделяющие соответствующие области мешка. Коммутатор по фермионным полям в выражениях, задающих киральную связь между фермионами и бозонами, обеспечивает зарядовую симметрию модели. Подчеркнем, что в рассматриваемой модели отсутствует член с вакуумным давлением, так как благодаря наличию промежуточной фазы в этой модели поляризация “моря Дирака” ведет себя весьма специфическим образом и уже сама по себе обеспечивает необходимое вакуумное давление. Отсутствует также принципиальная необходимость в “валентных” кварках, так как все квантовые числа мешка как целого – в рассматриваемом простейшем случае это его барионное число – обеспечивает бозонный конденсат в виде топологического солитона.

Таким образом, исходно мы имеем теорию двух полей – фермионного ψ и бозонного φ . В области I бозоны имеют массу m_0 , в области II поле φ безмассовое и кирально-инвариантным образом взаимодействует с фермионами, в результате чего фермионы приобретают эффективную массу M , а в области III эффективная масса фермионов становится равной M_0 и включается самодействие поля φ , приводящее к солитонному решению для бозонного поля в этой области. Чтобы сформировать мешок, мы далее

полагаем массу M_0 очень большой, что приводит к динамическому обращению в нуль фермионного поля во внешней области. Устремив к бесконечности массу m_0 , получим, что для конечности энергии системы скалярное поле φ должно обращаться в нуль в области I. Будем также считать, что потенциал самодействия бозонного поля $V(\varphi)$ симметричен. Тогда решение уравнений движения для бозонного поля может быть как нечетной (топологический заряд условно равен единице), так и четной (топологический заряд равен нулю) функцией.

Рассмотрим теперь поведение полей более подробно. Как принято в гибридных моделях такого типа, бозонное поле рассматривается в приближении среднего поля, т.е. является c -числовым. Игнорируя пока явно лоренц-ковариантное описание, будем рассматривать систему центра масс мешка. Тогда $\varphi(x)$ будет стационарным классическим полем, на фоне которого эволюционируют фермионы. В области I $\varphi(x) = 0$, а в области III оно расщеплено с фермионами из-за бесконечной эффективной массы последних и формируется исключительно за счет самодействия $V(\varphi)$.

Уравнения движения имеют следующий вид:
в области I

$$i\hat{\partial}\psi = 0, \quad (2.3a)$$

$$\varphi = 0; \quad (2.3b)$$

в области II

$$(i\hat{\partial} - Me^{ig\gamma_5\varphi})\psi = 0, \quad (2.4a)$$

$$\varphi'' = ig\frac{M}{2}\langle[\bar{\psi}, \gamma_5 e^{ig\gamma_5\varphi}\psi]_-\rangle, \quad (2.4b)$$

где $\langle\cdot\rangle$ означает усреднение по заданному состоянию фермионов в мешке;
в области III

$$(i\hat{\partial} - M_0 e^{ig\gamma_5\varphi})\psi = 0, \quad (2.5a)$$

$$-\varphi'' + V'(\varphi) = 0. \quad (2.5b)$$

Для упрощения вычислений положим далее $g = 1$, поскольку зависимость от g легко восстанавливается с помощью подстановки $\varphi \rightarrow \varphi/g$. Тогда спектральная задача для волновых функций фермионов ψ_ω с определенной энергией ω примет вид

$$\omega\psi_\omega = -i\alpha\psi'_\omega + \beta e^{i\gamma_5\varphi}[M\theta_{II} + M_0\theta_{III}]\psi_\omega. \quad (2.6)$$

Если $M_0 \rightarrow \infty$, то в области III $\psi_\omega \rightarrow 0$, причем таким образом, что член $M_0\psi_\omega$ в уравнении (2.6) исчезает, а в точках $\pm x_2$ возникают граничные условия

$$\pm i\gamma^1\psi_\omega(\pm x_2) + e^{i\gamma_5\varphi(\pm x_2)}\psi_\omega(\pm x_2) = 0. \quad (2.7)$$

Дополненные условием непрерывности $\psi(x)$ на границах между областями I и II условия (2.7) обеспечивают корректную формулировку спектральной задачи для фермионов в мешке. Отметим, что граничные условия (2.7) суть не что иное, как стандартные

киральные граничные условия для гибридных моделей [1]–[8]. Здесь, однако, они возникают не из локального поверхностного действия, что на самом деле не вполне корректно, а как естественное следствие бесконечной массы фермионов в области III [10], [22]. В области I уравнение (2.6) является уравнением свободных безмассовых фермионов

$$\omega\psi_I = -i\alpha\psi'_I, \quad (2.8)$$

а в области промежуточной фазы II имеем

$$\omega\psi_{II} = -i\alpha\psi'_{II} + \beta M e^{i\gamma_5\varphi}\psi_{II}. \quad (2.9)$$

На границе между областями I и II волновые функции ψ_I и ψ_{II} сшиваются по непрерывности,

$$\psi_I(\pm x_1) = \psi_{II}(\pm x_1), \quad (2.10)$$

а при $|x| = x_2$ удовлетворяют граничным условиям (2.7). При этом в уравнении (2.9) поле φ не произвольно, а самосогласованным образом определяется из уравнения (2.4б) с соответствующими граничными условиями непрерывности в точках $|x| = x_{1,2}$.

3. РЕШЕНИЯ С НЕНУЛЕВЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ

Существенной особенностью данной конструкции мешка является тот факт, что у связанных уравнений (2.4а) и (2.4б) в замкнутой промежуточной области II конечного размера $d = x_2 - x_1$ существует простое и физически содержательное решение, которое было бы неприемлемо, если бы эти уравнения рассматривались в неограниченном пространстве. Чтобы прийти к этому решению наиболее последовательным образом, сделаем сначала в области II киральный поворот Скирма

$$\psi_\omega = e^{-i\gamma_5\varphi/2}\chi_\omega, \quad (3.1)$$

при этом уравнение (2.9) и граничное условие (2.7) принимают вид

$$\left(\omega - \frac{1}{2}\varphi'\right)\chi_\omega = -i\alpha\chi'_\omega + \beta M\chi_\omega, \quad (3.2)$$

$$\pm i\gamma^1\chi_\omega(\pm x_2) + \chi_\omega(\pm x_2) = 0, \quad (3.3)$$

соответственно. Очевидно, что если мы постулируем линейное поведение поля $\varphi(x)$ в области II, именно

$$\varphi' = \text{const} = 2\lambda, \quad (3.4)$$

то уравнение (3.2) станет уравнением свободных массивных фермионов

$$\nu\chi = -i\alpha\chi' + \beta M\chi \quad (3.5)$$

с собственными значениями $\nu = \omega - \lambda$. Таким образом, безмассовые в области I фермионы в области II за счет взаимодействия с полем φ приобретают массу M , и тем самым возникает промежуточная фаза, описывающая массивные (почти)невзаимодействующие “составляющие кварки”.

Наиболее важным для нас свойством уравнения (3.5) является то, что оно обладает очевидной знаковой симметрией $\nu \leftrightarrow -\nu$, которой соответствуют унитарные преобразования дираковской волновой функции

$$\chi \rightarrow \tilde{\chi} = i\gamma_1 \chi, \quad (3.6)$$

при этом плотность кирального тока

$$j_5 = i\bar{\psi}\gamma_5 e^{i\gamma_5 \phi} \psi = i\chi^\dagger \gamma_1 \chi \quad (3.7)$$

для зарядово-симметричных состояний не меняется:

$$j_5 = i\chi^\dagger \gamma_1 \chi = i\tilde{\chi}^\dagger \gamma_1 \tilde{\chi} = \tilde{j}_5. \quad (3.8)$$

В общем случае, однако, из знаковой симметрии $\nu \leftrightarrow -\nu$ в уравнении (3.5) соответствующего свойства для спектра фермионов в рассматриваемой задаче еще не следует, так как уравнение (3.5) справедливо лишь в области II, а спектр определяется из решения уравнений Дирака на объединении областей I и II. При этом в области I мы имеем уравнение (2.8), которое обладает другой симметрией, именно $\omega \leftrightarrow -\omega$. Это приводит к тому, что знаковая симметрия $\nu \leftrightarrow -\nu$ фермионного спектра может иметь место только для дискретных значений производной φ' в области II. Эти значения находятся из вида трансцендентного алгебраического уравнения на фермионные уровни энергии, которое получается прямолинейным решением уравнений (2.8) и (2.9) с учетом граничных условий (2.7) и связи (2.10),

$$e^{4i\omega x_1} = \frac{1 - e^{-2ikd} \frac{M-i(\nu+k)}{M-i(\nu-k)}}{1 - e^{-2ikd} \frac{M+i(\nu-k)}{M+i(\nu+k)}} \frac{1 - e^{2ikd} \frac{M-i(\nu-k)}{M-i(\nu+k)}}{1 - e^{2ikd} \frac{M+i(\nu-k)}{M+i(\nu+k)}}, \quad (3.9)$$

где $\nu^2 = k^2 + M^2$. Анализируя уравнение (3.9), нетрудно убедиться в том, что фермионный спектр будет иметь симметрию $\nu \leftrightarrow -\nu$, если

$$4\lambda x_1 = \pi s, \quad (3.10)$$

где s – целое число, так как при таких значениях производной поля $\varphi(x)$ в области II левая часть уравнения (3.9) сведется к $(-1)^s e^{4i\nu x_1}$.

При выполнении этого условия становится содержательной следующая цепочка рассуждений. В области II в правой части уравнения (2.4б), определяющего $\varphi''(x)$ в этой области, мы имеем среднее от C -нечетного кирального тока

$$J_5 = \frac{1}{2}[\bar{\psi}, i\gamma_5 e^{i\gamma_5 \phi} \psi]_- = \frac{1}{2}[\chi^\dagger, i\gamma_1 \chi]_-, \quad (3.11)$$

где под χ уже следует понимать вторично-квантованное дираковское поле в киральном представлении (3.1)

$$\chi(x, t) = \sum_n b_n \chi_n(x) e^{-i\omega_n t}, \quad (3.12)$$

$\chi_n(x)$ – нормированные решения соответствующего уравнения Дирака, а b_n^+, b_n – операторы рождения и уничтожения фермионов, удовлетворяющие каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\{b_n, b_{n'}^+\}_+ = \delta_{nn'}, \quad \{b_n, b_{n'}\}_+ = 0. \quad (3.13)$$

Усреднение по заданному состоянию мешка по определению включает усреднение по заполненному “море” состояний с отрицательной энергий $\omega_n < 0$ плюс возможные заполненные валентные состояния фермионов с $\omega_n > 0$, которые пока мы будем опускать, поскольку их статус будет далее оговариваться особо. В результате имеем

$$\langle J_5 \rangle = \langle J_5 \rangle_{\text{sea}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\omega_n < 0} - \sum_{\omega_n > 0} \right) \chi_n^+ i \gamma_1 \chi_n. \quad (3.14)$$

Подчеркнем, что в формуле (3.14) разделение на “морские” и валентные фермионы происходит в соответствии со знаком их собственных частот ω_n , которые отличаются от знаково-симметричных ν_n сдвигом на λ ,

$$\omega_n = \nu_n + \lambda, \quad (3.15)$$

и поэтому сами по себе симметрией $\omega \leftrightarrow -\omega$ не обладают. Однако если мы дополнительно предположим, что ν_n и λ таковы, что для всех n знаки ν_n и ω_n одинаковы, т.е. что при сдвиге на λ никакое из значений ν_n не меняет свой знак, то в соотношении (3.14) условие $\omega_n \geq 0$ эквивалентно условию $\nu_n \geq 0$. Тогда

$$\langle J_5 \rangle_{\text{sea}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu_n < 0} - \sum_{\nu_n > 0} \right) \chi_n^+ i \gamma_1 \chi_n = 0 \quad (3.16)$$

в силу соотношения (3.8). Но это, в свою очередь, означает, что уравнение (2.4б) в области II сводится к $\varphi'' = 0$, что полностью согласуется с исходным допущением о том, что $\varphi'(x) = \text{const}$ в области II. Иными словами, мы получаем решение связанных уравнений (2.4а) и (2.4б) в области II в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2\lambda(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 2\lambda(x + x_1), & -x_2 \leq x \leq -x_1, \end{cases} \quad (3.17)$$

где λ принимает дискретные значения из (3.10), а энергетический спектр фермионов определяется по формуле (3.15), где, в свою очередь, ν_n определяется из уравнения (3.9) с заменой левой части на $(-1)^s e^{4i\nu x_1}$.

Необходимо отметить следующие факторы, определяющие содержательность такого решения. Первый из них – это конечность размера d промежуточной области, так как для неограниченной области II решение (3.17) физически неприемлемо по очевидным причинам. В нашем случае, однако, размер промежуточной области всегда конечен по построению, а солитонный характер бозонное поле $\varphi(x)$ приобретает в области III за счет самодействия $V(\varphi)$. Здесь еще раз проявляется то обстоятельство, что само по себе киральное взаимодействие $\bar{\psi} e^{i\gamma_5 \varphi} \psi$ в $(1+1)$ -мерном случае не способно придать

солитонный характер динамике скалярного поля только за счет эффектов поляризации фермионного вакуума, необходимо еще дополнительное самодействие бозонов [23].

Вторым фактором является дискретность и наличие симметрии $\nu \leftrightarrow -\nu$ фермионного спектра, что, в свою очередь, приводит к достаточно очевидному способу вычисления среднего от кирального тока J_5 по “морю Дирака” (3.16), равно как и других C -нечетных величин типа фермионного числа. Наконец, в рассматриваемом случае бозонное поле нигде не прерывается (оно существует и в области I) и топологически эквивалентно тому нечетному солитону, который имел бы место в отсутствие фермионов только за счет самодействия $V(\varphi)$. Поэтому от наличия и размеров областей пространства, содержащих фермионы (I и II), топологический заряд бозонного поля не зависит. С другой стороны, по определению барионный заряд гибридного мешка есть сумма топологического заряда бозонного солитона и фермионного заряда внутренних областей мешка. Последний в нашем случае равен нулю, поэтому барионный заряд мешка определяется только топологическим зарядом бозонного поля и, как это и требуется по идеологии гибридных моделей, не зависит от размеров областей I и II, содержащих фермионы. Более подробное обоснование такого способа решения уравнений (2.4) и его единственности приведено в работе [10].

Заметим также, что хотя топологические квантовые числа такого мешка определяются его солитонной компонентой, это не означает, что заполненные фермионные уровни с положительной энергией обязательно должны отсутствовать. Это будет иметь место только при достаточно малых значениях параметра λ . С ростом λ уровни с отрицательной энергией $\omega_n = -|\nu_n| + \lambda$ с неизбежностью начнут переходить в положительную область спектра. При этом изменение знака каждого такого уровня будет приводить к уменьшению $\langle Q \rangle_{\text{sea}}$ на одну единицу заряда, но если мы заполним появившийся положительный вакантный уровень валентным фермионом, то сумма $Q_{\text{val}} + Q_{\text{sea}}$ останется по-прежнему нулевой. Аналогично полный аксиальный ток будет равен $J_{\text{val}} + J_{\text{sea}}$ и также не изменится, что, в свою очередь, обеспечит нулевую правую часть в уравнении (2.4б) и сохранит статус линейной функции (3.17) как самосогласованного решения уравнений модели. Поэтому наличие или отсутствие валентных фермионов в рассматриваемой конструкции основного состояния мешка зависит от соотношения между λ и $|\nu|_{\text{min}}$ и оказывается такой же динамической характеристикой, как и его другие параметры (размеры и масса), которые определяются из условия минимума его полной энергии.

Другой существенной особенностью рассматриваемой конструкции мешка является то обстоятельство, что функция (3.17) является самосогласованным решением уравнений (2.4) только для четных значений $s = 2r$ в формуле (3.10). Причина этого состоит в том, что для нечетных значений $s = 2r + 1$ фермионный спектр, получаемый из решения уравнений (2.7)–(2.10) при $\varphi' = 2\lambda$, всегда будет содержать невырожденный уровень $\chi_0(x)$ со строго нулевой частотой $\nu_0 = 0$, тогда как для четных $s = 2r$ все $\nu_n \neq 0$. В соответствии с общей теорией [24] такая нулевая мода приводит к явлению фракционализации, которое в данном случае состоит в том, что вклад от нее во все C -нечетные наблюдаемые будет определяться оператором $(b_0^+ b_0 - b_0 b_0^+)/2$ с собственными значениями $\pm 1/2$ и числовым коэффициентом, определяемым через $\chi_0(x)$. Заметим теперь, что в качестве состояния, по которому усредняется киральный ток в правой части урав-

нения (2.4б), должен выбираться его собственный вектор, чтобы обеспечить нулевую дисперсию тока, иначе вся система уравнений (2.4) окажется плохо обусловленной. Поэтому операторная часть вклада от нулевой моды в правую часть (2.4б) даст с неизбежностью множитель $\pm 1/2$, а сама волновая функция $\chi_0(x)$ при этом оказывается такова, что соответствующий ток j_5 в области II отличен от нуля (он пропорционален $e^{-2M|x|}$). За счет этого правая часть уравнения (2.4б) для нечетного $s = 2r + 1$ теперь не обращается в нуль, и функция (3.17) уже не является самосогласованным решением уравнений (2.4).

Нетрудно, однако, указать способ построения аналогичных мешков с разрешенными нечетными значениями $s = 2r + 1$. Этот способ основан на характерной для таких двумерных моделей мешков возможности независимым образом выбирать в лагранжиане модели знак киральных фермионных масс M , M_0 , причем по отдельности слева и справа от области асимптотической свободы. Более конкретно, рассмотренные выше конфигурации с четным s возникают из лагранжиана (2.2), который симметричен по знакам фермионных масс слева и справа. Теперь рассмотрим ситуацию, когда в лагранжиане (2.2) все киральные массы слева от центральной области меняют знак, в результате чего получаем лагранжиан следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 \theta_I - \frac{M}{2} [\bar{\psi}, e^{ig\gamma_5 \varphi} \psi]_+ (\theta_{II}^{(+)} - \theta_{II}^{(-)}) - \\ & - \frac{M_0}{2} [\bar{\psi}, e^{ig\gamma_5 \varphi} \psi]_+ (\theta_{III}^{(+)} - \theta_{III}^{(-)}) - V(\varphi) (\theta_{III}^{(+)} + \theta_{III}^{(-)}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\theta_I = \theta(|x| < x_1)$, $\theta_{II}^{(\pm)} = \theta(x_1 \leq \pm x \leq x_2)$, $\theta_{III}^{(\pm)} = \theta(\pm x > x_2)$. Этот лагранжиан антисимметричен по знакам киральных масс слева и справа. Качественно поведение киральных масс для этих двух случаев показано на рис. 1.

Легко видеть, что изменение знака M_0 слева приводит лишь к смене знака в соответствующем граничном условии. В данном случае вместо (2.7) в точке $x = -x_2$ будем иметь

$$i\gamma^1 \psi_\omega(-x_2) + e^{i\gamma_5 \varphi(-x_2)} \psi_\omega(-x_2) = 0. \quad (3.19)$$

В промежуточной области после поворота Скирма уравнение Дирака (3.5) принимает вид

$$\nu \chi = -i\alpha \chi' \pm \beta M \chi, \quad (3.20)$$

где в правой части знак $\pm$ соответствует знаку кирального взаимодействия справа и слева. Для такой задачи знаковая симметрия спектра $\nu \leftrightarrow -\nu$ снова будет иметь место при преобразованиях $\chi \rightarrow \tilde{\chi} = \sigma_2 \chi$, киральный ток не меняется, $j_5 = \tilde{j}_5$, поэтому снова проходит вся схема решения с линейной подстановкой (3.4) и $\omega = \nu + \lambda$. При этом спектральное уравнение на частоты сначала получается в виде

$$e^{4i\omega x_1} = - \frac{1 - e^{-2ikd} \frac{M-i(\nu+k)}{M-i(\nu-k)}}{1 - e^{-2ikd} \frac{M+i(\nu-k)}{M+i(\nu+k)}} \frac{1 - e^{2ikd} \frac{M-i(\nu-k)}{M-i(\nu+k)}}{1 - e^{2ikd} \frac{M+i(\nu+k)}{M+i(\nu-k)}} \quad (3.21)$$

и отличается знаком от уравнения (3.9). Появление этого дополнительного знака обусловлено антисимметрией исходного лагранжиана (3.18) по знакам фермионных массовых членов. Знаковая симметрия спектра $\nu \leftrightarrow -\nu$ по-прежнему обеспечивается условием (3.10), но теперь нулевая мода возникает при четных s , поэтому состоятельными

Рис. 1. Поведение киральных фермионных масс для симметричного (сверху) и анитсимметричного (снизу) случаев.

линейные решения (3.17) оказываются только при нечетных s , для которых $e^{4i\omega x_1} = -e^{4i\nu x_1}$. В результате окончательное спектральное уравнение для фермионов как в четном, так и в нечетном случаях имеет один и тот же вид

$$e^{4i\nu x_1} = \frac{1 - e^{-2ikd} \frac{M-i(\nu+k)}{M-i(\nu-k)}}{1 - e^{-2ikd} \frac{M+i(\nu-k)}{M+i(\nu+k)}} \frac{1 - e^{2ikd} \frac{M-i(\nu-k)}{M-i(\nu+k)}}{1 - e^{2ikd} \frac{M+i(\nu+k)}{M+i(\nu-k)}}. \quad (3.22)$$

Может показаться, что нечетный случай невозможен, поскольку лагранжиан (3.18) не является инвариантным относительно пространственной инверсии. Это, однако, обусловлено лишь тем обстоятельством, что рассматриваемые модели содержат только такой набор членов, чтобы описывать один изолированный мешок. Легко видеть, что модель, содержащая два нечетных мешка, зеркальных друг к другу, уже будет обладать P -четностью. Таким образом, как четные, так и нечетные мешки имеют физически совершенно равноправный статус и в совокупности исчерпывают все возможные значения s в соотношении (3.10) при одном и том же спектральном уравнении для частот ν_n (3.22). По существу, имеет место своеобразная дискретная симметрия, так как такая смена знаков в лагранжиане никак не сказывается на основных наблюдаемых свойствах системы — конфайнменте фермионов, свойствах промежуточной фазы, спектре частот ν_n , а лишь определяет четность или нечетность разрешенных значений s в формуле (3.10).

Заметим также, что рис. 1 не исчерпывает всех возможных типов мешков, которые можно получить, комбинируя знаки киральных масс различными способами. В частности, существуют такие комбинации, при которых фермионы будут иметь другой энергетический спектр по сравнению с уравнением (3.9), а возникающие при этом мешки будут обладать рядом других физических свойств. Рассмотрение этого вопроса будет опубликовано отдельно [25].

4. ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ МЕШКА ДЛЯ НЕНУЛЕВОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Без потери общности будем рассматривать мешки с четными значениями $s = 2r$, возникающими в P -четной модели (2.2). Итоговая конфигурация бозонного поля приведена на рис. 2. В области I $\varphi \equiv 0$, в области II бозонное поле есть линейная функция (3.17), которая после восстановления зависимости от g сшивается по непрерывности вместе с производной с солитонным решением уравнения (2.5б), которое задает динамику бозонов во внешней области. Чтобы не детализировать структуру самодействия поля φ , мы будем считать, что в области III можно воспользоваться асимптотическим разложением решения уравнения (2.5б) при больших $|x|$, т.е.

$$\varphi_{\text{sol}}(x) = \frac{\pi}{g}(1 - Ae^{-mx}), \quad x > x_2, \quad (4.1)$$

где m – (ненулевая) масса мезона во внешней области мешка (для $x < -x_2$ $\varphi_{\text{sol}}(x)$ определяется по нечетности). Киральная симметрия во внешней области мешка, естественно, при этом утрачивается. Следует, однако, отметить, что последнее обстоятельство определяется прежде всего спецификой $(1 + 1)$ -мерного случая, из-за которой наличие ненулевой массы мезона становится необходимым условием формирования требуемого солитонного профиля.

Рис. 2. Конфигурация бозонного поля для изолированного мешка с ненулевым топологическим зарядом.

Коэффициент π/g соответствует тому, что мы имеем дело с фазовым солитоном, полная амплитуда которого должна быть кратна $2\pi/g$, так как это есть период затравочного кирального взаимодействия $\bar{\psi}e^{i\gamma_5 g \varphi}\psi$. Константа A определяется из условия сшивки по непрерывности бозонного поля в точках $x = \pm x_2$, которое дает

$$x_1 = \frac{r}{r+1} \left(x_2 + \frac{1}{m} \right), \quad d = \frac{x_2 - r/m}{r+1}. \quad (4.2)$$

При этом из условия $d \geq 0$ возникают дополнительные условия на размер области конфайнмента, т.е. на внешний размер собственно мешка x_2 : $m x_2 \geq r$. Это условие показывает, что r естественно рассматривать как индекс, нумерующий возбужденные состояния мешка, размеры которых растут с ростом r .

Далее находим связь между параметром λ и размером мешка:

$$2\lambda = \pi m \frac{r+1}{m x_2 + 1}, \quad (4.3)$$

после чего полная энергия бозонного солитона может быть представлена в виде

$$E_\varphi = m \frac{\pi^2}{g^2} \frac{r+1}{m x_2 + 1}. \quad (4.4)$$

Полная энергия мешка складывается из E_φ и фермионного вклада E_ψ :

$$E_{\text{bag}} = E_\varphi + E_\psi. \quad (4.5)$$

Как легко видеть из (4.4), энергия бозонного поля ведет себя вполне гладким образом и убывает при $x_2 \rightarrow \infty$, не создавая тем самым вакуумного давления, несмотря на то что в области II градиент φ порождает постоянный положительный вклад в плотность энергии $\varphi'^2/2 = 2\lambda^2$, что можно было бы отождествить с вакуумным давлением B в стандартной ГКМ. В действительности такое поведение есть следствие одномерности нашей задачи: градиент φ в области II с ростом размеров мешка будет всегда одинаково убывать при любом числе пространственных измерений, а объем области II в одномерном случае растет лишь линейно и не компенсирует убывание λ , что имело бы место в двух- и трехмерном случаях. Таким образом, в $(1+1)$ -мерном случае вся нетривиальная зависимость полной энергии мешка E_{bag} от параметров задачи обусловлена только фермионным вкладом в энергию E_ψ , который в общем случае представляет из себя сумму энергий “моря Дирака” заполненных состояний с отрицательной энергией и валентных фермионов с положительной энергией,

$$E_\psi = E_{\text{val}} + E_{\text{sea}}. \quad (4.6)$$

Для основного состояния мешка, устроенного описанным в предыдущем разделе образом, сумма (4.6) может быть сведена к одному универсальному выражению, если учесть, что в зарядово-симметричном случае энергия “моря Дирака” должна быть определена следующим образом [23], [26]:

$$E_{\text{sea}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\omega_n < 0} - \sum_{\omega_n > 0} \right) \omega_n. \quad (4.7)$$

В случае сохранения знака при переходе от ω_n к ν_n для всех n валентные фермионы в основном состоянии отсутствуют (чтобы обеспечить равенство нулю среднего от заряда и аксиального тока). Тогда из (4.7) получим

$$E_\psi = E_{\text{sea}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu_n > 0} (-\nu_n + \lambda) - \frac{1}{2} \sum_{\nu_n > 0} (\nu_n + \lambda) = - \sum_{\nu_n > 0} \nu_n. \quad (4.8)$$

Заметим, что здесь неравенство строгое, так как в силу упомянутых выше причин фермионных уровней с $\nu = 0$ не может быть.

Если же параметр λ таков, что изначально отрицательный уровень $\omega_n = -|\nu_n| + \lambda$ меняет знак, то он становится заполненным валентным состоянием. Последнее снова необходимо для того, чтобы обеспечить равенство нулю среднего от заряда и аксиального тока. Для этого случая вычисление E_ψ удобно провести в два этапа. Сначала учтем вклад в E_{sea} от всех состояний с $|\nu_n| > \lambda$, который по аналогии с (4.8) будет равен

$$E'_{\text{sea}} = - \sum_{\nu_m > \lambda} \nu_m. \quad (4.9)$$

К этому выражению следует добавить энергию появившегося валентного фермиона $E_{\text{val}} = -|\nu_n| + \lambda$ и вклад от положительных уровней с $\omega_n = \pm|\nu_n| + \lambda$ в энергию “моря Дирака”, что дает

$$E_\psi = -|\nu_n| + \lambda - \frac{1}{2} [(-|\nu_n| + \lambda) + (|\nu_n| + \lambda)] + E'_{\text{sea}} = - \sum_{\nu_n > 0} \nu_n \quad (4.10)$$

и совпадает с выражением (4.8), которое мы имели для энергии фермионов в отсутствие заполненных валентных состояний.

Для дальнейшего удобно ввести ряд новых параметров, в терминах которых полная энергия мешка будет записываться наиболее удобным образом. Для этого прежде всего введем безразмерные величины

$$\alpha = 2Mx_1, \quad \beta = 2Md, \quad \rho = 2Mx_2 \quad (4.11)$$

и в их терминах рассмотрим более детально уравнение (3.22), из которого определяются уровни ν_n . Это уравнение имеет две ветви корней, первая из которых соответствует действительным k и в терминах параметров α и β приводится к следующему виду:

$$\text{tg}(\alpha\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \frac{x \cos \beta x + \sin \beta x}{1 - \cos \beta x + x \sin \beta x}, \quad (4.12)$$

где неизвестным является безразмерная величина x , связанная с k соотношением $k = Mx$, так что $\nu = M\sqrt{1+x^2}$. При этом область изменения действительных корней x_n есть полуось $0 \leq x_n < \infty$, так как в силу конечности размеров области конфайнмента фермионов и граничных условий на концах фермионные волновые функции есть фактически стоячие волны, вырожденные по знаку k , а соответствующие частоты ν_n меняются в пределах $M \leq \nu_n < \infty$.

Вторая ветвь соответствует чисто мнимому $k = iMx$, $\nu = M\sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, и получается из (4.12) аналитическим продолжением:

$$\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{1-x^2}) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x \operatorname{ch} \beta x + \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch} \beta x + x \operatorname{sh} \beta x - 1}. \quad (4.13)$$

При этом для второй ветви $0 < \nu_n \leq M$.

Таким образом, ν_n и тем самым E_ψ оказываются функциями двух безразмерных параметров α и β , которые, однако, не являются независимыми, а в сумме должны давать размер области конфайнмента в безразмерных единицах

$$\alpha + \beta = \rho. \quad (4.14)$$

Далее удобно отфакторизовать массу “составляющего кварка” M в виде размерного множителя, для чего положим

$$\varepsilon_n = \frac{\nu_n}{M} = \sqrt{1+x_n^2}, \quad (4.15)$$

так что $E_\psi = -M \sum_n \varepsilon_n$, ввести безразмерное отношение двух массовых параметров теории

$$\mu = \frac{m}{2M}, \quad (4.16)$$

безразмерную энергию фермионов $\mathcal{E}_\psi = E_\psi/M$ и аналогично безразмерную полную энергию $\mathcal{E}_{\text{bag}} = E_{\text{bag}}/M$. Для последней окончательно имеем следующее выражение:

$$\mathcal{E}_{\text{bag}} = \mathcal{E}_\psi(\alpha, \beta) + 2\mu \frac{\pi^2}{g^2} \frac{r+1}{\mu\rho+1}. \quad (4.17)$$

При этом безразмерные параметры α и β однозначно определяются по μ и ρ :

$$\alpha = \frac{r}{r+1} \left(\rho + \frac{1}{\mu} \right), \quad \beta = \frac{\rho - r/\mu}{r+1}. \quad (4.18)$$

Таким образом, полная энергия мешка имеет нетривиальную зависимость от двух безразмерных параметров μ и ρ , при этом параметр μ фиксируется заданием масс m и M , а оптимальное значение размера мешка при данном μ определяется по минимуму полной энергии $\mathcal{E}_{\text{bag}}$, к изучению которой мы и перейдем. Для этого нам прежде всего требуется с помощью подходящей вычислительной процедуры провести перенормировку энергии фермионного “моря” в $\mathcal{E}_\psi$, которая с очевидностью расходится на верхнем пределе.

Начнем с изучения асимптотики корней уравнения (4.12) в ультрафиолетовой (УФ) области, когда $x_n \gg 1$. Представляя уравнение (4.12) в виде

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sqrt{1+x^2} &= \frac{1}{2} (\sqrt{1+x^2} + x) \sin(\alpha \sqrt{1+x^2} + \beta x + \delta) + \\ &+ \frac{1}{2} (\sqrt{1+x^2} - x) \sin(\alpha \sqrt{1+x^2} - \beta x - \delta), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\delta = \operatorname{arctg} x$, находим

$$\varepsilon_n(\alpha, \beta) = \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{(-1)^{n+1} \sin[(\pi/2 + \pi n)\alpha/\rho] + 1 + \beta/2}{\pi/2 + \pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (4.20)$$

В этом выражении первое слагаемое дает квадратичную и линейную расходимость в $\sum_n \varepsilon_n$, а во втором содержится логарифмическая расходимость, причем член с синусом за счет осцилляций последнего к расходимости не приводит. Компенсация первого члена с очевидностью сводится к вычитанию энергии “моря” свободных фермионов, заключенных в том же “объеме” ρ , а логарифмическая расходимость, пропорциональная $\beta/2$, компенсируется соответствующим однопетлевым контрчленом собственной энергии [10]. Остающаяся логарифмическая расходимость соответствует члену $1/(\pi/2 + \pi n)$, не зависящему от параметров мешка, и обусловлена не локальным взаимодействием, а запиранием фермионов внутри мешка [10], [11]. По существу это есть (бесконечная) энергия взаимодействия фермионов с запирающим потенциалом (стенками мешка). Появление такой расходящейся поверхностной энергии в $\mathcal{E}_\psi$ является характерной чертой поляризации фермионного вакуума во всех моделях мешков [3], [8], [27]–[32].

В рассматриваемой трехфазовой модели мешка этот эффект имеет свою специфику. С одной стороны, он имеет место только при ненулевом размере области промежуточной фазы $d \neq 0$, причем возникающая поверхностная энергия заведомо отрицательна и расходится как $(-\sum_n 1/(\pi/2 + \pi n))$. Действительно, если $\alpha \rightarrow \rho$, то $(-1)^{n+1} \sin[(\pi/2 + \pi n)\alpha/\rho] \rightarrow -1$, и в асимптотике (4.20) остается только логарифмический член $\beta/(\pi + 2\pi n)$. Поэтому в этом пределе величина $\mathcal{E}_\psi$ становится конечной сразу после вычитания энергии пертурбативного вакуума и добавления однопетлевого контрчлена. С другой стороны, $\alpha \rightarrow \rho$ эквивалентно $\beta/\alpha \rightarrow 0$, поэтому бесконечная энергия связи фермионов со стенками мешка имеет место только при $d \neq 0$ и конечных размерах центральной области (фазы асимптотической свободы) мешка.

Таким образом, рассматриваемая трехфазовая модель мешка не имеет гладкого перехода в двухфазовую конфигурацию при $d \rightarrow 0$, хотя на уровне исходного лагранжиана (2.2) такая возможность формально существовала. Действительно, в случае двухфазового мешка ($d \equiv 0$) для ε_n имеется точный ответ $\varepsilon_n = (\pi/2 + \pi n)/\rho$, и величина $\mathcal{E}_\psi$ становится конечной после простого вычитания энергии пертурбативного вакуума. Поэтому переход между трехфазовой и двухфазовой конфигурациями мешка требует бесконечной энергии, что вполне характерно для свойств многофазовых систем.

Заметим также, что основная роль промежуточной фазы состоит в том, что в этой области фермионы приобретают ненулевую массу, в то время как в случае двухфазового мешка ($d \equiv 0$) от запирающих стенок отражаются непосредственно безмассовые фермионы. Таким образом, бесконечная энергия связи оказывается напрямую связана с тем, что при $d \neq 0$ от стенок мешка отражаются массивные фермионы.

В рамках трехфазовых моделей мешков мы имеем возможность продемонстрировать этот эффект еще более наглядным образом. Для этого рассмотрим P -четную модель, описывающую $(1+1)$ -мерный аналог “дибариона”, т.е. конфигурацию с (условным) топологическим зарядом 2. Такой “дибарион” состоит из двух одинаковых топологических мешков описанного выше типа, расположенных настолько близко друг от друга, что их смежные промежуточные области перекрываются. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 ((\varphi - \pi)^2 \theta_1^{(+)} + (\varphi + \pi)^2 \theta_1^{(-)}) - \frac{M}{2} [\bar{\psi}, e^{i\gamma_5 \varphi} \psi]_- \theta_{II} - \\ & - \left(\frac{M_0}{2} [\bar{\psi}, e^{i\gamma_5 \varphi} \psi]_- + V(\varphi) \right) \theta_{III}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где зависимость от g для простоты сразу опущена, $\theta_1^{(\pm)} = \theta(x_0 < \pm x < x_1)$, $\theta_{II} = \theta(|x| \leq x_0) \cup (x_1 \leq |x| \leq x_2)$, $\theta_{III} = \theta(|x| > x_2)$. Поведение киральных фермионных масс для данного случая показано на рис. 3. Самосогласованное решение модели (4.21), соответствующее “дибарионной” конфигурации, снова ищется на основе линейной подстановки (3.4) для бозонного поля в промежуточных областях с использованием знаковой симметрии $\nu \leftrightarrow -\nu$ при преобразованиях $\chi \rightarrow \tilde{\chi} = \sigma_2 \chi$ и сохранения кирального тока $j_5 = \tilde{j}_5$. Опуская прямолинейные, но довольно громоздкие вычисления, приведем основные результаты.

Рис. 3. Поведение киральных фермионных масс для “дибарионной” конфигурации.

Рис. 4. Профиль бозонного поля для “дибариона”.

Профиль бозонного поля, соответствующий “дибарионному” решению, показан на рис. 4. В промежуточных областях для производной φ' снова имеем условие (3.4), где λ удовлетворяет условию

$$2\lambda a = \pi s, \quad a = x_1 - x_0, \quad (4.22)$$

которое вполне аналогично соотношению (3.10) для изолированного мешка, так как параметр $2x_1$, равно как и параметр a , входящий в (4.22), в обоих случаях есть размер области фазы асимптотической свободы внутри каждого мешка. Отметим также, что в отличие от одиночных изолированных мешков, рассмотренных выше, в случае “дибариона” нулевые моды в спектре фермионов не возникают ни при каких s . Тем самым в формуле (4.22) отсутствуют какие-либо дополнительные ограничения на параметр s , кроме его целочисленности.

Естественно, что в силу $(1 + 1)$ -мерности модель (4.21) не может рассматриваться как сколько-нибудь реалистическая модель “дибариона”. Однако в силу своей простоты и одновременно нетривиальности она оказывается весьма наглядной иллюстрацией к вопросу о природе дополнительных логарифмически-расходящихся слагаемых $1/(\pi/2 + \pi n)$ в УФ-асимптотике фермионного спектра таких трехфазовых моделей мешков. Последняя снова находится из соответствующего трансцендентного уравнения для фермионных уровней, записанного в тригонометрической форме, аналогичной уравнению (4.12), а именно

$$\begin{aligned} & \sin(2\alpha\sqrt{1+x^2})(x\sqrt{1+x^2}\cos((\beta+\gamma)x+\delta)-x\cos\gamma x)+ \\ & + \cos(2\alpha\sqrt{1+x^2})(x^2\sin((\beta+\gamma)x+\delta)-\sqrt{1+x^2}\sin\gamma x+\sin\gamma x\cos(\beta x+\gamma))+ \\ & + (\sqrt{1+x^2}-\cos(\beta x+\delta))\sin\gamma x=0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\alpha = Ma$, $\beta = 2Md$, $d = x_2 - x_1$, $\gamma = 2Mx_0$, $\delta = \arctg x$. При этом параметр $d = x_2 - x_1$ есть размер внешних промежуточных областей для каждого из мешков, а $2x_0$ – размер общей внутренней промежуточной области, т.е. области взаимодействия мешков друг с другом. УФ-асимптотика ε_n в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\alpha, \beta, \gamma) = & \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{1}{\pi/2 + \pi n} \times \\ & \times \left((-1)^{n+1} \left(\sin \left[\frac{(\pi/2 + \pi n)(2\alpha + \gamma)}{\rho} \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \left[\frac{(\pi/2 + \pi n)\gamma}{\rho} \right] \right) + 1 + \frac{\beta + \gamma}{2} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

где

$$\rho = 2\alpha + \beta + \gamma = M(2a + 2d + 2x_0) = 2Mx_2 \quad (4.25)$$

– полный размер мешка в безразмерных единицах. При этом, как и в случае одного изолированного мешка, главный расходящийся член в асимптотике (4.24) соответствует энергии “моря” свободных фермионов в “объеме” ρ , а логарифмический член, пропорциональный $(\beta + \gamma)/2$, снова в точности компенсируется однопетлевым контрчленом собственной энергии. Изменение коэффициента в этом члене по сравнению с (4.20) обусловлено тем, что в рассматриваемом случае взаимодействие фермионов с бозонным полем происходит в области размером $2d + 2x_0$. Помимо этого, снова остается логарифмически-расходящийся член $1/(\pi/2 + \pi n)$, который соответствует (бесконечной) энергии взаимодействия фермионов с запирающим потенциалом (стенками мешка). При этом из

выражения (4.24) однозначно следует, что на уровне расходящихся членов эта поверхностная энергия “дибариона” в точности совпадает с соответствующей поверхностной энергией для одного изолированного мешка. Поскольку в данной конфигурации стенок ровно столько же, сколько и для одного изолированного мешка, а именно две, то это однозначно показывает, что член $1/(\pi/2 + \pi n)$ в (4.20) и (4.24) порождается эффектом записывания фермионов внутри односвязной области конфайнмента и ничем иным. Заметим также, что отсюда сразу следует, что в $(1 + 1)$ -мерном случае “дибарионная” конфигурация не может быть получена в результате гладкого процесса слияния двух изолированных мешков, поскольку пока последние находятся на достаточном удалении друг от друга, их суммарная поверхностная энергия будет (по модулю) в два раза больше, чем у “дибариона”. Иными словами, в $(1 + 1)$ -мерном случае перестройка границы при слиянии двух мешков в “дибарионную” конфигурацию или обратный процесс требуют бесконечной энергии.

Наконец, из выражения (4.24) следует, что если $\beta \rightarrow 0$, т.е. если внешние промежуточные области “дибариона” исчезают, то $(-1)^{n+1} \sin[(\pi/2 + \pi n)(2\alpha + \gamma)/\rho] \rightarrow -1$, что компенсирует член $1/(\pi/2 + \pi n)$, и бесконечная энергия связи фермионов со стенками также исчезает. Это полностью подтверждает вывод, сделанный из анализа асимптотики (4.20) для одного мешка, что бесконечная поверхностная энергия возникает только тогда, когда непосредственно перед отражением от внешних (запирающих) стенок мешка фермионы проходят через область промежуточной фазы.

В результате для трехфазового мешка с $d \neq 0$ выделение конечной части из $\mathcal{E}_\psi$ состоит фактически из двух отдельных процедур. Первая – это стандартная процедура перенормировки на пертурбативный вакуум с учетом однопетлевого контрчлена, связанного с рождением виртуальных фермионных пар [10]. Вторая – это компенсация поверхностной энергии соответствующим вычитанием. Обе процедуры не имеют однозначной прескрипции по выбору точки вычитания. В “классической” перенормировочной процедуре произвол, связанный с неопределенностью в выборе точки вычитания, ликвидируется с помощью фиксирования физических значений соответствующего числа параметров. По очевидным причинам в нашей $(1 + 1)$ -мерной модели мы этим заниматься не будем, а вместо этого рассмотрим наиболее прямой способ компенсации расходимостей в исходной сумме (4.8) с сохранением непрерывной зависимости результата вычитания от параметров. Его суть состоит в том, что мы вычитаем из $\sum_n \varepsilon_n$ другую расходящуюся сумму с тем же индексом суммирования n , общий член которой в точности совпадает с расходящейся частью асимптотики (4.20), в результате чего получается конечная величина

$$\tilde{\mathcal{E}}_\psi = - \sum_n \left[\varepsilon_n - \left(\frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{1 + \beta/2}{\pi/2 + \pi n} \right) \right]. \quad (4.26)$$

При этом никаких контрчленов добавлять не требуется, так как все расходимости уже скомпенсированы вычитаемой суммой. Физический смысл такой процедуры, естественно, до некоторой степени утрачивается. Следует, однако, отметить, что только в $(1 + 1)$ -мерном случае теория с взаимодействием $\mathcal{L}_1 = G\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi$ является (супер)перенормируемой и все контрчлены имеют ясный физический смысл. При переходе к большому числу пространственных измерений это уже не так, поэтому процедуру компенсации расходимостей в энергии, основанную на формуле (4.26), не следует рассматривать

как не имеющую никакой мотивации. Более детально проблемы выделения конечной части из расходящейся энергии Казимира для “моря Дирака” в $(3 + 1)$ -мерных ГKM рассматриваются в работах [30]–[32].

Перейдем теперь к анализу перенормированной полной энергии мешка

$$\mathcal{E}_{\text{bag}} = \tilde{\mathcal{E}}_{\psi}(\alpha, \beta) + 2\mu \frac{\pi^2}{g^2} \frac{r+1}{\mu\rho+1} \quad (4.27)$$

как функции параметров μ, ρ . Первое свойство $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ следует из анализа вклада в $\tilde{\mathcal{E}}_{\psi}$ от сходящейся суммы логарифмического порядка, возникающей из члена с синусом в асимптотическом разложении (4.20). Для этого преобразуем ее к виду

$$(\tilde{\mathcal{E}}_{\psi})_{\log}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \gg 1} (-1)^n \frac{\sin[(\pi\alpha/\rho)(n+1/2)]}{n+1/2} \quad (4.28)$$

и используем известное соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin[z(n+1/2)]}{n+1/2} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{4} \right), \quad |z| < \pi. \quad (4.29)$$

Легко видеть, что суммы (4.28) и (4.29) имеют одинаковый общий член и при $z \rightarrow \pi$ сумма (4.28) расходится как $(-\ln(\pi - z))$. Отсюда следует, что при $\pi\alpha/\rho \rightarrow \pi$, т.е. при $\beta \rightarrow 0$, сумма (4.29) также будет иметь аналогичное поведение, а именно

$$(\tilde{\mathcal{E}}_{\psi})_{\log}(\alpha, \beta) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \ln \beta, \quad \beta \rightarrow 0. \quad (4.30)$$

Таким образом, перенормированная фермионная энергия (4.26), а следовательно, и полная энергия мешка $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ обнаруживают логарифмическую особенность при $\beta \rightarrow 0$, т.е. при $\rho \rightarrow r/\mu$. Такое поведение $\tilde{\mathcal{E}}_{\psi}$ находится в полном соответствии с вышеприведенным качественным анализом свойств поляризации фермионного вакуума в трехфазовом мешке. Именно, при $\beta \rightarrow 0$ исчезают промежуточная фаза, а следовательно, и бесконечная энергия связи фермионов со стенками мешка, что в данном случае проявляется в неограниченном росте энергии фермионов, так как в результате перенормировки $\mathcal{E}_{\psi}$ с помощью вычитания (4.26) расходящаяся часть поверхностной энергии мешка включается в начало отсчета энергии.

Величина $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ будет расти также и при $\rho \rightarrow \infty$. В этой области $\alpha/\rho \rightarrow r/(r+1)$, поэтому логарифмический член (4.28) в этом случае остается конечным и основную роль начинают играть следующие члены разложения по $1/n$. Однако при $\rho \rightarrow \infty$ фермионный спектр становится квазинепрерывным, что позволяет для приближенной оценки выражения (4.26) перейти от сумм по x_n к интегралам по dx . В частности, анализируя распределение корней уравнения (4.12), нетрудно показать, что в этом пределе $\sum_n \varepsilon_n$ аппроксимируется следующим (расходящимся) интегралом:

$$\begin{aligned} \sum_n \varepsilon_n \rightarrow \frac{1}{\pi} \int dx \sqrt{1+x^2} \left[\beta + \frac{1}{1+x^2} + \alpha \frac{x^2}{x^2 + \sin^2(\alpha\sqrt{1+x^2})} - \right. \\ \left. - \frac{\sin(\alpha\sqrt{1+x^2}) \cos(\alpha\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2} (x^2 + \sin^2(\alpha\sqrt{1+x^2}))} \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Для вычитаемой суммы в (4.26) с очевидностью имеем

$$\sum_n \left(\frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{1 + \beta/2}{\pi/2 + \pi n} \right) \rightarrow \frac{\rho}{\pi} \int dx \left(x + \frac{1 + \beta/2}{\rho x} \right). \quad (4.32)$$

Легко видеть, что интегралы (4.31) и (4.32) имеют одну и ту же расходящуюся часть

$$\frac{1}{\pi} \int dx \left(\rho x + \frac{1}{x} + \frac{\beta}{2x} \right),$$

так что их разность дает сходящийся интеграл, как и должно быть согласно вычитательной процедуре. При этом в этой разности, взятой с (правильным) обратным знаком, главным членом в подынтегральном выражении будет $\beta/8\pi x^3$, а поскольку $\beta/\rho \rightarrow 1/(r+1)$ при $\rho \rightarrow \infty$, то это в конечном счете и приводит к появлению пропорционального ρ положительного вклада в $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ и, следовательно, в $\mathcal{E}_{\text{bag}}$.

Численный расчет полностью подтверждает такое качественное поведение $\mathcal{E}_\psi(\rho)$ и $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$. Такой расчет был проведен для $\mu = 0.25$, что близко к отношению $m_\pi/2M_Q$, если массу конституэнтного кварка M_Q принять равной 300 МэВ, и для $g = 1$, так как энергия бозонного солитона не оказывает существенного влияния на основные свойства $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$. Результаты расчета $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$ для $r = 1, 2, 3, 4, 5$ приведены на рис. 5, из которого следует, что с ростом r увеличиваются как фактический размер мешка, определяемый по положению минимума $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$, так и его энергия в минимуме, а кривизна $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$ уменьшается, что однозначно указывает на интерпретацию конфигураций с $r > 1$ как возбужденных состояний мешка.

5. МЕШКИ С НУЛЕВЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ

Рассмотрим случай нулевого топологического заряда, которому соответствует четная конфигурация скалярного поля $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Этот случай принципиально отличается от предыдущего тем, что при четных $\varphi(x)$ спектральная задача (2.7)–(2.10) для фермионов всегда будет иметь знаковую симметрию $\omega \leftrightarrow -\omega$, причем

$$\psi_{-\omega}(x) = \pm \gamma_5 \psi_\omega(-x). \quad (5.1)$$

В этом случае соответствующие киральные токи связаны между собой соотношением

$$j_{-\omega}^5(x) = -j_\omega^5(-x), \quad (5.2)$$

поэтому никакой автоматической компенсации между положительно- и отрицательно-частотными слагаемыми в вакуумном среднем от $J_5(x)$ уже не происходит. Можно лишь утверждать, что

$$\langle J_5(x) \rangle_{\text{sea}} = \langle J_5(-x) \rangle_{\text{sea}}, \quad (5.3)$$

что гарантирует совместность уравнения (2.4б) по четности. Прямым следствием таких свойств фермионов в этом случае является тот факт, что аналогичная (3.17) четная конфигурация скалярного поля

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2\lambda(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ -2\lambda(x + x_1), & -x_2 \leq x \leq -x_1, \end{cases} \quad (5.4)$$

Рис. 5. Зависимость энергии топологического мешка от его размера для основного и первых четырех возбужденных состояний.

уже не будет являться точным решением уравнений (2.4), так как для нее $\langle J_5(x) \rangle_{\text{sea}} \neq 0$ в области II.

Тем не менее конфигурация (5.4) имеет существенное значение в исследовании свойств нетопологического случая. Прежде всего, при малых g она оказывается весьма хорошим приближением к точному решению. Чтобы убедиться в этом, заметим, что после замены $\varphi = \tilde{\varphi}/g$ зависимость от g из уравнения (2.4а) исчезает, а в уравнение (2.4б) g будет входить только в виде общего множителя в правой части, а именно

$$\tilde{\varphi}'' = ig^2 \frac{M}{2} \langle [\bar{\psi}, \gamma_5 e^{i\gamma_5 \tilde{\varphi}} \psi]_- \rangle. \quad (5.5)$$

Далее, в области III естественно считать потенциал $V(\varphi)$ зависящим от g по закону

$$V(\varphi) = \frac{W(g\varphi)}{g^2}, \quad (5.6)$$

где $W(f)$ должен быть четным полиномом, чтобы поддерживать (анти)симметрию солитонных решений. Поэтому при малых g в задаче естественным образом возникает разложение по степеням g^2 . Для ренормализованного бозонного поля $\tilde{\varphi}(x)$ нулевым приближением в рамках этого разложения является конфигурация (5.4) в области II, при

этом в области I $\tilde{\varphi}(x) \equiv 0$, а в области III по аналогии с топологическим случаем используем асимптотику четного солитонного решения

$$\tilde{\varphi}_{\text{sol}}(x) = \pi(1 - Ae^{-m|x|}), \quad |x| > x_2. \quad (5.7)$$

Сшивку по непрерывности между (5.4) и (5.7) дает

$$2\lambda = \frac{\pi m}{md + 1}, \quad (5.8)$$

откуда для энергии бозонного поля получим

$$E_{\tilde{\varphi}} = \frac{\pi^2 m}{md + 1}. \quad (5.9)$$

Заметим, что при переходе к исходным переменным $\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi$ зависимость от g в E_{φ} восстанавливается добавлением общего множителя $1/g^2$.

Покажем теперь, что первая поправка по g^2 к энергии бозонного поля (5.9) обращается тождественно в нуль вне зависимости от конкретного вида тока в правой части уравнения (5.5), если асимптотика (5.7) для бозонного поля в области III имеет место вне рамок теории возмущений по g^2 , т.е. поправки от правой части в (5.5) влияют только на величину параметра A . Далее для упрощения выкладок будем рассматривать только положительную полуось, вклад от отрицательной полуоси полностью аналогичен.

Из (5.7) следует, что вне рамок разложения по g^2 имеет место соотношение

$$m\tilde{\varphi}(x_2) + \tilde{\varphi}'(x_2) = \pi, \quad (5.10)$$

а в области III при этом

$$\tilde{\varphi}'_{\text{III}}(x) = \tilde{\varphi}'(x_2)e^{-m(x-x_2)}. \quad (5.11)$$

Используя теорему вириала, которая также справедлива вне рамок теории возмущений, для вклада от этой области в $E_{\tilde{\varphi}}$ получаем следующее общее выражение:

$$E_{\tilde{\varphi}\text{III}} = \int_{\text{III}} dx \tilde{\varphi}'^2 = \frac{(\tilde{\varphi}'(x_2))^2}{2m}. \quad (5.12)$$

Далее, с учетом первой поправки по g^2 от ненулевого $\langle J_5(x) \rangle$ бозонное поле в области II имеет вид

$$\tilde{\varphi}(x) = 2\lambda(x - x_1) + g^2 \tilde{\varphi}_1(x), \quad (5.13)$$

при этом из условия $\tilde{\varphi}(x) \equiv 0$ в области I и граничных условий (5.10) следует

$$\tilde{\varphi}_1(x_1) = 0, \quad m\tilde{\varphi}_1(x_2) + \tilde{\varphi}'_1(x_2) = 0. \quad (5.14)$$

Тогда для энергии бозонного поля в области II с учетом первой поправки по g^2 получим

$$E_{\tilde{\varphi}\text{II}} = \frac{1}{2} \int_{\text{II}} dx \tilde{\varphi}'^2 = 2\lambda(\lambda d + g^2 \tilde{\varphi}_1(x_2)). \quad (5.15)$$

С другой стороны, из (5.12) и (5.13) в том же приближении получим

$$E_{\tilde{\varphi}\text{III}} = \frac{2\lambda}{m} (\lambda + g^2 \tilde{\varphi}'_1(x_2)). \quad (5.16)$$

Из (5.14) тогда следует, что в сумме $E_{\tilde{\varphi}\text{II}} + E_{\tilde{\varphi}\text{III}}$ вклад от $\tilde{\varphi}_1$ полностью сокращается. Иными словами, при разложении по g^2 поправки за счет ненулевого $\langle J_5(x) \rangle$ к нулевому приближению (5.9) в $E_{\tilde{\varphi}}$ будут начинаться только с членов порядка $O(g^4)$.

Осталось заметить, что разложение по g^2 для фермионов будет начинаться с членов порядка $O(g^0)$. В этом приближении спектральная задача (2.7)–(2.10) приводит к следующему уравнению на фермионный спектр:

$$e^{4i\omega x_1} = \frac{\nu_- + k_-}{\nu_+ + k_+} \frac{1 - e^{-2ik_+d} \frac{M-i(\nu_++k_+)}{M-i(\nu_+-k_+)}}{1 - e^{-2ik_+d} \frac{M+i(\nu_+-k_+)}{M+i(\nu_++k_+)}} \frac{1 - e^{2ik_-d} \frac{M-i(\nu_--k_-)}{M-i(\nu_-+k_-)}}{1 - e^{2ik_-d} \frac{M+i(\nu_-+k_-)}{M+i(\nu_--k_-)}}, \quad (5.17)$$

где $\nu_{\pm} = \omega \pm \lambda$, $\nu_{\pm}^2 = k_{\pm}^2 + M^2$. Полная энергия мешка по-прежнему представляется суммой (4.5), причем энергия фермионов теперь имеет вид

$$E_{\psi} = - \sum_{\omega_n < 0} \omega_n, \quad (5.18)$$

где, как и в (4.8), неравенство $\omega_n < 0$ является строгим, так как для конфигурации (5.4) уровней с $\omega_n = 0$ не существует ни при каких x_1, x_2 .

В результате, восстанавливая зависимость от g^2 в E_{φ} , получаем полную энергию мешка в виде

$$E_{\text{bag}} = \frac{\pi^2}{g^2} \frac{m}{md+1} + E_{\psi} + O(g^2), \quad (5.19)$$

причем первые два главных члена в E_{bag} – бозонный $O(1/g^2)$ и фермионный $O(g^0)$ – определяются только нулевым приближением для бозонного поля (5.4), (5.7), а поправки начинаются с членов порядка $O(g^2)$, причем одновременно и в бозонной, и в фермионной составляющих полной энергии.

Численный расчет полностью подтверждает такое поведение системы при малых g . На рис. 6 приведен типичный профиль точного решения для бозонного поля, полученного методом минимизации функционала полной энергии для значений g из интервала $0.01 \div 0.5$. Из него хорошо видно, что при таких g точное решение в промежуточной области практически неотличимо от линейной функции (5.4). Кроме того, относительная простота уравнения (5.17) позволяет провести полуаналитическое исследование фермионного спектра, что позволяет использовать конфигурацию (5.4), (5.7) как пробную при качественном изучении свойств основного состояния мешка с нулевым топологическим зарядом и при больших значениях $g \simeq 1$.

Таким образом, далее для анализа свойств нетопологического мешка мы будем использовать первые два члена в полной энергии (5.19), которые вычисляются на основе конфигурации (5.4), (5.7). Переходя к безразмерным переменным, определенным в (4.11), (4.14)–(4.16), получим

$$\mathcal{E}_{\text{bag}} = \mathcal{E}_{\psi}(\alpha, \beta) + \frac{\pi^2}{g^2} \frac{2\mu}{\mu\beta + 1}. \quad (5.20)$$

Рис. 6. Профиль точного решения для бозонного поля при $g = 0.1$, полученного методом минимизации функционала полной энергии мешка на пространственной решетке из $\simeq 10^3$ узлов. Самодействие бозонов в области III выбрано в виде $V(\varphi) = (\pi^2 - (g\varphi)^2)^2/2g^2$. Штриховая линия, практически сливающаяся со сплошной, соответствует расчету с удвоенным числом узлов решетки, что указывает на соответствие численного решения непрерывному пределу.

Отметим, что в этом выражении параметры α и β в сумме определяют размер мешка ρ , но, в отличие от предыдущего случая, в остальном являются независимыми. Поэтому исследование зависимости энергии мешка от его геометрии становится теперь качественно другой задачей на построение двумерной поверхности $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\alpha, \beta)$.

Выделение конечной части из $\mathcal{E}_\psi(\alpha, \beta)$ состоит из тех же основных этапов, что и в топологическом случае, но содержит определенную специфику, связанную с тем, что параметры α и β теперь надо рассматривать как независимые переменные. Из уравнения (5.17) после некоторых преобразований нетрудно получить УФ-асимптотику уровней в виде

$$\varepsilon_n(\alpha, \beta) = \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{(-1)^{n+1} \cos(2\lambda d) \sin[(\pi/2 + \pi n)\alpha/\rho] + 1 + \beta/2}{\pi/2 + \pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (5.21)$$

Из вида логарифмического члена в (5.21) сразу следует, что, как и в случае топологического мешка, перенормированная на асимптотику $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ и $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ будут иметь логарифмическую особенность $(-\ln \beta/\pi)$ при $\beta \rightarrow 0$. Кроме того, величины $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ и $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ будут расти

при $\beta \rightarrow \infty$ и конечном α . Так как с ростом β одновременно растет и ρ , этот эффект оказывается полностью аналогичен росту $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ и $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ при $\rho \rightarrow \infty$ в топологическом случае: в УФ-асимптотике разница между ν_+ и ν_- исчезает, и уравнение (5.17) превращается в (3.9). Тогда для анализа перенормированной $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ можно пользоваться интегральной аппроксимацией (4.31), (4.32), и при $\beta \rightarrow \infty$ главный член в подынтегральном выражении для $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ будет положителен и пропорционален β .

Отдельного рассмотрения требует поведение $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ и $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ и конечном β , так как при этом снова начинает играть роль логарифмический член с синусом в асимптотике (5.21), но, в отличие от случая $\beta \rightarrow 0$, возникает дополнительный множитель $\cos(2\lambda d)$. Поскольку $2\lambda d = \pi\mu\beta/(\mu\beta+1)$, то знак этого множителя в зависимости от значения β может быть как положительным, так и отрицательным. Однако в этом пределе начинает работать и другой эффект, а именно пропорциональный α рост числа уровней на тех ветвях фермионного спектра, для которых в (5.17) волновые числа $k_\pm$ оказываются чисто мнимыми, что соответствует областям значений энергии с $0 < \nu_\pm \leq M$. Непосредственно для уравнения (5.17) этот эффект проявляется довольно сложным образом из-за наличия отдельных ветвей для мнимых k_+ и k_- и поэтому детально может быть исследован только численно, однако его суть можно понять, если пренебречь разницей между k_+ и k_- . Тогда имеем одну ветвь с значениями в интервале $0 < \nu \leq M$, которые определяются согласно уравнению (4.13), из которого видно, что при $\alpha \rightarrow \infty$ спектр энергий на этой ветви становится квазинепрерывным с интервалом между уровнями порядка π/α , и тогда сумма $\sum_n \varepsilon_n$ по этой ветви аппроксимируется интегралом

$$\sum_{\substack{n \\ \text{вторая ветвь}}} \varepsilon_n \rightarrow -\frac{1}{\pi} \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} \times \\ \times \left[-\frac{\alpha x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x(\beta+1/(1-x^2)) - \text{sh}(\beta x + \gamma)/\sqrt{1-x^2}}{\text{ch}(\beta x + \gamma) - \sqrt{1-x^2}} \right]. \quad (5.22)$$

Поэтому при $\alpha \rightarrow \infty$ вторая ветвь дает в $\sum_n \varepsilon_n$ вклад вида $\alpha/2\pi +$ конечные члены, зависящие только от β . Для вычитаемой суммы при переходе к интегралу получаем

$$\sum_{\substack{n \\ \text{вторая ветвь}}} \left(\frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{1 + \beta/2}{\pi/2 + \pi n} \right) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\alpha dx \left(\frac{x}{\rho} + \frac{1 + \beta/2}{x} \right), \quad (5.23)$$

откуда следует, что при $\alpha \rightarrow \infty$ главные слагаемые в вычитаемой сумме суть

$$\frac{\alpha^2}{2\pi\rho} + \frac{1 + \beta/2}{\pi} \ln \alpha. \quad (5.24)$$

В результате после вычитания вклад от второй ветви в перенормированную $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ принимает вид $(1/\pi)(1 + \beta/2) \ln \alpha +$ конечные члены. При наличии различных ветвей для k_+ и k_- общий характер асимптотического поведения не меняется, и вместе с вкладом от логарифмического члена в УФ-асимптотике (5.21) главное слагаемое в $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ при $\alpha \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\beta}{2} + \cos 2\lambda d \right) \ln \alpha, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (5.25)$$

заведомо положительный для всех β . Поэтому в этом пределе энергия мешка снова растет, но теперь уже пропорционально $\ln \alpha$.

Численный расчет полностью подтверждает такое качественное поведение $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ и $\mathcal{E}_{\text{bag}}$. Расчет проводился для тех же значений $\mu = 0.25$ и $g = 1$, что и для топологических мешков, приведенных на рис. 5. Главная специфика нетопологического случая состоит в том, что в соответствии с формулой (5.9) энергия бозонного поля зависит теперь только от β , а регуляризованная энергия фермионов гладко убывает при $\alpha \rightarrow 0$. Профиль поверхности $\tilde{\mathcal{E}}_\psi(\alpha, \beta)$ приведен на рис. 7, при этом равенство $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ нулю при $\alpha = \beta = 0$ есть следствие выбранного способа вычитания на асимптотику. Расчет показывает, что нетривиального минимума в полной энергии мешка в нетопологическом случае вообще не возникает, а минимальной энергией обладает конфигурация с нулевыми размерами области фазы асимптотической свободы и конечным ненулевым β , что четко видно на рис. 8, где представлен профиль двумерной поверхности $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\alpha, \beta)$ в различных масштабах. Таким образом, для мешков с нулевым топологическим (т.е. барионным) зарядом рассматриваемая трехфазовая модель приводит к конфигурации, в которой основную роль играет промежуточная фаза составляющих кварков, что вполне согласуется с полужифеноменологическими кварковыми моделями мезонов [9], [33].

Рис. 7. Профиль поверхности $\tilde{\mathcal{E}}_\psi(\alpha, \beta)$ для нетопологического случая.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью настоящей работы было построение модели гибридного кирального мешка, содержащей наряду с фазами асимптотической свободы и адронизации также и промежуточную фазу конститuentных кварков. Наши результаты показывают, что такая

Рис. 8. Профиль двумерной поверхности $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\alpha, \beta)$ для нетопологического мешка в двух масштабах.

модель действительно может быть сформулирована, и по ряду позиций она может оказаться более эффективным способом описания низкоэнергетической физики адронов по сравнению с традиционными ГKM [1]–[8]. К числу основных преимуществ следует отнести прежде всего более корректную постановку киральных граничных условий, при которой все составляющие в лагранжиане имеют ясный физический смысл, а также наличие промежуточной фазы, описывающей квазисвободные массивные составляющие кварки, и вполне приемлемое физическое поведение полной энергии мешка как функции его размера в виде бесконечно глубокой ямы с хорошо выделенным минимумом для случая ненулевого топологического заряда и поверхности с минимумом при нулевых размерах области фазы асимптотической свободы в нетопологическом случае. Более того, наш анализ показывает, что радиальная протяженность промежуточной области d не может быть равна нулю, хотя на уровне исходного лагранжиана формальный предел $d \rightarrow 0$ существует и приводит к стандартной двухфазовой модели гибридного мешка. Это означает, что такая трехфазовая модель не имеет гладкого перехода в двухфазовую конфигурацию и именно поэтому проявляет существенно иные свойства по сравнению со стандартными моделями гибридных мешков.

Кроме того, в такой модели более четко проявляется заложенное в ней с самого начала условие конфайнмента фермионов. Это проявляется, в частности, в том, что нет необходимости добавлять член, включающий вакуумное давление B , который в стандартном подходе вводится в теорию из внемоделных соображений, так как в рассматриваемом случае поляризация “моря Дирака” уже сама по себе дает неограниченный рост энергии на больших расстояниях.

Необходимо также еще раз отметить принципиальный вопрос о выборе способа вычисления средних по “морю Дирака” для фермионных мешков. Используемый нами способ основан на дискретности энергетического спектра фермионов и позволяет с помощью достаточно очевидных рассуждений прийти к весьма простому решению самосогласованных уравнений мешка в промежуточной области. Подчеркнем, однако, что несмотря на приведенные аргументы в пользу именно такого способа вычисления средних по “морю Дирака”, у нас нет оснований полностью отвергать альтернативные варианты типа температурной регуляризации. Вопрос о том, какой именно способ является наиболее адекватным физике задачи, может быть решен только путем детального исследования реалистических моделей.

Подчеркнем, что при построении такой трехфазовой модели мы весьма существенно опирались на требование лоренц-ковариантности. Исходная формулировка модели является строго локальной полевой теорией, и несмотря на обилие классических решений, которыми приходится оперировать, нарушение ковариантности здесь является лишь спонтанным, поэтому может быть устранено по методу работ [21] с помощью ковариантных групповых переменных центра инерции локализованной квантово-полевой системы. Такая явно ковариантная формулировка гибридного мешка, однако, требует существенного изменения техники расчетов, так как инвариантная динамика полей в системе центра инерции имеет специфический конечно-разностный вид и поэтому будет рассмотрена в отдельной работе.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 00-15-96577) и Санкт-Петербургского конкурсного центра фундаментального естествознания (грант № 97-0-6.2-28).

Список литературы

- [1] *G. E. Brown, M. Rho.* Phys. Lett. B. 1979. V. 82. P. 177.
- [2] *V. Vento, M. Rho, E. M. Nyman, J. H. Jun, G. E. Brown.* Nucl. Phys. A. 1980. V. 345. P. 413.
- [3] *H. Hosaka, O. Toki.* Phys. Rep. 1996. V. 277. P. 65.
- [4] *I. Zahed, G. E. Brown.* Phys. Rep. 1986. V. 142. P. 1.
- [5] *G. Holzwarth, B. Schwesinger.* Rep. Progr. Phys. 1986. V. 49. P. 825.
- [6] *A. Chodos, C. B. Thorn.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2733; *T. Inoue, T. Maskawa.* Progr. Theor. Phys. 1975. V. 54. P. 1853.
- [7] *S. Nadkarni, H. B. Nielsen, I. Zahed.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 253. P. 308; *S. Nadkarni, H. B. Nielsen.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 263. P. 1; P. 23.
- [8] *M. Rho.* Phys. Rep. 1994. V. 240. P. 1.
- [9] *S. Gasiorowicz, J. L. Rosner.* Am. J. Phys. 1981. V. 49. P. 1954; *L. Montanet et al.* Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 1173; *B. Povh et al.* Particles and Nuclei. Berlin: Springer, 1995.
- [10] *К. А. Свешников, П. К. Сулаев.* ТМФ. 1998. Т. 117. С. 263.
- [11] *I. Cherednikov, S. Fedorov, M. Khalili, K. Sveshnikov.* Nucl. Phys. A. 2000. V. 676. P. 339.
- [12] *S. Thberge, A. W. Thomas, G. A. Miller.* Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 2838; 1981. V. 24. P. 216.
- [13] *A. W. Thomas.* Adv. Nucl. Phys. 1984. V. 13. P. 1.
- [14] *G. A. Miller.* Int. Rev. Nucl. Phys. 1984. V. 2. P. 190.
- [15] *S. Kahana, G. Ripka, V. Soni.* Nucl. Phys. A. 1984. V. 415. P. 351.
- [16] *M. K. Banerjee, W. Broniowski, T. D. Cohen.* A chiral quark soliton model. In: Chiral Solitons. Ed. K. F. Liu. Singapore: World Scientific, 1987. P. 255.
- [17] *D. I. Diakonov, V. Yu. Petrov, P. V. Povilitsa.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 306. P. 809.
- [18] *M. C. Birse.* Progr. Part. Nucl. Phys. 1991. V. 25. P. 1.
- [19] *R. Alkofer, H. Reinhardt, H. Weigel.* Phys. Rep. 1996. V. 265. P. 139.
- [20] *M. Creutz.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 1749; *M. Creutz, K. Soh.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 443.
- [21] *K. Sveshnikov.* Phys. Lett. A. 1989. V. 136. P. 1; *К. А. Свешников.* ТМФ. 1990. Т. 82. С. 55.
- [22] *R. Perry, M. Rho.* Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 1169.
- [23] *D. K. Campbell, Y.-T. Liao.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 2093.
- [24] *A. J. Niemi, G. W. Semenoff.* Phys. Rep. 1986. V. 135. P. 99.
- [25] *И. М. Малахов, К. А. Свешников.* ТМФ. 2002. Т. 132. № 3. С. 363.
- [26] *R. Daschen, B. Hasslacher, A. Neveu.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 2443.
- [27] *G. Plumien, B. Muller, W. Greiner.* Phys. Rep. 1986. V. 134. P. 87.
- [28] *P. J. Mulders.* Phys. Rev. D. 1984. V. 30. P. 1073.
- [29] *A. D. Jackson, L. Vepstas.* Phys. Rep. 1990. V. 187. P. 109.
- [30] *E. Elizalde, M. Bordag, K. Kirsten.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 895.
- [31] *H. Falomir, M. DeFrancia, E. M. Santangelo.* Phys. Lett. B. 1996. V. 371. P. 285.
- [32] *E. Elizalde, M. Bordag, K. Kirsten, S. Lesenduarde.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 1743.
- [33] *M. Lavelle, D. McMillan.* Phys. Rep. 1997. V. 279. P. 1.

Поступила в редакцию 28.II.2002 г.