Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, Я. И. Волович, О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 3, 355–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 06:06:24

© 2004 г.

В. С. Владимиров*, Я. И. Волович†

О НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ДИНАМИКИ В ТЕОРИИ p -АДИЧЕСКОЙ СТРУНЫ

Исследуются нелинейные псевдодифференциальные уравнения с бесконечным числом производных. Это уравнения нового класса, первоначально возникшие в теории p -адической струны; их исследование представляет интерес для математической физики и ее приложений, в частности в теории струн и в космологии. В настоящей работе предпринято систематическое математическое исследование свойств этих уравнений. Доказана основная теорема единственности решения в некоторой алгебре обобщенных функций, обсуждаются краевые задачи для ограниченных решений и доказана теорема о существовании пространственно-однородных решений при нечетных p , а для четных p доказано отсутствие непрерывных неотрицательных решений, интерполирующих между двумя вакуумами, и указывается на возможность наличия разрывных решений. Также рассматривается многомерное уравнение и обсуждаются солитонные и q -бранные решения.

Ключевые слова: p -адическая струна, псевдодифференциальный оператор, нелинейные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно в p -адической теории струн и обычной теории струн стали исследоваться нелинейные уравнения с бесконечным числом производных [1]–[7] (о p -адической математической физике см. [3], [8]). Исследование этого нового класса уравнений представляет значительный интерес для математической физики, и в настоящей работе предпринято систематическое математическое изучение их свойств.

В струнной теории поля [9] задача построения динамики имеет две существенные особенности по сравнению с аналогичной задачей локальной теории поля. Прежде всего, полевая теория струн соответствует бесконечному набору локальных полей. Во-вторых, получающееся для этих полей взаимодействие нелокально в том смысле, что соответствующие уравнения движения содержат бесконечное число производных.

Интерес к задаче о построении классического решения, интерполирующего между различными вакуумами, связан с возможными применениями в космологии, а именно в

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

† Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: yaroslav@aylabs.com

работе [5] предложено отождествлять инфлатонное поле с тахионной материей в бозонной струнной теории.

В p -адической модели струны для скалярного поля тахионов возникло новое уравнение движения – нелинейное псевдодифференциальное уравнение вида (см. [1], [2], а также обзоры [3], [4] и библиографию в них)

$$p^{\square/2}\Phi = \Phi^p, \quad (1.1)$$

где

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{d-1}^2}$$

– оператор Д’Аламбера и p – простое число ($p = 2, 3, \dots$). В настоящей работе мы будем считать p любым целым числом, большим единицы. Физический интерес представляют только вещественные решения уравнения (1.1), и впредь будут рассматриваться только они. Более общие уравнения и системы получены и изучаются в работах [7], [10].

Напомним, как получается p -адическая струна [3]. Хорошо известно, что если в струнной теории рассмотреть рассеяние тахиона, то получается амплитуда Венециано [9], представляемая в виде бета-функции над полем вещественных чисел. Если эту бета-функцию заменить соответствующей p -адической бета-функцией, то получится амплитуда рассеяния тахиона в p -адической струне [1], [3]. Регуляризованные адельные формулы для амплитуд Венециано рассмотрены в [11].

Уравнение (1.1) при $p = 2$ имеет два вакуумных решения: $\Phi_0 = 0$ и $\Phi_0 = 1$. В недавней работе [6] проведено исследование существования решений (1.1), интерполирующих между этими вакуумами. Было показано, что таких монотонных решений не существует. В настоящей работе мы докажем более общую теорему, согласно которой не существует даже немонотонных решений при любом четном p . В работах [7], [10] была численно рассмотрена аналогичная задача для тахиона фермионной струны. Здесь будет доказана теорема о существовании пространственно-однородных решений уравнения (1.1), интерполирующих между вакуумами $\Phi_0 = -1$ и $\Phi_0 = 1$ при нечетных p .

Структура работы следующая. В разделе 2 описана постановка задачи, в разделе 3 доказывается основная теорема единственности в алгебре обобщенных функций $\tilde{\mathcal{S}}'_+$. В четвертом разделе обсуждаются краевые задачи для ограниченных решений уравнения (1.1) и доказывается теорема о существовании пространственно-однородных решений при нечетных p , а для четных p доказывается отсутствие непрерывных неотрицательных решений, интерполирующих между двумя вакуумами, и указывается на возможность наличия разрывных решений. В разделе 5 рассматривается многомерное уравнение и обсуждаются солитонные и q -бранные решения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Простейшее уравнение (1.1) при $d = 1$ имеет вид

$$p^{\partial_t^2/2}\Phi = \Phi^p. \quad (2.1)$$

Придадим уравнению (2.1) точный смысл. Это уравнение есть формальная запись нелинейного псевдодифференциального уравнения с символом $e^{-(\xi^2/2) \ln p}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 \ln p - it\xi\right) d\xi = \Phi^p(t), \quad (2.2)$$

где $\tilde{\Phi}(\xi)$ – преобразование Фурье (обобщенной) функции $\Phi(t)$:

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{i\xi t} dt.$$

Здесь используется теория преобразования Фурье обобщенных функций класса $\mathcal{D}'$. Их преобразования Фурье являются аналитическими функционалами из пространства Z' [12].

Если решение $\Phi(t)$ уравнения (2.2) ищется в классе обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'$, то это уравнение эквивалентно нелинейному интегральному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) H[(t - \tau)^2] d\tau = \Phi^p(t), \quad (2.3)$$

где ядро $H[(t - \tau)^2]$ равно

$$\begin{aligned} H(t^2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 \ln p - it\xi\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln p}} \exp\left(-\frac{t^2}{2 \ln p}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} H(t^2) dt = 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) эквивалентно (в терминах преобразования Фурье) уравнению в свертках

$$p^{-\xi^2/2} \tilde{\Phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} (*\tilde{\Phi})^p(\xi), \quad (2.5)$$

где свертка

$$(*\tilde{\Phi})^p(\xi) = \underbrace{(\Phi * \Phi * \dots * \Phi)}_{(p-1) \text{ раз}}(\xi).$$

Левая часть уравнения (2.3) является значением функционала $\Phi(\tau)$ на основной функции $H[(t - \tau)^2] \in S$, т.е. сверткой

$$(\Phi * H)(t) = (\Phi(\tau), H[(t - \tau)^2]).$$

Правая часть уравнения (2.3) имеет смысл, если ее рассматривать в алгебре по умножению обобщенных функций $\tilde{\mathcal{S}}'_+ \subset \mathcal{S}'$. Поэтому точный смысл уравнения (2.3) в алгебре $\tilde{\mathcal{S}}'_+$ есть

$$(\Phi(\tau), H[(t - \tau)^2]) = \Phi^p(t). \quad (2.6)$$

Напомним, что $\tilde{\mathcal{S}}'_+$ – преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста с носителем на полуоси $[0, \infty)$. Алгебра $\tilde{\mathcal{S}}'_+$ изоморфна сверточной алгебре граничных значений голоморфных функций $f(z)$ ($z = t + iy$) в верхней полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющих условию роста [13]

$$|f(t + iy)| \leq C \frac{1 + |z|^\alpha}{y^\beta}, \quad y > 0, \quad (2.7)$$

при некоторых $C > 0$, $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$.

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Используя аналитические методы, применяемые в аксиоматической квантовой теории поля, мы докажем здесь следующую теорему *единственности* решения уравнения (2.3) (точнее – уравнения (2.6)).

ТЕОРЕМА 1. Если $\Phi(t)$ – вещественное решение уравнения (2.6) из алгебры $\tilde{S}_+^t$, то

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 \text{ или } \pm 1, & p - \text{нечетное}, \\ 0 \text{ или } 1, & p - \text{четное}. \end{cases} \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi \in \tilde{S}_+^t$ есть вещественное решение уравнения (2.6). Тогда $\Phi(t)$ – граничное значение в $\mathcal{S}'$ функции $\Phi(z)$, $z = t + iy$, голоморфной в верхней полуплоскости $y > 0$ и удовлетворяющей условию роста (2.7).

С другой стороны, из уравнения (2.6) следует, что обобщенная функция $\Phi^p(t)$ допускает аналитическое продолжение

$$\Phi^p(z) = C_1(\Phi(\tau), e^{-\sigma(z-\tau)^2}), \quad C_1 = (2\pi \ln p)^{-1/2}, \quad \sigma = (2 \ln p)^{-1}, \quad (3.2)$$

на всю плоскость комплексной переменной z и удовлетворяет условию роста

$$|\Phi^p(z)| \leq C'(1 + |z|)^{2m} e^{\sigma y^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.3)$$

где m – порядок обобщенной функции Φ и $C' > 0$.

Докажем это утверждение. Тот факт, что правая часть равенства (3.2) есть целая функция, а ее граничное значение при $y \rightarrow 0$ равно правой части уравнения (2.6) и, стало быть, совпадает с функцией $\Phi^p(t)$, устанавливается стандартными методами [13].

Докажем оценку (3.3). Из равенства (3.2) выводим

$$\begin{aligned} |\Phi^p(z)| &\leq C_1 \|\Phi\|_{-m} \|e^{-\sigma(z-\tau)^2}\|_m \leq C_2 \max_{0 \leq j \leq m} \sup_{\tau} (1 + |\tau|^j) \left| \frac{d^j}{d\tau^j} e^{-\sigma(z-\tau)^2} \right| \leq \\ &\leq C_3 \sup_{\tau} (1 + |\tau|^m) (1 + |z - \tau|^m) |e^{-\sigma(z^2 - 2z\tau + \tau^2)}| \leq \\ &\leq C_3 (1 + |z|^m) e^{\sigma(y^2 - t^2)} \sup_{\tau} (1 + |\tau|^m) e^{-\sigma(\tau^2 - 2t\tau)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Докажем, что

$$\sup_{\tau} (1 + |\tau|^m) e^{-(\tau^2 - 2t\tau)} \leq C_4 (1 + |t|^m) e^{\sigma t^2}. \quad (3.5)$$

При $|t| \leq 1$ оценка (3.5) очевидна. Докажем ее для $|t| > 1$. Обозначим

$$f(\rho, |t|) = \rho^m e^{-\sigma(\rho^2 - 2\rho|t|)}, \quad \rho \geq 0.$$

Тогда

$$\sup_{\tau} |\tau|^m e^{-\sigma(\tau^2 - 2\tau|t|)} \leq \sup_{\tau} f(\tau, |t|) = f(\rho_0, |t|), \quad |t| > 1. \quad (3.6)$$

Точка максимума ρ_0 функции $f(\rho, |t|)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho^2 - |t|\rho - \frac{m}{2\sigma} = 0,$$

откуда

$$|t| \leq \rho_0 = \frac{|t|}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \frac{m}{2\sigma}} \leq |t| + \frac{m}{\sigma|t|}, \quad |t| > 1.$$

Подставляя это значение ρ_0 в оценку (3.6), получим

$$\sup_{\tau} |\tau|^m e^{-\sigma(\tau^2 - 2\tau|t|)} \leq C_5(1 + |t|^m)e^{\sigma t^2}, \quad |t| > 1. \quad (3.7)$$

Отсюда следует справедливость (3.5) при всех t . Из (3.4), (3.5) следует оценка (3.3), откуда получаем

$$|\Phi(z)| \leq C_6(1 + |z|)^{2m/p} e^{\sigma y^2/p}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.8)$$

Теперь докажем оценку

$$|\Phi(z)| \leq C_7(1 + |z|)^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.9)$$

при некоторых $C_7 > 0$ и $n \geq 0$.

Введем функцию

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \Phi(z), & y > 0, \\ \bar{\Phi}(\bar{z}), & y < 0. \end{cases}$$

Поскольку граничные значения $\Phi_1(x \pm i0) = \Phi(t)$ функции $\Phi_1(z)$ совпадают (обобщенная функция $\Phi(t)$ вещественна), то по теореме Боголюбова об “острие клина” [13] функция $\Phi_1(z)$ целая и, стало быть, $\Phi_1(z) = \Phi(z)$, $z \in \mathbb{C}$. В силу (2.7) $\Phi_1(z)$ удовлетворяет оценке

$$|\Phi_1(z)| \leq C \frac{1 + |z|^\alpha}{|y|^\beta}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.10)$$

но она же удовлетворяет и (3.8). Поэтому

$$|\Phi(z)| \leq \min \left\{ C \frac{1 + |z|^\alpha}{|y|^\beta}, C_6(1 + |z|)^{2m/p} e^{\sigma y^2/p} \right\},$$

откуда следует оценка (3.9).

По теореме Лиувилля из (3.10) следует, что целая функция $\Phi(z)$ есть полином степени не выше n :

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad (3.11)$$

и поэтому

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \sum_{k=0}^n 2\pi(-i)^k a_k \delta^{(k)}(\xi). \quad (3.12)$$

Подставляя выражение (3.12) для $\tilde{\Phi}(\xi)$ в уравнение (2.5), получим

$$p^{-\xi^2/2} \sum_{k=0}^n (-i)^k a_k \delta^{(k)}(\xi) = \left(* \sum_{k=0}^n (-i)^k a_k \delta^{(k)} \right)^p(\xi). \quad (3.13)$$

Поскольку система обобщенных функций $\{\delta^{(k)}, k = 0, 1, \dots\}$ линейно независима, то из (3.13) и того, что $pn > n$ при $n > 0$, выводим

$$(-1)^{np} a_n^p \delta^{(pn)}(\xi) = 0.$$

Поэтому $a_n = 0$, и т. д. В результате получаем, что в представлениях (3.11) и (3.12) $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Поэтому формулы (3.11) и (3.12) принимают вид $\tilde{\Phi}(\xi) = 2\pi a_0 \delta(\xi)$ и $\Phi(t) = a_0$. Из уравнения (2.5) легко видеть, что возможные значения постоянной a_0 равны 0 и 1 при четном p и 0 и ± 1 при нечетном p . Теорема 1 доказана.

4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Уравнение (2.3) имеет быстро растущее решение

$$\Phi(t) = \exp\left(\frac{\ln p}{2(p-1)} + \frac{p-1}{2p \ln p} t^2\right),$$

что проверяется непосредственно с использованием формулы

$$e^{-\alpha t^2} * e^{\beta t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha - \beta}} \exp\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} t^2\right), \quad \alpha > \beta.$$

Рассмотрим ограниченные решения $\Phi(t)$ уравнения (2.3). Возникает вопрос: какими дополнительными свойствами они будут обладать? Ведь функция $\Phi^p(t)$ есть след при $y = 0$ целой функции

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} H[(z - \tau)^2] \Phi(\tau) d\tau, \quad z = t + iy \in \mathbb{C}$$

(см. доказательство теоремы 1), т. е. $\Phi(t)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\Phi^p(t) = F(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

где $F(t)$ — ограниченная вещественно-аналитическая функция. Здесь нужно различать два случая: p — нечетное и p — четное.

При нечетном p ограниченное (вещественное) решение уравнения (4.1) единственно и равно $F^{1/p}(t)$. Оно вещественно-аналитическое там, где $F(t) \neq 0$.

При четном p не исключены решения с разрывами первого рода. Например, в точке t_0 , где $F(t_0) > 0$, решением может служить функция вида

$$\Phi(t) = \begin{cases} F^{1/p}(t), & t > t_0, \\ -F^{1/p}(t), & t < t_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Чтобы избежать экзотических решений уравнения (4.1), таких, например, как

$$\Phi(t) = \begin{cases} F^{1/p}(t), & \text{если } t - \text{иррациональное,} \\ -F^{1/p}(t), & \text{если } t - \text{рациональное,} \end{cases}$$

сузим класс рассматриваемых решений уравнения (2.3) (при четном p) до класса ограниченных кусочно-вещественно-аналитических функций. Построенные разрывные решения (4.2) уравнения (4.1) – кусочно-вещественно-аналитические.

Однако остается открытым вопрос о нахождении таких точек t_0 . Возможно, ими являются вещественные нули производной целой функции $F'(z)$, т.е. такие точки t_0 , что $F'(t_0) = 0$.

Теперь рассмотрим решения уравнения (4.1) в окрестности тех точек, где $F(t_0) = 0$. Это нуль целой функции $F(z)$, и потому найдутся целое число $n > 0$ и вещественно-аналитическая функция $F_1(t) \neq 0$ (при четном p $F_1(t) > 0$ и n – четно) такие, что в окрестности точки t_0

$$F(t) = (t - t_0)^n F_1(t).$$

Поэтому все возможные решения при четном p

$$\Phi(t) = \begin{cases} \pm(t - t_0)^{n/p} F_1^{1/p}(t), & t > t_0, \\ \pm(t_0 - t)^{n/p} F_1^{1/p}(t), & t < t_0, \end{cases}$$

и одно решение при нечетном p

$$\Phi(t) = (t - t_0)^{n/p} F_1^{1/p}(t)$$

уравнения (4.1) непрерывны в точке t_0 и являются кусочно-вещественно-аналитическими в окрестности t_0 .

Резюмируя, приходим к следующему выводу.

При нечетном p всякое ограниченное решение уравнения (2.3) является непрерывным и кусочно-вещественно-аналитическим; при четном p всякое ограниченное кусочно-непрерывное решение – кусочно-вещественно-аналитическое, при этом возможный скачок решения $\Phi(t)$ в точках разрыва t_0 равен либо $2\Phi(t_0)$, либо $-2\Phi(t_0)$.

Возникают следующие вопросы. Существуют ли вещественно-аналитические решения уравнения (2.3)? Существуют ли при четном p разрывные решения уравнения (2.3)? Ответ на второй вопрос могут дать численные методы.

ТЕОРЕМА 2. *Если решение (не обязательно вещественное) $\Phi(t)$ уравнения (2.3) ограничено, то оно удовлетворяет оценке*

$$|\Phi(t)| \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению решение $\Phi(t)$ ограничено. Поэтому существует такое число $M > 0$, что

$$\sup_t |\Phi(t)| = M. \quad (4.4)$$

Из уравнений (2.3) и (2.2) следует цепочка

$$\begin{aligned} |\Phi^p(t)| = |\Phi(t)|^p &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) H[(t-\tau)^2] d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)| H[(t-\tau)^2] d\tau \leq \\ &\leq \sup_t |\Phi(t)| \int_{-\infty}^{\infty} H[(t-\tau)^2] d\tau = M, \end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$\sup_t |\Phi(t)|^p = [\sup_t |\Phi(t)|]^p = M^p \leq M,$$

так что $M \leq 1$. Теорема 2 доказана.

Другие свойства ограниченных непрерывных решений уравнения (2.3) можно найти в работе [6]. В частности там доказано, что не существует монотонно возрастающих решений $\Phi(t)$ уравнения (2.3), удовлетворяющих граничным условиям

$$\lim \Phi(t) = \begin{cases} 0, & t \rightarrow -\infty, \\ 1, & t \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (4.5)$$

Докажем, что ограниченных решений, удовлетворяющих условиям (4.5), вообще не существует. Справедливо даже более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Не существует неотрицательных ограниченных непрерывных решений $\Phi(t)$ краевой задачи*

$$\lim \Phi(t) = 1, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (4.6)$$

для уравнения (2.3) и для некоторого t_0 такого, что $\Phi(t_0) \leq 2^{-1/(p-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 имеем $0 < \Phi(t) < 1$. Из условий (4.6) докажем, что существует $t_1 > t_0$ такое, что $\Phi(t_1) < \Phi(t_0)$. Пусть такого t_1 нет. Тогда при всех $t \geq t_0$ было бы справедливо неравенство $\Phi(t) \geq \Phi(t_0)$. Но при этом из уравнения (2.3) следовало бы

$$\Phi^p(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) H[(t_0 - \tau)^2] d\tau > \Phi(t_0) \int_{t_0}^{\infty} H[(t_0 - \tau)^2] d\tau = \frac{\Phi(t_0)}{2},$$

что противоречит неравенству (4.6).

Обозначим через M множество всех $t > t_0$ таких, что $\Phi(t) < \Phi(t_0)$. Исходя из доказанного, множество M не пусто. Обозначим $\sup_{t \in M} t = T$. Это значит, что существует возрастающая последовательность $\{t_k, k = 0, 1, \dots\}$ точек множества M такая, что $t_k \rightarrow T$. Если $T < \infty$, то вследствие непрерывности функции $\Phi(t)$ $\Phi(t_k) \rightarrow \Phi(T)$,

$k \rightarrow \infty$. Но значение $\Phi(T) \leq \Phi(t_0)$ удовлетворяет неравенству (4.6). Поэтому существует точка $T_1 > T$ такая, что $\Phi(T_1) < \Phi(T) \leq \Phi(t_0)$, а это противоречит определению точки T . Итак, $T = \infty$. Но тогда

$$\Phi(t_k) < \Phi(t_0) \leq 2^{-1/(p-1)} < 1,$$

что противоречит предельному соотношению (4.6). Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3, как следствие, выводим: *не существует неотрицательных ограниченных непрерывных решений краевой задачи (2.3), (4.5).*

ТЕОРЕМА 4. *Существует единственное неотрицательное ограниченное непрерывное решение $\Phi(t) \equiv 1$ краевой задачи*

$$\lim \Phi(t) = \begin{cases} 1, & t \rightarrow -\infty, \\ 1, & t \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.7)$$

для уравнения (2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\Phi(t) \equiv 1$ есть решение краевой задачи (2.3), (4.7). Пусть существует другое решение этой задачи $0 \leq \Phi(t) \not\equiv 1$. Из доказанного соотношения $0 < \Phi(t) < 1$ и в силу (4.7) существует t_0 такое, что

$$0 < \Phi(t_0) = \min_t \Phi(t) < 1. \quad (4.8)$$

Но тогда из уравнения (2.3)

$$\Phi^p(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} H[(t_0 - \tau)^2] \Phi(\tau) d\tau \geq \Phi(t_0),$$

откуда следует $\Phi(t_0) \geq 1$, что противоречит (4.8). Полученное противоречие доказывает теорему 4.

Вопрос о существовании и единственности других ограниченных решений уравнения (2.3), кроме указанных выше, остается открытым. Тем не менее численные вычисления показывают, что для начальной функции

$$\Phi_0(t) = \operatorname{sgn} t \quad (4.9)$$

при $p = 3$ итерации

$$\Phi_n(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n-1}(\tau) H[(t - \tau)^2] d\tau \right)^{1/p}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

быстро и равномерно сходятся [10].

Здесь мы без использования численных методов докажем, что эти итерации при *любом* нечетном p равномерно сходятся к решению краевой задачи

$$\lim \Phi(t) = \begin{cases} -1, & t \rightarrow -\infty, \\ 1, & t \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.11)$$

для уравнения (2.3).

ЛЕММА. Если $\Phi(t)$ — ограниченная функция на $\mathbb{R}$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 1, \quad (4.12)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H[(t - \tau)^2] \Phi(\tau) d\tau = 1. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.4) и (4.12) получаем равенство (4.13):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H[(t - \tau)^2] \Phi(\tau) d\tau &= \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} H[(t - \tau)^2] \Phi(\tau) d\tau + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 H[(t - \tau)^2] \Phi(\tau) d\tau = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^{\infty} H[u^2] \Phi(t + u) du + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{\infty} H[u^2] \Phi(t - u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H[u^2] \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t + u) du + O\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{\infty} H[u^2] du\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H[u^2] du = 1. \end{aligned}$$

В первом интеграле мы воспользовались теоремой Лебега, а во втором — ограниченностью функции $\Phi(t)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть p — нечетное. Тогда существует нечетное непрерывное решение краевой задачи (2.3), (4.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ограниченное решение существует, то согласно доказанному выше оно непрерывно. Поскольку нас интересуют нечетные решения, то задача (2.3), (4.11) эквивалентна следующей задаче для функции $\varphi(t) = \Phi(t\sqrt{2\ln p})$:

$$\int_0^{\infty} \mathcal{K}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi^p(t), \quad t \geq 0, \quad (4.14)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1. \quad (4.15)$$

Здесь

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [e^{-(t-\tau)^2} - e^{-(t+\tau)^2}] \quad (4.16)$$

— симметричное непрерывное положительное ядро, обращающееся в нуль при $t = 0$ или $\tau = 0$. При этом

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{2\ln p}}\right), & t \geq 0, \\ -\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{2\ln p}}\right), & t < 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Воспользуемся итерационным процессом (4.10), который в терминах соответствующих функций $\varphi_n(t)$ будет иметь вид

$$\varphi_n^p(t) = \int_0^\infty \mathcal{K}(t, \tau) \varphi_{n-1}(\tau) d\tau, \quad \varphi_0(t) = 1, \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.18)$$

Значение первой итерации $\varphi_1(t)$ задается в виде

$$\varphi_1(t) = \operatorname{erf}(t)^{1/p}, \quad (4.19)$$

где функция ошибок $\operatorname{erf}(t)$ определяется как

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-x^2) dx. \quad (4.20)$$

Из (4.19) и (4.20) следует, что

$$0 \leq \varphi_1(t) < 1 = \varphi_0(t) \quad (4.21)$$

для всех $t \geq 0$.

Докажем равномерную ограниченность и сходимост ь итерационного процесса (4.18).

Заметим, что из $\varphi_0(t) = 1$ и (4.17) согласно лемме следует, что для всех номеров итераций $n \geq 0$ выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = 1. \quad (4.22)$$

Докажем теперь, что для первой и второй итерации процесса (4.18) имеет место неравенство

$$\sigma \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \leq \varphi_1(t), \quad t \geq 0, \quad (4.23)$$

при некотором σ , причем

$$0 < \sigma < 1. \quad (4.24)$$

Докажем сначала вторую часть неравенства (4.23). Для этого заметим, что

$$\varphi_2(t)^p = \int_0^\infty \mathcal{K}(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau \leq \int_0^\infty \mathcal{K}(t, \tau) d\tau = \operatorname{erf}(t) = \varphi_1(t)^p, \quad (4.25)$$

где переход к неравенству возможен ввиду (4.21).

При $t = 0$ неравенство (4.23) обращается в равенство и таким образом выполняется. Рассмотрим теперь случай строго положительных t .

Определим функцию $f(t) = \varphi_2(t)^p / \varphi_1(t)^p$. Она непрерывна, положительна и, согласно (4.25), $f(t) \leq 1$.

Воспользовавшись правилом Лопиталья, вычислим предел в точке $t = 0$. Для этого заметим, что

$$\frac{d}{dt} \varphi_1^p(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}, \quad \left. \frac{d}{dt} \varphi_1^p(t) \right|_{t=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (4.26)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_2^p(t) &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \mathcal{K}(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty [-(t-\tau)e^{(t-\tau)^2} + (t+\tau)e^{(t+\tau)^2}] \operatorname{erf}(\tau)^{1/p} d\tau, \end{aligned} \quad (4.27)$$

откуда

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi_2^p(t) \right|_{t=0} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau \operatorname{erf}(\tau)^{1/p} d\tau. \quad (4.28)$$

Тогда из (4.26) и (4.28) следует

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 2 \int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau \operatorname{erf}(\tau)^{1/p} d\tau < 2 \int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau d\tau = 1. \quad (4.29)$$

С другой стороны, согласно (4.22)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2(t)^p}{\varphi_1(t)^p} = 1. \quad (4.30)$$

Предел (4.29) позволяет рассматривать функцию $f(t)$ как непрерывную на $[0, \infty)$, тогда в силу непрерывности с учетом (4.30) существует $\delta > 0$: $f(t) \geq \delta > 0$. Используемая в (4.23) величина σ определяется как $\sigma = \delta^{1/p}$. Таким образом, выполнение неравенства (4.23) доказано.

Воспользовавшись свойством положительности ядра $\mathcal{K}(t, \tau)$, мы можем проинтегрировать неравенство (4.23):

$$\sigma \int_0^\infty \mathcal{K}(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau \leq \int_0^\infty \mathcal{K}(t, \tau) \varphi_2(\tau) d\tau \leq \int_0^\infty \mathcal{K}(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau, \quad (4.31)$$

что приводит к

$$\sigma \varphi_2(t)^p \leq \varphi_3(t)^p \leq \varphi_2(t)^p, \quad (4.32)$$

или

$$\sigma^{1/p} \varphi_2(t) \leq \varphi_3(t) \leq \varphi_2(t),$$

и т. д. В итоге получаем

$$\sigma^{1/p^{n-1}} \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t) \leq \varphi_n(t), \quad (4.33)$$

откуда

$$0 \leq \varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t) \leq \varphi_n(t)(1 - \sigma^{1/p^{n-1}}). \quad (4.34)$$

Ввиду того, что из (4.21) и (4.33) следует $0 \leq \varphi_n(t) < 1$, имеем

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t)| < \frac{-\ln \sigma}{p^{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (4.35)$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$1 - \sigma^\alpha < -\alpha \ln \sigma, \quad (4.36)$$

которое выполняется при любом $\alpha > 0$ и $\sigma \in (0, 1)$. Для доказательства (4.36) рассмотрим функцию

$$f(\sigma) = -\alpha \ln \sigma + \sigma^\alpha - 1.$$

Мы видим, что $f(0) \rightarrow +\infty$, $f(1) = 0$ и ее производная отрицательна:

$$f'(\sigma) = -\frac{\alpha}{\sigma} + \alpha \sigma^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\sigma} (\sigma^\alpha - 1) < 0.$$

Заметим, что в силу (4.24) правая часть неравенства (4.35) всегда положительна. Из (4.35) следует равномерная сходимость последовательности $\varphi_n(t)$ при $t \leq 0$.

Докажем теперь, что функция $\varphi(t)$, определяемая как

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)], \quad (4.37)$$

удовлетворяет граничному условию (4.15).

Как доказано выше, ряд (4.37) сходится равномерно по $0 \leq t < \infty$, поэтому, используя (4.22) и переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_0(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)] = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} [1 - 1] = 1,$$

что и доказывает свойство (4.15), а с ним и исходную теорему.

Очевидно также, что отраженная функция $\Phi(-t)$ есть также решение уравнения (2.3), удовлетворяющее отраженным граничным условиям (4.11) $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \Phi(t) = \mp 1$. Вопрос о единственности такого типа решений по-прежнему остается открытым.

5. МНОГОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ p -АДИЧЕСКОЙ СТРУНЫ, $d > 1$

Повторяя рассуждения, приведенные в разделе 2, убеждаемся, что уравнение (1.1) есть d -мерное псевдодифференциальное уравнение вида

$$\frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\Phi}_x(\tau, \xi) H[(t - \tau)^2] \exp\left(\frac{1}{2} |\xi|^2 \ln p - i(x, \xi)\right) d\tau d\xi = \Phi^p(t, x), \quad (5.1)$$

где $\tilde{\Phi}_x(\tau, \xi)$ — преобразование Фурье по переменным $x = (x_1, \dots, x_{d-1})$,

$$|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_{d-1}^2, \quad (x, \xi) = x_1 \xi_1 + \dots + x_{d-1} \xi_{d-1}.$$

Соответствующее одномерное уравнение по переменной $x_j = x$ имеет вид (ср. (2.1))

$$\Psi^p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\xi) \exp\left(\frac{1}{2} \xi^2 \ln p - ix\xi\right) d\xi. \quad (5.2)$$

Оно имеет солитонное решение (ср. (4.1))

$$\Psi(x) = \exp\left(\frac{\ln p}{2(p-1)} - \frac{p-1}{2p \ln p} x^2\right) \quad (5.3)$$

и тривиальные решения, указанные в теореме 1 раздела 2.

С помощью солитонных решений (5.3) строятся q -бранные ($q = 0, 1, \dots, d-2$) солитонные решения уравнения (5.1) (см. работу [14] и библиографию в ней)

$$\Phi(x_{q+1}, \dots, x_{d-1}) = \Psi(x_{q+1})\Psi(x_{q+2}) \dots \Psi(x_{d-1}), \quad (5.4)$$

не зависящие от $t, x_1, \dots, x_q$.

Физический смысл солитонных решений (5.4) обсуждается во многих работах, в частности в [4]–[6], [10], [14].

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность И. Я. Арефьевой и И. В. Воловичу за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-1542.2003.1, а также грантов РФФИ № 02-01-01084 и МАС-03-01-06466.

Список литературы

- [1] *L. Brekke, P. G. Freund, M. Olson, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 302. P. 365.
- [2] *P. H. Frampton, Y. Okada.* Phys. Rev. D. 1988. V. 37. № 10. P. 3077.
- [3] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов.* p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [4] *L. Brekke, P. G. O. Freund.* Phys. Rep. 1993. V. 233. № 1. P. 1.
- [5] *A. Sen.* JHEP. 2002. V. 204. P. 48; hep-th/0203211.
- [6] *N. Moeller, B. Zwiebach.* JHEP. 2002. V. 210. P. 34; hep-th/0207107.
- [7] *I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, A. S. Koshelev.* JHEP. 2003. V. 309. P. 12; hep-th/0301137.
- [8] *A. Yu. Khrennikov.* p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
- [9] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990.
- [10] *Ya. Volovich.* J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 8685; math-ph/0301028.
- [11] *V. S. Vladimirov.* Lett. Math. Phys. 1993. V. 28. P. 123.
- [12] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев.* Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматлит, 1958.
- [13] *В. С. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
- [14] *D. Ghoshal, A. Sen.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 584. P. 300.

Поступила в редакцию 6.III.2003 г.,
после доработки 28.IV.2003 г.