Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мещеряков, Из истории дисперсионных соотношений в модели Чу–Лоу, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 2, 288–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:03:17

© 2002 г.

В. А. Мещеряков*

ИЗ ИСТОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ В МОДЕЛИ ЧУ–ЛОУ

Сформулирована модельная задача в дисперсионной теории сильных взаимодействий при низких энергиях. Задача основана на перекрестной симметрии и унитарности S -матрицы. Отмечается роль широкого фронта исследований дисперсионных соотношений, проводившихся в ОИЯИ в 60-е годы.

Ключевые слова: дисперсионные соотношения, S -матрица, унитарность, перекрестная симметрия.

Конец 50-х и начало 60-х годов были в Лаборатории теоретической физики (ЛТФ) ОИЯИ периодом плодотворных исследований по теории и применению дисперсионных соотношений. Фундамент этих работ был заложен Н. Н. Боголюбовым в Математическом институте им. В. А. Стеклова уже к середине 50-х годов при доказательстве дисперсионных соотношений для мезон-нуклонного рассеяния на ненулевые углы. По существу в работе [1] вводилось представление об амплитуде рассеяния нескольких процессов как о единой аналитической функции своих переменных, граничные значения которой описывают эти процессы. Доказательство дисперсионных соотношений привело к появлению нового уровня математической строгости в теории поля и основывалось на теореме об аналитическом продолжении обобщенных функций нескольких комплексных переменных – теореме Боголюбова “об острие клина”. Оно привело к появлению не только новых доказательств с использованием теории многих комплексных переменных [2], но и к эмоциональным оценкам (см. с. 603 и 148 в книгах [3]).

Интерес к дисперсионным соотношениям распространялся на весь ОИЯИ. В Лаборатории высоких энергий В. И. Векслер планировал измерение действительной части амплитуды упругого πN -рассеяния вперед для “прорыва в асимптотическую область”. В Лаборатории ядерных проблем измерялись полные сечения рассеяния. Даже простое перечисление тем некоторых работ [4] (“О роли связанных состояний в процессах фоторождения”, “Дисперсионные соотношения для реакции фоторождения π -мезонов на нуклонах”, “Дисперсионные соотношения в случаях слабого взаимодействия”, “Дисперсионные соотношения для реакций с переменным числом частиц”, “Вопросы теории дисперсионных соотношений для неупругих процессов”), выполненных в ЛТФ в это

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

время, говорит об особой атмосфере восприимчивости к новому, существовавшей в лаборатории в тот период. Этот интерес привел, в частности, к возникновению направления исследований, которое можно назвать “дисперсионной теорией сильных взаимодействий при низких энергиях” [5]. Большая заслуга в создании и поддержании творческой инициативы сотрудников принадлежала заместителю директора лаборатории А. А. Логунову, который позже перенес эту традицию в ИФВЭ (Протвино).

Одна модельная задача этого направления (обычно называемая моделью Чу–Лоу) будет рассмотрена ниже (формулировка ее как приближенной задачи теории поля дана в книгах [6], [7]). Это модель упругого рассеяния релятивистской частицы (π -мезона) на фиксированном центре (нуклоне) с квантовыми числами (спином, изоспином). В этом случае диагональная S -матрица конечного порядка N удовлетворяет следующим условиям.

Условия 1. А. $S_k(z)$ – мероморфная функция в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$, $k = 1, \dots, N$.

Б. $S_k^*(z) = S_k(z^*)$.

В. $|S_k(\omega + i0)|^2 = 1$ при $\omega \geq 1$ и $S_k(\omega + i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} S_k(\omega + i\varepsilon)$.

Г. $S_k(-z) = \sum_{j=1}^N A_{kj} S_j(z)$, $A^2 = E$, $\sum_j A_{kj} = 1$, $k = 1, \dots, N$.

Действительные значения переменной z равны полной энергии ω (в единицах энергии покоя) релятивистской частицы, рассеивающейся на фиксированном центре. Каждое из условий 1 имеет определенный физический смысл. Разрезы условия 1А соответствуют прямой и перекрестной реакциям рассеяния. Требование мероморфности функции $S_k(z)$ отражает наличие у нее полюсов за счет возможных связанных состояний системы релятивистская частица + фиксированный центр. Согласно принципу причинности [1] этим исчерпываются возможные полюсы S -матрицы. Однако в модельной задаче, определяемой условиями 1, их должно быть больше. Известно, что в теории поля для бинарных процессов применяется представление Мандельштама [8]. Из него следует, что в статическом пределе у S -матрицы должен быть разрез $(-i\infty, +i\infty)$ за счет III-процесса [9]. В модельной задаче, определяемой условиями 1, он аппроксимируется системой полюсов. Среди них могут быть полюсы, отражающие существование резонансов в III-канале [9], наличие “элементарной длины” [10], асимптотическое поведение III-процесса при больших энергиях (концепция “коротковолнового отталкивания” [11]). Условие 1Б следует из условия нечетности фазы рассеяния $\delta_j(q)$, $S_j = e^{2i\delta_j(q)}$, как функции импульса $\delta_j(q) = -\delta_j(-q)$, где $q = \sqrt{\omega^2 - 1}$. Его математическое значение заключается в том, что оно позволяет использовать принцип симметрии Римана–Шварца для аналитического продолжения функции $S_j(z)$ из верхней полуплоскости в нижнюю и наоборот. Условие упругой унитарности 1В справедливо лишь до первого неупругого порога рассеяния. В рассматриваемой модели оно считается верным всюду на верхней стороне разреза $[+1, +\infty)$. Неравенство $q \geq 0$ фиксирует так называемый “физический лист” римановой поверхности функций $S_k(z)$. Наконец, условие 1Г перекрестной симметрии определяет, в частности, вид унитарности на левом разрезе $(-\infty, -1]$. Матрица перекрестной симметрии A задается квантовыми числами релятивистской частицы и фиксированного центра, а также группой, относительно ко-

торой предполагается инвариантной S -матрица [12]. Эта же информация содержится в лагранжиане взаимодействия релятивистской теории поля.

S -матрица без взаимодействия ($S_j = 1$) тождественно удовлетворяет условиям 1 В, Г. В связи с постановкой задачи, определяемой условиями 1, нужно сделать замечание общего характера. В современной теории сильных взаимодействий (КХД) имеется ряд сложных проблем, среди которых и проблема аналитических свойств физических амплитуд. Омэ показал [13], что в калибровочных теориях можно так определить физические амплитуды, что их аналитические свойства и условия перекрестной симметрии, установленные ранее [1], сохраняются.

Условия 1 представляют систему нелинейных краевых задач. Из условия 1Г следует, что система при любой матрице A имеет тривиальное решение, у которого все функции $S_k(z)$ равны и симметричны по z . Уравнение в условии 1В в этом случае имеет решение в виде функции Бляшке переменной $\zeta = (1 + i\sqrt{z^2 - 1})/z$, а именно¹⁾

$$b(\zeta) = \zeta^\lambda \prod \frac{|\zeta_n|}{\zeta_n} \frac{\zeta_n - \zeta^*}{1 - \zeta_n^* \zeta}.$$

Риманова поверхность тривиального решения двулистка. Регулярный способ нахождения нетривиальных решений задачи, определяемой условиями 1, известен только для двухрядных матриц. Приведем в качестве примера решение для двухрядной матрицы [14]

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это решение имеет вид

$$S_1(z) = \frac{W(W-2)}{(W^2-1)D(z)}, \quad S_2(z) = W(W+1)(W^2-1)D(z), \quad (1)$$

где

$$W = w + i\sqrt{z^2 - 1}\beta(z), \quad w = \frac{1}{\pi} \arcsin z,$$

$\beta(z) = -\beta(-z)$ — нечетная мероморфная функция и $D(z) = D(-z)$, $D(z) = b(\zeta(z))$.

Риманова поверхность решения (1) бесконечнолиста за счет функции ω . Выясним на этом примере, как функции $S_k(\omega)$ продолжаются с физического листа $|w| < 1/2$ на нефизические листы $|w + n| \leq 1/2$, для чего введем столбец $S^0(z) = [S_1(z), S_2(z), \dots, S_N(z)]$. Верхний индекс ноль обозначает физический лист. Условия 1 А, Б, Г легко записываются в матричной форме и относятся к физическому листу. Условие унитарности 1Г справедливо на правом разрезе, но может быть продолжено на комплексные значения ω , и имеет покомпонентную форму $S_k^0(z)S_k^1(z) = 1$. Для того чтобы записать условия 1 в матричной форме, определим нелинейную операцию инверсии I следующим равенством: $IS(z) = [1/S_1(z), 1/S_2(z), \dots, 1/S_N(z)]$. Теперь условие унитарности 1Г определяет аналитическое продолжение столбца $S^0(z)$ с физического листа на первый нефизический лист, а вся задача, определяемая условиями 1, принимает следующий вид.

¹⁾ Модуль ее на окружности единичного радиуса равен единице.

Условия 2. А. $S^0(z)$ – столбец мероморфных функций в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$.

Б. $S^{0*}(z) = S^0(z^*)$.

В. $S^1(z) = IS^0(z)$.

Г. $S^0(-z) = AS^0(z)$.

В этих обозначениях решение (1) принимает вид

$$(IA)^n S(W + n) = S(W), \quad (AI)^n S(W) = S(W - n). \quad (2)$$

Эта система уравнений является автономной системой нелинейных разностных уравнений, которую естественно назвать динамической формой статических дисперсионных соотношений. Решение для конкретной трехрядной матрицы A рассмотрено в работе [15]. Формулам (2) можно придать смысл аналитического продолжения с физического листа на нефизические с помощью определения

$$S^p(z) = (IA)^p S^0((-1)^p z). \quad (3)$$

Используя определение (3), легко продолжить условия унитарности 1 В и перекрестной симметрии 1 Г на нефизические листы:

$$IS^p(z) = S^{1-p}(z), \quad AS^p(z) = S^{-p}(-z). \quad (4)$$

Из определения (3) также следует формула

$$(IA)^q S^p(z) = S^{p+q}((-1)^q z). \quad (5)$$

Уравнение (5) является сложной системой функционально-разностных уравнений для определения функции $S^p(z)$, где $p \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$ и $S^p(z) \in C^N$. Оно может быть положено в основу решения задачи, определяемой условиями 2, и приводит к известным решениям [14], [16]. Поэтому уравнение (5), так же как и уравнение (2), можно называть динамической формой статических дисперсионных соотношений. Из уравнений (1) видно, что решение задачи, определяемой условиями 2, задается $N + 1$ целой функцией, N из которых удовлетворяют условиям перекрестной симметрии 2 Г, а последняя является симметричной функцией z и обеспечивает выполнение условий унитарности 2 В. Условия 2 А, Б, Г однородны, что наводит на мысль о вложении задачи, определяемой условиями 2, сформулированной в аффинном пространстве $\mathcal{A}_N$, в проективные пространства P_{N-1} , P_N . Для этого необходимо определить операторы I , A в этих пространствах. Оператор I в проективных пространствах обозначим I_p и определим формулой

$$I_p S_k(z) = \prod_{j=1, j \neq k}^m S_j, \quad m = N - 1, N.$$

Матрица перекрестной симметрии в пространстве P_{N-1} определена условием 1 Г, в то время как в пространстве P_N ее порядок возрастает на единицу, т.е.

$$A_{N-1} = A, \quad A_N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A_N – блочная матрица. В результате условия 2 можно переписать следующим образом.

УСЛОВИЯ 3. А. $S^0(z)$ – столбец m мероморфных функций в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$.

Б. $S^{0*}(z) = S^0(z^*)$.

В. $S^1(z) = I_p S^0(z)$.

Г. $S^0(-z) = A_m S^0(z)$.

Условия 3 сформулированы так, что для решения задачи допустимы методы алгебраической геометрии. Примеры ее решения даны в работе [17]. Они показывают, что инвариантные многообразия динамических систем определяются однородными функциями в проективных пространствах P_{N-1} , P_N , а не в аффинном пространстве $\mathcal{A}_N$, как утверждается в работе [18]. Следовательно, общие свойства инвариантных многообразий удобнее устанавливать в проективных пространствах, а для изучения локальных свойств достаточно использования аффинных пространств.

Рассмотрим точки покоя конкретной динамической системы (5), которые определяются условиями 3:

$$(IA)S = S, \quad (6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Решение имеет вид

$$S_1 = \pm[1, 1, 1], \quad S_2 = \pm i \left[(2 \mp \sqrt{5}), -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \right].$$

Точки покоя S_1 были исследованы в работе [19]. Остановимся на точках S_2 , которые запишем в виде

$$S_{\mp}^{\pm} = \pm i[x_{\mp}^3, -x_{\pm}, x_{\pm}], \quad (8)$$

где $x_{\pm}$ – положительный и отрицательный корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, верхний индекс $S_{\mp}^{\pm}$ совпадает со знаком перед i , а нижний – со знаком первой компоненты. Рассмотрим отображение, определяющее продолжение столбца $S^0(0)$ на первый нефизический лист римановой поверхности. Оно определено формулой (5) и имеет вид

$$S^1(0) = (IA)S^0(0). \quad (9)$$

Линейная часть преобразования (9) задается уравнением

$$(S^1 - S_{\pm}^{\pm})_k = - \sum_{j=1}^3 (B_{\pm})_{kj} (S^0 - S_{\pm}^{\pm})_j, \quad (10)$$

где матрицы $B_{\pm}$ вычисляются по формуле

$$(B_{\pm})_{kj} = -(S_{\pm}^{\pm})_k^2 A_{kj}, \quad (11)$$

откуда следует, что вид матриц $B_{\pm}$ не зависит от значений верхних индексов точек покоя отображения (9). Собственные значения матриц $B_{\pm}$

$$(\lambda_{(\mp)}) = (-1, x_{\mp}^2, x_{\pm}^4). \quad (12)$$

Вычисляя собственные векторы матриц $B_{\pm}$, соответствующие собственным значениям (12), приходим к следующему представлению S^1 в окрестности точек покоя:

$$S^1 = \pm i \begin{pmatrix} x_{\mp}^3 \\ -x_{\pm} \\ x_{\pm} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} x_{\mp}^4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 8x_{\mp}^3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где c_k — малые числа, определяющие движение точки S^1 вдоль направлений, соответствующих собственным векторам $B_{\pm}$. В плоскости (c_2, c_3) она движется по гиперболической кривой так, что величина $c_2^2 c_3$ остается постоянной. По первой оси точка S^1 осциллирует с постоянной амплитудой.

При решении модельных задач, определяемых условиями 1, 2, 3, в качестве унифицирующей переменной функций $S(z)$ всегда возникает одна и та же функция

$$w = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \ln(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}).$$

Она имеет корневые особенности на упругих порогах и логарифмическую точку ветвления на бесконечности, за счет чего ее риманова поверхность бесконечнолистна. Эта ее особенность позволяет рассматривать риманову поверхность функции $\arcsin \omega$ как хорошую модель римановой поверхности амплитуды F упругого рассеяния адронов на адронах. Для пояснения этой аналогии введем переменную $\nu = (s - u)/4M\mu$, где s, u — мандельштамовские переменные, а M, μ — массы сталкивающихся адронов. Амплитуда $F(\nu)$ имеет те же разрезы, что и $S(\omega)$ в задачах, определяемых условиями 1, 2, 3, т.е. $\nu \sim \omega$. В отличие от статической задачи на разрезах $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$, амплитуда $F(\nu)$ имеет счетное множество порогов от неупругих процессов. При любом конечном $\nu \gg 1$ слева и справа от точки ν расположено счетное множество неупругих порогов. Смоделируем эту ситуацию заменой переменных

$$\nu_n = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right),$$

которая вводит точки ветвления n -го порядка в нуле и на бесконечности. Далее проведем следующую замену переменной z : $z = 1 + z_1/n$, которая сводится к переносу начала координат $(0, 0)$ в точку $(1, 0)$ и к уменьшению масштаба в n раз, так как отрезок $(0, 1)$ действительной оси плоскости z превращается в отрезок $(-n, 0)$ плоскости z_1 . Теперь совершим предельный переход

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{z_1}{n} \right)^n + \frac{1}{\left(1 + \frac{z_1}{n} \right)^n} \right] = \text{ch } z_1.$$

Наконец, после поворота на угол $-\pi/2$ и сдвига на $\pi/2$ приходим к искомому результату:

$$z_1 = i \left(\frac{\pi}{2} - \pi w \right), \quad \nu = \sin \pi w.$$

Переменная $w = (1/\pi) \arcsin \nu$ была использована при феноменологическом анализе амплитуд упругих адрон-адронных столкновений [20], что позволило установить их кварк-глюонную структуру [21]. Тем самым показано, что точные решения задачи, определяемой условиями 1, сформулированной для области низких энергий, позволяют понять некоторые важные черты адрон-адронного рассеяния при высоких энергиях.

Список литературы

- [1] *N. N. Bogolubov*. Problems of the Theory of Dispersion Relation. Preprint. Princeton, 1955; *Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов*. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
- [2] *Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 1. С. 15; *H. Bremmann, R. Oehme, J. G. Taylor*. Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 2178; *H. Lehmann*. Nuovo Cimento Suppl. 1959. V. 14. P. 153; *В. С. Владимиров, А. А. Логунов*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 5. С. 661; *В. С. Владимиров*. Тр. МИРАН. 2000. Т. 228. С. 7.
- [3] *М. Гольдбергер, К. Ватсон*. Теория столкновений. М.: Мир, 1967; *M. L. Goldberger, K. M. Watson*. Relations de dispersion et particules elementaires Ecole de Physique Theorique. Paris: Hermann, 1960.
- [4] *А. А. Логунов, Б. М. Степанов, А. Н. Тавхелидзе*. ДАН СССР. 1957. Т. 112. С. 45; *А. А. Логунов, А. Н. Тавхелидзе*. ЖЭТФ. 1957. V. 32. P. 1393; *А. А. Logunov, L. D. Soloviev, A. N. Tavkhelidze*. Phys. Lett. B. 1967. V. 24. P. 181; *Н. Н. Боголюбов, С. М. Биленький, А. А. Логунов*. ДАН СССР. 1957. Т. 115. С. 891; *А. А. Логунов*. ДАН СССР. 1958. Т. 120. С. 501; Вопросы теории дисперсионных соотношений для неупругих процессов. Дубна: ОИЯИ, 1959.
- [5] *Д. В. Ширков, В. В. Серебряков, В. А. Мещеряков*. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М.: Наука, 1967.
- [6] *Э. Хенли, В. Тирринг*. Элементарная квантовая теория поля. М.: ИЛ, 1963.
- [7] *С. Швеебер*. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: ИЛ, 1963.
- [8] *S. Mandelstam*. Phys. Rev. 1958. V. 112. P. 1344; 1959. V. 115. P. 1741; P. 1752.
- [9] *В. А. Мещеряков*. ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 175.
- [10] *D. I. Blokhintsev, G. I. Kolerov*. Nuovo Cimento. 1964. V. 34. P. 163.
- [11] *В. В. Серебряков, Д. В. Ширков*. ЭЧАЯ. 1970. Т. 1. № 1. С. 171.
- [12] *В. И. Журавлев, В. А. Мещеряков*. ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. С. 173.
- [13] *R. Oehme*. Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 1995.
- [14] *В. А. Мещеряков*. ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 648.
- [15] *K. Rerikh*. Physica D. 1992. V. 57. P. 337.
- [16] *В. А. Мещеряков*. ДАН СССР. 1967. Т. 174. С. 1054.
- [17] *A. Meshcheryakov*. Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. № 1. P. 249.
- [18] *M. Froissart, R. Omnes*. Compt. Rend. Acad. Sci. 1957. V. 245. P. 2203.
- [19] *В. П. Гердт, В. А. Мещеряков*. Сообщ. ОИЯИ. 1974. P2-7976.
- [20] *V. P. Gerdt, V. I. Inozemtsev, V. A. Meshcheryakov*. Lett. Nuovo Cimento. 1976. V. 15. P. 321.
- [21] *M. Majewski, A. Meshcheryakov*. Analyticity and quark-gluon structure of hadrons total cross-sections. Preprint № E2-2001-183. Dubna: JINR, 2001.

Поступила в редакцию 1.III.2002 г.