Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Бойкова, Н. Е. Нюнько, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, Трехмерный релятивистский подход к описанию эффектов отдачи в водородоподобных системах частиц с разными массами, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 3, 339–348

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 07:26:08

© 2002 г.

Н. А. Бойкова*, Н. Е. Ньюнко*,
Ю. Н. Тюхтяев*, Р. Н. Фаустов†

ТРЕХМЕРНЫЙ РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ЭФФЕКТОВ ОТДАЧИ В ВОДОРОДОПОДОБНЫХ СИСТЕМАХ ЧАСТИЦ С РАЗНЫМИ МАССАМИ

Описан метод получения логарифмических по отношению масс поправок к S -уровням энергии водородоподобного атома. С его помощью впервые аналитически рассчитан ряд новых поправок подобного типа.

Ключевые слова: водородоподобные атомы, мюоний, энергетическая структура, сдвиги уровней, квазипотенциал, функция Грина, амплитуда рассеяния, инфракрасные особенности, эффекты отдачи.

Легкие водородоподобные (ВП) атомы – классический объект для исследований, позволяющий подвергать результаты квантовой теории очень точной экспериментальной проверке. Важнейшую роль в развитии релятивистской теории связанных состояний играет уравнение Дирака. Из этого уравнения следует наличие спина и спинового момента у электрона и позитрона и непосредственно вытекают задачи о тонкой и сверхтонкой структуре энергий ВП-атомов. Точное решение уравнения Дирака с кулоновским потенциалом является отправной точкой для определения поправок к сдвигам уровней энергии и к величинам их сверхтонкого расщепления. Уравнение Дирака с радиационными поправками [1], предложенное Швингером, позволяет учитывать многократное взаимодействие частицы с собственным и внешним полями.

Важное место в современном развитии теории связанных состояний занимает метод эффективного уравнения Дирака. В этом методе возможен последовательный переход от двухчастичной теории к приближению внешнего поля [2], [3], однако ввиду отсутствия симметрии между частицами в ВП-атоме возникают сложности при рассмотрении систем, подобных позитронию. Универсальным и симметричным в описании обеих частиц является квазипотенциальный подход [4]. Подробное изложение современного состояния теории связанных двухчастичных систем дается в обзорах [5], [6]. Аналитические выражения для поправок к уровням энергии ВП-атомов являются функциями

* Саратовский государственный университет, Саратов, Россия

† Научный совет по комплексной проблеме “Кибернетика” РАН, Москва, Россия

малых параметров $-\alpha$ (константы тонкой структуры) и отношения масс $\beta = m_1/m_2$ частиц, образующих атом. Наиболее значительными по величине оказываются поправки, содержащие логарифмы констант α^{-1} и β^{-1} .

В настоящее время факт отсутствия вклада $(m_1^2 \alpha^6 / m_2 n^3) \ln \alpha^{-1}$ в тонкий сдвиг S -уровней энергии ВП-атома можно считать надежно установленным (здесь и далее m_1 и m_2 – массы легкой и тяжелой частиц ВП-атома, соответственно, n – главное квантовое число). Решающий шаг в этом направлении был сделан в работах Фелла, в частности в работе [7], где метод и техника вычислений изложены наиболее детально. Сравнение формул (2)–(4) работы [7] с выражениями для расчета поправок к уровням энергии мюония от процессов обмена одним поперечным фотоном, записанными на основе квазипотенциального метода [8], [9], обнаруживает значительную аналогию подходов. Более того, в работе [10] было показано, что единственным интегралом, приводящим к логарифмическим вкладам в сверхтонкое расщепление основного уровня энергии ВП-атома, является стандартный интеграл, названный так потому, что техника вычисления других логарифмических по α поправок сводится к сравнению соответствующих аналитических выражений с этим интегралом,

$$I_{\text{ст}}^{1S} = \frac{1}{8\pi^2} \iint \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p}} \varphi_p^2(\omega) \varphi_q^2(\omega) \frac{p^2 q^2}{\vec{p}_q^2} = \frac{\pi^2}{2m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}, \quad (1)$$

$$I_{\text{ст}}^{2S} = \frac{1}{8\pi^2} \iint \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p}} \varphi_p^3(\gamma) \varphi_q^3(\gamma) \frac{p^2 q^2}{\vec{p}_q^2} (p^2 - \gamma^2)(q^2 - \gamma^2) = \frac{\pi^2}{2m_1 m_2} \ln \alpha^{-1}, \quad (2)$$

где

$$\omega = \alpha\mu, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{p}_q = \vec{p} - \vec{q},$$

$$\varphi_p(A) = (p^2 + A^2)^{-1}, \quad \varepsilon_{ip} = \sqrt{p^2 + m_i^2}, \quad \gamma = \frac{\omega}{2}.$$

Конечный интеграл (24) работы [7], вычисленный Феллом при определении пропорциональной $\ln \alpha^{-1}$ поправки, имеет вид

$$I = \iint \frac{dp dq}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p}} \varphi_p^3(\gamma) \varphi_q^3(\gamma) (p^2 - \gamma^2)(q^2 - \gamma^2)(p^2 - q^2)^2 \frac{p^2 q^2 - (\vec{p}\vec{q})^2}{|\vec{p} - \vec{q}|^6}. \quad (3)$$

В таблице С.3 приложения D работы [7] он выписан под номером 6. Опуская в подынтегральном выражении (3) величины, не содержащие $\ln \alpha^{-1}$, можно произвести замену

$$(p^2 - q^2)^2 [p^2 q^2 - (\vec{p}\vec{q})^2] |\vec{p}_q|^{-6} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{p^2 q^2}{\vec{p}_q^2},$$

в результате чего интеграл I сводится к интегралу $I_{\text{ст}}^{2S}$ (2),

$$m_1 m_2 I = \frac{1}{2} \iint \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{\vec{p}_q^2} \varphi_p^3(\gamma) \varphi_q^3(\gamma) p^2 q^2 (p^2 - \gamma^2)(q^2 - \gamma^2) =$$

$$= 4\pi^2 I_{\text{ст}}^{2S}(\varepsilon_{ip} \rightarrow m_i) = 2\pi^4 \ln \alpha^{-1}. \quad (4)$$

При $\varepsilon_{ip} \rightarrow m_i$ интеграл Фелла (2) расходится в области больших импульсов. Однако именно в таком виде он приведен под номером 3 в таблице С.3 приложения D в работе [7]. Обсуждая в качестве простого примера интеграл

$$\int_0^\infty p dp \varphi_p(\gamma) \varphi_p(m) = \frac{1}{m^2 - \gamma^2} \ln \frac{m}{\gamma} = \frac{1}{m^2} \ln \frac{m}{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma^2}{m^2} + \dots \right], \quad (5)$$

Фелл пришел к выводу, что можно отыскать вклад от этого интеграла, пропорциональный $\ln \alpha$, рассмотрев промежуток интегрирования $\gamma < p < m$, который он назвал логарифмическим. В самом деле,

$$\int_\gamma^m \frac{dp}{p} = \ln \frac{m}{\gamma}. \quad (6)$$

Таким образом, поведение подынтегрального выражения при больших импульсах в случае вычисления вкладов, пропорциональных $\ln \alpha$, оказывается несущественным. Однако корректное определение стандартного интеграла представляет несомненный интерес.

Рассмотрим незначительную трансформацию стандартного интеграла (1),

$$i_{\text{ст}} = \frac{1}{8\pi^2} \iint \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p}} \varphi_p^2(\omega) \varphi_q^2(\omega) \frac{p^4}{\vec{p}_q^2}. \quad (7)$$

Выделим главный по α вклад

$$i_{\text{ст}} = \frac{\pi}{2\omega} \int_0^\infty \frac{dp}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p}} = \frac{\pi}{2\omega m_2} \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 1} \sqrt{p^2 + \beta^2}}. \quad (8)$$

Этот интеграл – полный эллиптический интеграл первого рода и не выражается в элементарных функциях. Однако из него легко выделяется основной логарифмический по малому параметру β вклад

$$i_{\text{ст}} = \frac{\pi}{2\omega m_2} \int_0^\infty \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + 1} (p^2 + \beta^2)} \cong \frac{\pi}{2\alpha m_1 m_2} \ln \beta^{-1}. \quad (9)$$

Таким образом, при вычислении вкладов, пропорциональных $\ln \beta^{-1}$, важно сохранять радикалы ε_{ip} , обеспечивающие сходимость интегралов.

В работах [11], [12], положивших начало современному этапу исследования проблемы тонкого сдвига уровней энергий ВП-атомов, был получен результат

$$\begin{aligned} \Delta E_T = \frac{z^5 \alpha^5 \mu^3}{\pi n^3 m_1 m_2} \left\{ \frac{2}{3} \delta_{l_0} \ln \alpha^{-1} - \frac{8}{3} \ln [K_0(n)] - \right. \\ \left. - \frac{2}{m_2^2 - m_1^2} \left[m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} - m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} \right] + C \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\ln [K_0(n)]$ – логарифм Бете, а C – константа, определяющая величину вклада порядка α^5 . В целом выражение (10) имеет порядок α^5 , однако наряду с малой константой α в него входит другая малая величина β . Это обуславливает поправку чрезвычайно высокого порядка

$$\frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}.$$

Трехмерный релятивистский подход к описанию связанных состояний двух частиц [8]–[10], [13] позволяет обнаружить новые разнообразные логарифмические по параметру β поправки к величине тонкого сдвига S -уровней энергии ВП-атомов в пятом и шестом порядках по константе тонкой структуры и выяснить условия, при которых вклад, найденный в работах [11], [12], оказывается единственным. Для исследования взаимодействий в ВП-атоме введем квазипотенциал $\tilde{V}$ с помощью амплитуды $\tilde{\tau}_c$,

$$\tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}; E) = \tilde{\tau}_c - \tilde{\tau}_c \hat{G}_c^+ \tilde{\tau}_c + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_c &= [\hat{G}_c^+]^{-1} \widehat{G_c \tilde{T} G_c^+} [\hat{G}_c^+]^{-1}, \\ \hat{G}(\vec{p}, \vec{q}; E) &= \int \frac{dp_0 dq_0}{(2\pi)^2} G(p_0, \vec{p}, q_0, \vec{q}; E), \\ \hat{G}^+(\vec{p}, \vec{q}; E) &= u_1^*(\vec{p}) u_2^*(-\vec{p}) \hat{G}(\vec{p}, \vec{q}; E) \Gamma_0 u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}), \\ G_c &= G_0(1 + T_c G_0), \quad \Gamma_0 = \gamma_{10} \gamma_{20}, \quad T_c = K_c(1 + G_c K_c). \end{aligned} \quad (11)$$

Волновая функция двухфермионной системы с полной энергией E удовлетворяет квазипотенциальному уравнению

$$\{[\hat{G}_c^+(\vec{p}, \vec{q}; E)]^{-1} - \tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}; E)\} \psi_E(\vec{q}) = 0. \quad (12)$$

Решая это уравнение по теории возмущений, в низшем порядке находим

$$\varphi'_c(\vec{p}) = \Omega_p \varphi_c(\vec{p}), \quad \Omega_p = \frac{M_{p1} M_{p2}}{2\mu} E_p^+, \quad (13)$$

где $E_p^+ = (E + \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2p})^{-1}$, $M_{pi} = \varepsilon_{pi} + m_i$, $\varphi_c(\vec{p})$ – решение нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом. Необходимость модификации фейнмановской диаграммной техники легко объяснима. Двухвременная кулоновская функция Грина представляется в виде

$$\hat{G}_c = \hat{G}_0(1 + K_c \hat{G}_c) = (1 + \hat{G}_c K_c) \hat{G}_0, \quad (14)$$

где $K_c = v_c \Gamma_0$, v_c – кулоновский потенциал,

$$\begin{aligned} \hat{G}_0(\vec{p}, \vec{q}; E) &= (\Lambda^{++} F - \Lambda^{--} F') \Gamma_0, \quad \Lambda^{\pm\pm}(\vec{p}) = \Lambda_1^{\pm}(\vec{p}) \Lambda_2^{\pm}(-\vec{p}), \\ \Lambda_i^{\pm} &= u_i^{\pm} \otimes u_i^{\pm}, \quad F = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) (E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})^{-1}, \\ F' &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) E_p^+. \end{aligned}$$

Поскольку уровни энергии ВП-атома определяются полюсами полной функции Грина как функции E , а основное взаимодействие между частицами кулоновское, то вблизи полюсов энергия связи $W_n = -\mu\alpha^2/(2n^2)$, а функция F выражается через нерелятивистскую функцию Грина свободной частицы f соотношением

$$F = (2\pi)^3 \Omega_p \delta(\vec{p} - \vec{q}) f, \quad f = -2\mu(p^2 + \gamma_n^2)^{-1}, \quad \gamma_n^2 = \frac{\mu^2 \alpha^2}{n^2}. \quad (15)$$

Таким образом, положительно-частотная часть функции $\hat{G}_0$ оказывается полюсной и обеспечивает наибольший вклад в разложение для $\hat{G}_c$. При малых импульсах $\vec{p}^2 \ll$

m_i^2 можно учитывать лишь большие компоненты спиноров. В результате функция $\widehat{G}_c^+$ может быть разложена в ряд,

$$\widehat{G}_c^+ = f(\vec{p})[\delta(\vec{p}_q) + v_c(\vec{p}_q)f(\vec{q}) + v_c(\vec{p}_k)f(\vec{k})v_c(\vec{k}_q)f(\vec{q}) + \dots]. \quad (16)$$

Члены этого ряда имеют одинаковый порядок по α , и вблизи полюсов функция $\widehat{G}_c^+$ ведет себя так же, как функция Грина уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом $g_c^{-1} = f^{-1} - v_c$. Таким образом, учет многократного обмена кулоновскими фотонами необходим только в низкочастотной (НЧ) области, где может эффективно применяться нерелятивистское приближение. Выполнить суммирование полюсных членов в выражении для квазипотенциала можно, используя формулы

$$\begin{aligned} (QG_c)^+ &= (Q\Sigma\Gamma_0)^+\widehat{G}_c^+, & \Sigma &= (I + \Lambda^{--}F'v_c)^{-1}, \\ (G_cQ)^+ &= \widehat{G}_c^+(\Sigma'\Gamma_0Q)^+, & \Sigma' &= (I + v_cF'\Lambda^{--})^{-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

где Q – произвольный набор операторов.

Рассмотрим блок квазипотенциала

$$\tilde{\tau}_c = [\widehat{G}_c^+]^{-1}\widehat{G_c\tilde{T}G_c^+}[\widehat{G}_c^+]^{-1}. \quad (18)$$

С помощью выражений (17) находим

$$[\widehat{G}_c^+]^{-1} = F^{-1} - K_c^+ - \delta K_\Sigma, \quad \delta K_\Sigma = -u_1^*u_2^*v_c\Lambda^{--}F'v_cu_1u_2, \quad K_c^+ = u_1^*u_2^*v_cu_1u_2. \quad (19)$$

В нерелятивистском случае можно учитывать лишь проекции на положительно-частотные состояния и пренебречь билинейными по импульсам членами. Поэтому

$$[\widehat{G}_c^+]^{-1} \approx g_c^{-1}, \quad g_c = f(1 + v_cg_c). \quad (20)$$

Рассмотрим далее основную часть амплитуды $\tilde{\tau}_c$,

$$G_c\tilde{T}G_c = [I + G_0T_c]G_0\tilde{T}G_0[I + T_cG_0], \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} G_0(\vec{k}, \vec{k}'; E) &= i(2\pi)^4\delta^4(\vec{k} - \vec{k}')S_1(E_1 + k_0, \vec{k})S_2(E_2 - k_0, -\vec{k}), \quad E_i = \eta_i E, \quad i = 1, 2, \\ S_i(p_0, \vec{p}) &= [\Lambda_i^+(p_0)(p_0 - \varepsilon_{ip} + i0)^{-1} + \Lambda_i^-(p_0)(p_0 + \varepsilon_{ip} - i0)^{-1}]\gamma_{i0}, \\ \eta_1 &= \frac{E^2 + m_1^2 - m_2^2}{2E^2}, \quad \eta_2 = \frac{E^2 + m_2^2 - m_1^2}{2E^2}. \end{aligned}$$

Учитывая лишь проекции на положительные частоты, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{G_0\tilde{T}G_0} &= -(2\pi)^{-4}\Lambda^{++}(\vec{k})\Gamma_0F^+(\vec{k})\tilde{T}(\vec{k}, \vec{k}'; E)F^+(\vec{k}')\Lambda^{++}(\vec{k}')\Gamma_0 = \\ &= u_1(\vec{k})u_2(-\vec{k})F^+(\vec{k})[\tilde{T}(\vec{k}, \vec{k}'; E)]_+F^+(\vec{k}')\bar{u}_1(\vec{k}')\bar{u}_2(-\vec{k}'), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} [\tilde{T}(\vec{k}, \vec{k}'; E)]_+ &= \bar{u}_1(\vec{k})\bar{u}_2(-\vec{k})\tilde{T}(\vec{k}, \vec{k}'; E)u_1(\vec{k})u_2(-\vec{k}), \\ \tilde{T}(\vec{k}, \vec{k}'; E) &= T(k_0, k'_0, \vec{k}, \vec{k}'; E)|_{k_0=k'_0=0}. \end{aligned}$$

Рис. 1

Учитывая, что $\Lambda_i^+ + \Lambda_i^- = 1$, в указанном приближении запишем для НЧ-области

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_c &\simeq g_c^{-1} u_1^*(\vec{p}) u_2^*(-\vec{p}) \left\{ [\delta(\vec{p}_k) + f(\vec{p}) \Lambda^{++}(\vec{p}) \Gamma_0 T_c] f(\vec{k}) u_1(\vec{k}) u_2(-\vec{k}) [T(\vec{k}, \vec{k}'; E)]_+ \times \right. \\ &\quad \times f(\vec{k}') \bar{u}_1(\vec{k}') \bar{u}_2(-\vec{k}') [\delta(\vec{k}_q') + T_c f(\vec{q}) \Lambda^{++}(\vec{q}) \Gamma_0] \left. \right\} \Gamma_0 u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}) g_c^{-1} = \\ &= g_c^{-1} f [1 + (T_c)_+ f] \tilde{T}_+ [1 + f (T_c)_+] f g_c^{-1} = \\ &= g_c^{-1} f (1 + v_c g_c v_c f) \tilde{T}_+ (1 + f v_c g_c v_c f) f g_c^{-1} = \tilde{T}_+. \end{aligned} \quad (23)$$

Результатом преобразования (23) является суммирование приводимых диаграмм с кулоновскими линиями в НЧ-области. Целесообразность определения квазипотенциала через $\tilde{\tau}_c$ проявляется здесь весьма наглядно.

Итак, в НЧ-области квазипотенциал [13], [14] имеет вид

$$\begin{aligned} V(\vec{p}, \vec{q}; E) &\cong [\hat{G}_c^+]^{-1} \widehat{G_c \tilde{T} G_c^+} [\hat{G}_c^+]^{-1} - [\hat{G}_c^+]^{-1} \widehat{G_c \tilde{T} G_c^+} [\hat{G}_c^+]^{-1} \widehat{G_c \tilde{T} G_c^+} [\hat{G}_c^+]^{-1} \dots = \\ &= \tilde{T}_+(\vec{p}, \vec{q}; E) - \tilde{T}_+(\vec{p}, \vec{k}; E) g_c \tilde{T}_+(\vec{k}, \vec{q}; E). \end{aligned} \quad (24)$$

В низшем приближении $\tilde{T} = K^{(1)} + K^{(2)}$, ядро $K^{(1)} = K_T$ характеризует обмен поперечным фотоном, ядро $K^{(2)}$ [14] изображено на рис. 1.

Рис. 2

В высокочастотной (ВЧ) области функция Грина G_c разлагается в ряд, и при исследовании двухфотонных обменов квазипотенциалу соответствуют диаграммы, изображенные на рис. 2. Нижняя граница ВЧ-области определяется параметром ε , который выбирается из условия $\mu\alpha^2 \ll \varepsilon \ll \mu$. Поправка к уровням энергии мюония от приводимых на рис. 2а диаграмм [15] определяется в этой области выражением

$$\Delta E_a^{\text{ВЧ}} = \langle \varphi'_c | [K_c G_0 K_T + K_T G_0 K_c]_{0F}^+ | \varphi'_c \rangle - \langle \varphi'_c | [K_T]_{0F}^+ | \varphi_c \rangle - \langle \varphi_c | [K_T]_{0F}^+ | \varphi'_c \rangle, \quad (25)$$

где φ_c и φ'_c определены равенствами (13).

В НЧ-области $0 < k < \varepsilon$ все указанные поправки сводятся к расчету однофотонного взаимодействия. Используемая в этом случае нерелятивистская теория приводит к замене радикалов ε_{ik} массами m_i и не дает возможности корректно рассчитать логарифмические по β вклады.

После интегрирования выражения (25) по нулевой компоненте виртуального импульса для вклада в сдвиг 1*S*-уровня от диаграмм двухфотонного обмена находим

$$\begin{aligned} \Delta E_a^{\text{ВЧ}} = & \frac{32\alpha^4\mu^2}{(2\pi)^5} |\varphi_c(0)|^2 \iint d\vec{p} d\vec{q} \varphi_p^2 \varphi_q^2 \Omega_p \Omega_q \int_{|\vec{k}| > \varepsilon} \frac{d\vec{k} F(k)}{\vec{k}_p^2 |\vec{k}_q|} u_1^*(\vec{p}) u_2^*(q) \times \\ & \times \left\{ \frac{2\Lambda^{++}(\vec{k}) E_k^-}{|\vec{k}_q|} + \Lambda^{--}(\vec{k}) E_k^+ [F_{kq}^1 + F_{kq}^2] - F_{kq}^1 \Lambda^{-+}(\vec{k}) \times \right. \\ & \times (\varepsilon_{1q} + \varepsilon_{2k} + |\vec{k}_q| - E)^{-1} - F_{kq}^2 \Lambda^{+-}(\vec{k}) (\varepsilon_{2q} + \varepsilon_{1k} + |\vec{k}_q| - E)^{-1} \Big\} \times \\ & \times \Gamma_0 [\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 - (\vec{k}_q \vec{\gamma}_1) (\vec{k}_q \vec{\gamma}_2) \vec{k}_q^{-2}] u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$F_{kq}^i = (\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{iq} + |\vec{k}_q|)^{-1}, \quad E_k^- = (\varepsilon_{1k} + \varepsilon_{2k} - E)^{-1}.$$

Эта величина не содержит особенностей в НЧ-области, если $\vec{p}, \vec{q} \neq 0$, а $E \neq m_1 + m_2$. Отделим в подынтегральном выражении (26) члены, приводящие к вкладам, зависящим только от константы тонкой структуры, т.е. те, которые могли быть учтены при получении традиционного результата (10) с помощью уравнения Бете–Солпитера [11], [12] или других методов, включая квазипотенциальный подход [14], [16]. В оставшемся после этого интеграле можно перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Основной интеграл, необходимый для расчета логарифмических по β поправок, принимает в результате вид

$$\Delta E_a^\beta = \frac{8\alpha^7\mu^3\beta\mu}{(2\pi)^6(1+\beta)} \int \frac{d\vec{k}}{\varepsilon_{k1}\varepsilon_{k2}} \varphi_k \frac{M_{k1}M_{k2}^2}{(M_{k1} + M_{k2})} J_{pk} J_q, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} J_{pk} &= \int \frac{d\vec{p}}{\vec{k}_p^2} N_{p12} \varphi_p^2, \quad J_q = \int d\vec{q} N_{q12} \varphi_q^2 = \frac{1}{m_2} \int_0^\infty \frac{dq q^2}{(q^2 + \gamma^2)^2} N_q(1) N_q(\beta), \\ N_q(\beta) &= \sqrt{\frac{\sqrt{q^2 + \beta^2} + \beta}{2\sqrt{q^2 + \beta^2}}}, \quad \gamma = \beta\delta, \quad \delta = \frac{\alpha}{(1 + \beta)}, \\ N_{p12} &= N_{p1} N_{p2}, \quad N_{pi} = \sqrt{\frac{M_{pi}}{2\varepsilon_{pi}}}. \end{aligned}$$

Для вычисления сдвига (27) необходимо вычислить интеграл J_{pk} . Сначала рассмотрим более простой интеграл J_q , который представим в виде

$$J_q = \frac{1}{m_2} \int_0^\infty \frac{dq q^2}{(q^2 + \gamma^2)^2} [1 - (1 - N_q(1))] N_q(\beta). \quad (28)$$

В любом случае $N_q(\beta) \leq 1$, но при $\beta = 0$ имеем $N_q(\beta) = 1/\sqrt{2}$, а при $q = 0$ будет $N_q(\beta) = 1$. В то же время основной вклад интеграла

$$\int_0^\infty \frac{dq N_q(\beta)}{(q^2 + \gamma^2)} = \frac{\pi}{2\gamma} \quad (29)$$

получается при $N_q(\beta) = 1$, а основной вклад другого интеграла

$$\int_0^\infty \frac{dq N_q(\beta)}{(q^2 + 1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (30)$$

получается при $N_q(\beta) = 1/\sqrt{2}$.

Остановимся на некоторых подробностях вычисления значения ΔE_a^β . С необходимой для дальнейших расчетов точностью получаем

$$J_q = \frac{\pi^2}{\omega} + \frac{2\pi}{\mu} [\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}] - \frac{\sqrt{2}\pi}{m_2(1 + \sqrt{2})} [\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}] - \frac{\pi\beta}{4\sqrt{2}m_2} \ln \beta^{-1}.$$

При расчетах логарифмических вкладов в сдвиг ΔE_a^β нас будут интересовать отдельные значения в J_q : $J_{1q} = \pi^2/\omega$ и $I_{1q} = -\pi\beta \ln \beta^{-1}/(4\sqrt{2}m_2)$. Подставляя J_{1q} вместо J_q в (27), находим

$$J_1 = \frac{2\alpha^6\mu^3}{(1 + \beta)(2\pi)^4} \int \frac{d\vec{k}}{\varepsilon_{k1}\varepsilon_{k2}} \varphi_k \frac{M_{k1}M_{k2}^2}{(M_{k1} + M_{k2})} J_{pk} = \frac{\alpha^5\mu^3}{2\pi m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1} (\beta \ln \beta^{-1} - 1). \quad (31)$$

Другой вклад в сдвиг (27), содержащий логарифмическую поправку, имеет вид

$$J_2 = -\frac{2\pi\alpha^7\mu^3\beta^2}{\sqrt{2}(2\pi)^6 m_2} \ln \beta^{-1} \int \frac{d\vec{k}}{\varepsilon_{k1}\varepsilon_{k2}} \varphi_k \frac{M_{k1}M_{k2}^2}{(M_{k1} + M_{k2})} J_{pk} = -\frac{1}{8\sqrt{2}\pi} \frac{\alpha^5\mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}. \quad (32)$$

Суммарный логарифмический вклад от диаграмм рис. 2а дается величиной

$$\Delta E_a^\beta = \frac{\alpha^5\mu^3}{2\pi m_1 m_2} \left[-\beta \ln \beta^{-1} + \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \beta^2 \ln \beta^{-1} \right]. \quad (33)$$

Отметим, что величина рассматриваемого сдвига может быть рассчитана с подобной точностью лишь при учете нормирующих множителей N_{pi} , N_{qi} .

В то же время, в отличие от диаграммы рис. 2б, аналогичный логарифмический по β вклад получается и при рассмотрении диаграмм рис. 2в. При этом в ВЧ-области 3-импульсы $\vec{p}, \vec{q} = 0$, а $E = m_1 + m_2$, и выражение для амплитуды принимает вид

$$\begin{aligned} T_{TT}^{\text{ВЧ}} &= \frac{2\alpha^2}{i\pi^2} \int_{|\vec{k}| > \varepsilon} d\vec{k} \int \frac{dk_0 k_0^2}{(k_0^2 - \vec{k}^2)^2} z_1(k_0) [z_2(-k_0) - z_2(k_0)] = \\ &= \frac{2\alpha^2}{m_1 m_2} \left[\ln \frac{2\varepsilon}{\mu} + \frac{m_1^2 \ln \frac{\mu}{m_2} - m_2^2 \ln \frac{\mu}{m_1}}{m_1^2 - m_2^2} \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где $z_i(k_0) = [(m_i + k_0)^2 - \varepsilon_{ik}^2]^{-1}$. Инфракрасная особенность устраняется в сумме вкладов от значений амплитуды T_{TT} в НЧ- и ВЧ-областях. При этом в НЧ-области используются лишь большие компоненты биспиноров и полная энергия, как и прежде, полагается равной сумме масс частиц. Отделяя не зависящую от спина часть амплитуды, находим

$$T_{TT}^{\text{НЧ}} = -\frac{\alpha^2}{2\pi m_1 m_2} \int_0^\varepsilon k^2 dk \int \frac{d\Omega_k}{\sqrt{\vec{k}_p^2} \sqrt{\vec{k}_q^2} [\sqrt{\vec{k}_p^2} + \sqrt{\vec{k}_q^2}]} \left[1 + \frac{(\vec{k}_p \vec{k}_q)^2}{\vec{k}_p^2 \vec{k}_q^2} \right]. \quad (35)$$

Этот интеграл не имеет особенностей при $k = 0$, и величина сдвига $\Delta E_c^{\text{НЧ}} = \langle nS | T_{TT}^{\text{НЧ}} | nS \rangle$ при изменении k в промежутке $0 \leq k \leq \omega/n$ имеет порядок α^5 . Если же k меняется в промежутке $\omega/n \leq k \leq \varepsilon$, можно воспользоваться δ -приближением кулоновских волновых функций,

$$|nS\rangle = \varphi_{nS}(\vec{p}) \cong (2\pi)^3 \varphi_{nS}(0) \delta(\vec{p}). \quad (36)$$

Так, при $n = 2$ получим

$$\Delta E_c^{\text{НЧ}} = -\frac{\alpha^2}{2\pi m_1 m_2} |\varphi_{2S}(0)|^2 \int_{\omega/2}^{\varepsilon} k^2 dk \int \frac{d\Omega_k}{k^3} = \frac{2\alpha^2}{m_1 m_2} |\varphi_{2S}(0)|^2 \ln \frac{\omega}{2\varepsilon}. \quad (37)$$

Поскольку согласно (34) величина сдвига $2S$ -уровня в высокочастотной области принимает вид

$$\Delta E_a^{\text{ВЧ}} = \langle nS | T_{TT}^{\text{ВЧ}} | nS \rangle = \frac{2\alpha^2}{m_1 m_2} |\varphi_{2S}(0)|^2 \left[\ln \frac{2\varepsilon}{\mu} + \frac{m_1^2 \ln \frac{\mu}{m_2} - m_2^2 \ln \frac{\mu}{m_1}}{m_1^2 - m_2^2} \right], \quad (38)$$

то инфракрасные особенности в области $0 \leq k \leq \infty$ компенсируются и вклад от диаграмм рис. 2в, содержащий $\ln \beta^{-1}$, дается выражением

$$\Delta E_c = \frac{\alpha^5 \mu^3}{4\pi m_1 m_2} \left[\beta^2 \ln \frac{1+\beta}{\beta} - \frac{1}{1-\beta^2} \ln(1+\beta) \right].$$

Отсюда получаем чисто логарифмические вклады

$$\Delta E_c^\beta = \frac{\alpha^5 \mu^3}{4\pi m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}$$

для $2S$ -уровня и

$$\Delta E_c^\beta = \frac{2\alpha^5 \mu^3}{\pi m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}$$

для $1S$ -уровня.

Итак, полученный в квазипотенциальном подходе результат вычисления логарифмического по β вклада от диаграмм обмена двумя поперечными фотонами [16] совпадает с аналогичной величиной (10). Это единственная подобная поправка, которая находится в δ -приближении волновых функций (36). Остальные поправки такого рода (например, рассчитанная нами поправка ΔE_a^β) в этом приближении обращаются в ноль и могут быть получены лишь с учетом точных выражений для кулоновских волновых функций и квазипотенциала. Эффективность подобных вычислений демонстрирует изложенный нами трехмерный релятивистский подход к анализу эффектов отдачи в ВП-атомах.

Нами обнаружены и другие поправки, содержащие величины, пропорциональные $\ln \beta^{-1}$ [17]. Совокупность этих новых вкладов в сдвиг $2S$ -уровня составляет величину порядка -1.7 Гц для водорода и -8 кГц для мюония. Определенная экспериментально величина сдвига $(1S - 2S)$ -уровней составляет в мюонии [18]

$$\delta\nu_{1S-2S}^{\text{эксп}} = 2\,455\,528\,941.0(9.8) \text{ МГц},$$

а в водороде [6]

$$\delta\nu_{1S-2S}^{\text{эксп}} = 2\,466\,061\,413\,187.34(84) \text{ кГц.}$$

Таким образом, вычисленная нами аналитически разность вкладов для $1S$ - и $2S$ -уровней не выходит за пределы ошибки эксперимента.

Более сложную картину выявляет сравнение теории и эксперимента применительно к классическому лэмбовскому сдвигу в атоме водорода. Исходя из данных обзора [6], имеем

$$\Delta E_L^{\text{теор}} = 1\,057\,833(4) \text{ кГц,} \quad (39)$$

$$\Delta E_L^{\text{эксп}} = 1\,057\,845(3) \text{ кГц.} \quad (40)$$

Расхождение теории и эксперимента для лэмбовского сдвига составляет не менее 5 кГц. Исправленное с учетом наших расчетов значение величины сдвига $2S$ -уровня энергии в атоме водорода сближает теоретический (39) и экспериментальный (40) результаты для классического лэмбовского сдвига.

Благодарности. Авторы выражают признательность С. Н. Багаеву, В. И. Саврину и О. А. Хрусталеву за внимание к работе.

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
- [2] F. Gross. Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1448.
- [3] H. Groth, D. R. Yennie. Rev. Mod. Phys. 1969. V. 41. № 2. P. 350.
- [4] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento. 1963. V. 29. P. 380.
- [5] В. В. Двоеглазов, Ю. Н. Тухтяев, Р. Н. Фаустов. ЭЧАЯ. 1994. Т. 25. С. 144.
- [6] M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Sheluto. Phys. Rept. 2001. V. 342. P. 63; hep-ph/0002158.
- [7] R. N. Fell. Single transverse photon contribution to the $2S$ energy level of positronium. Massachusetts: Brandeis University Waltham, 1992.
- [8] Ю. Н. Тухтяев. ТМФ. 1978. Т. 36. С. 264.
- [9] Н. Е. Нюнько, Ю. Н. Тухтяев, Р. Н. Фаустов. ЯФ. 1979. Т. 30. № 2. С. 457.
- [10] Н. А. Бойкова, Ю. Н. Тухтяев, Р. Н. Фаустов. Поправки к сверхтонкому расщеплению основного уровня мюония относительного порядка $m_e/m_\mu \alpha^2 \ln \alpha$. В сб.: Труды IV международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Т. 1. Ответств. за выпуск С. Н. Соколов. Ред. М. Л. Фоломешкина. Протвино, Серпухов: ИФВЭ, 1983. С. 116.
- [11] E. E. Salpeter. Phys. Rev. 1952. V. 87. № 2. P. 328.
- [12] T. Fulton, P. C. Martin. Phys. Rev. 1954. V. 95. № 3. P. 811.
- [13] Ю. Н. Тухтяев. ТМФ. 1982. Т. 53. С. 419.
- [14] R. N. Faustov. The Dyson equation for the two-particle Green function and the bound state problem. JINR preprint E2-6939. Dubna, 1973.
- [15] Ю. Н. Тухтяев, Р. Н. Фаустов. Поправки к фермиевскому расщеплению основного уровня энергии $\alpha^2 \ln \alpha$. Сообщ. ОИЯИ Р2-86-281. Дубна, 1986.
- [16] Н. Е. Нюнько, Ю. Н. Тухтяев, Р. Н. Фаустов. Структура протона и тонкое расщепление в атоме водорода. Сообщ. ОИЯИ Р2-7530. Дубна, 1973.
- [17] Н. А. Бойкова, Ю. Н. Тухтяев, Р. Н. Фаустов. ЯФ. 1998. Т. 61. С. 866.
- [18] V. Meyer, S. N. Bagaev. Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 1136.

Поступила в редакцию 2.IV.2002 г.