Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Малахов, К. А. Свешников, Эффекты поляризации вакуума в системе двух трехфазовых киральных мешков, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 3, 363–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 10:04:51

© 2002 г.

И. Ю. Малахов*, К. А. Свешников*

ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В СИСТЕМЕ ДВУХ ТРЕХФАЗОВЫХ КИРАЛЬНЫХ МЕШКОВ

Для модели трехфазовых киральных кварковых мешков в $(1 + 1)$ -мерном случае получены самосогласованные решения, описывающие систему двух взаимодействующих мешков. При этом основное внимание уделяется исследованию роли поляризации фермионного вакуума внутри мешков в динамике системы, а связывающее (интерполирующее) мешки бозонное поле учитывается только на уровне одномезонного обмена. Перенормированная полная энергия системы исследована как функция параметров, характеризующих геометрию задачи, и дополнительных характеристик мешков, возникающих в $(1 + 1)$ -мерном случае. Показано, что в системе двух трехфазовых мешков поляризация вакуума приводит к возникновению сильного нелинейного взаимодействия на малых расстояниях, причем в зависимости от характеристик мешков это может быть как отталкивание, так и притяжение.

Ключевые слова: гибридные киральные модели мешков, солитоны, эффекты поляризации моря Дирака

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наиболее перспективным подходом к описанию низкоэнергетической структуры барионов являются гибридные киральные модели (ГКМ) кварковых мешков [1]–[4]. В исходной формулировке ГКМ представляет собой мешок малого размера, внутри которого заперты безмассовые кварки и глюоны в фазе асимптотической свободы, вне реализуется бесцветная фаза нелинейно взаимодействующих мезонов типа модели Скирма [3]–[6], а граничные условия между фазами выводятся из условия “кирального конфайнмента” [7]. Однако в таких двухфазовых ГКМ нет места для массивных составляющих кварков, концепция которых весьма хорошо зарекомендовала себя в адронной спектроскопии [8]–[10]. С этой точки зрения наиболее привлекательной была бы модель мешка, в которой свободные, практически безмассовые токовые кварки переходят сначала в “одетые” в результате взаимодействия массивные конститuentные кварки, несущие те же квантовые числа цвета, флейвора и спина, и только потом возникает чисто мезонная бесцветная фаза. Первым приближением к такому варианту мешка является трехфазовая киральная модель с промежуточной фазой взаимодействия между кварками и мезонами ненулевого радиального размера [11]–[13]. Эта модель позволяет внутренне непротиворечивым образом учесть три фазы: фазу асимптотической

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: cost_a@bog.msu.su

свободы со свободными безмассовыми кварками, фазу конститuentных кварков, приобретающих эффективную массу за счет кирально-инвариантного взаимодействия с мезонами в промежуточной области конечного размера, и фазу адронизации, где кварковая компонента полностью подавлена, а нелинейная динамика мезонного поля приводит к возникновению конденсата в виде солитонного решения, которое обеспечивает топологический характер всей конфигурации и соответствующие квантовые числа.

Отметим, что прямое киральное кварк-мезонное взаимодействие рассматривается и в ряде других подходов к моделированию низкоэнергетической структуры адронов, в частности в моделях мешков с пионным облаком [14]–[16] и в различных вариантах киральных кварк-солитонных моделей [17]–[21]. Однако роль этого взаимодействия в каждом случае совершенно различна. В работах [14]–[16] такая $\pi\bar{q}q$ -связь учитывается лишь как возмущение, а в кварк-солитонных моделях, наоборот, – как основной нелинейный механизм динамического возникновения конфигурации кваркового мешка во всем пространстве. В рассматриваемом же случае реализуется промежуточный вариант, когда вклад прямого кирального кварк-мезонного взаимодействия в характеристики системы является нелинейным, но конфаинмент кварков обеспечивается дополнительным условием запираания. Такой подход позволяет реализовать заложенный в таком взаимодействии нелинейный механизм динамической генерации массы кварков в промежуточной фазе, но в отличие от кварк-солитонных моделей не имеет проблем, связанных с отсутствием полного конфаинмента.

Для такой трехфазовой модели в работах [11]–[13] для $(1+1)$ -мерного случая с учетом эффектов поляризации фермионного вакуума найдены решения, описывающие возможные конфигурации одного изолированного мешка с различными значениями топологического заряда, а также связанное состояние двух мешков – $(1+1)$ -мерный “дибарион”. В настоящей работе в $(1+1)$ -мерном случае получены самосогласованные решения, описывающие систему двух взаимодействующих мешков. При этом основное внимание уделяется исследованию роли поляризации фермионного вакуума в динамике системы, а связывающее (интерполирующее) мешки бозонное поле учитывается в приближении статического среднего поля на уровне одномезонного обмена. Перенормированная полная энергия системы исследована как функция параметров, характеризующих геометрию задачи, и дополнительных характеристик мешков, возникающих в $(1+1)$ -мерном случае. Показано, что в системе двух трехфазовых мешков поляризация вакуума приводит к возникновению сильного нелинейного взаимодействия на малых расстояниях, причем в зависимости от характеристик мешков это может быть как отталкивание, так и притяжение.

2. ЛАГРАНЖИАНЫ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Лагранжиан, описывающий систему двух взаимодействующих трехфазовых мешков, строится по тому же принципу, что и для одного изолированного мешка [11]. Разбиение пространства на отдельные мешки и их фазы осуществляется посредством системы вспомогательных полей $\theta(x)$, самодействие которых предполагается настолько большим, что в первом приближении в уравнениях движения полей θ влиянием материальных полей можно пренебречь, а потом использовать полученные решения для формирования требуемой геометрии системы [11], [22]. Существенно, что лоренц-ковариантность

будет нарушена при этом лишь спонтанно, на уровне решений уравнений движения, поэтому в дальнейшем для восстановления ковариантности можно использовать метод ковариантных групповых переменных [23].

Далее мы будем рассматривать конфигурацию из двух одинаковых трехфазовых мешков, каждый из которых имеет (условный) топологический заряд 1, в системе их центра масс. Без потери общности мешки можно считать расположенными антисимметрично относительно начала координат.

Профиль интерполирующего бозонного поля для этого случая приведен на рис. 1.

Рис. 1. Профиль интерполирующего бозонного поля для конфигурации двух одинаковых взаимодействующих трехфазовых мешков в системе центра масс.

Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{g} \right)^2 \theta_I(x) - \frac{1}{2} m_0^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{g} \right)^2 \theta_I(-x) - \\ & - \frac{M}{2} [\bar{\psi}, e^{ig\gamma_5 \varphi} \psi]_- \theta_{II} - \left(\frac{M_0}{2} [\bar{\psi}, e^{ig\gamma_5 \varphi} \psi]_- + V(\varphi) \right) \theta_{III}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\theta_I(x) = \theta(y_1 < x < y_2)$, $\theta_{II} = \theta((x_1 \leq |x| \leq y_1) \cup (y_2 \leq |x| \leq x_2))$, $\theta_{III} = \theta((|x| < x_1) \cup (|x| > x_2))$ – ступенчатые функции, выделяющие области, соответствующие различным фазам в такой системе. Для правильной геометрии задачи при этом должны выполняться неравенства $0 < x_1 \leq y_1 < y_2 \leq x_2$.

Коммутатор по фермионным полям в выражениях, задающих киральную связь между фермионами и бозонами, обеспечивает зарядовую симметрию модели. Подчеркнем, что в рассматриваемой модели отсутствует член с вакуумным давлением, так как благодаря наличию промежуточных фаз прямого кварк-мезонного взаимодействия в этой модели поляризация моря Дирака ведет себя весьма специфическим образом и уже сама по себе обеспечивает необходимое вакуумное давление для каждого из мешков, а также существенным образом влияет на их взаимодействие.

Подчеркнем, что в $(1+1)$ -мерном случае рассматриваемое взаимодействие двух разделенных мешков принципиально отличается от их связанного состояния $-(1+1)$ -мерно “дибариона”, когда мешки расположены настолько близко друг к другу, что их смежные промежуточные области $\pi\bar{q}q$ -связи перекрываются. Как показано в работе [13], в

(1 + 1)-мерном случае две эти конфигурации не имеют гладкого перехода друг в друга из-за специфического поведения (расходящейся) поверхностной энергии мешков, обусловленной взаимодействием фермионов с запирающим потенциалом, в результате чего перестройка границы при слиянии двух мешков в дибарионную конфигурацию и обратный процесс требуют бесконечной энергии.

Чтобы сформировать требуемую конфигурацию из двух мешков, полагаем далее $|M_0| \rightarrow \infty$ и $t_0 \rightarrow \infty$, что приводит к динамическому обращению в нуль фермионного поля вне мешков, т.е. в области II, и к обращению интерполирующего бозонного поля в константы $\varphi = \pm\pi/g$ в областях $y_1 < \pm x < y_2$, соответственно. Таким образом, в областях I реализуется внутренняя фаза асимптотической свободы для каждого из мешков. Значения $\pm\pi/g$ бозонного поля в этих областях обусловлены тем, что бозонное поле отдельного мешка представляет собой фазовый солитон, полная амплитуда которого должна быть кратна $2\pi/g$, так как это есть период затравочного кирального взаимодействия $\bar{\psi}e^{i\gamma_5 g \varphi}\psi$. При этом считается, что поскольку слияния мешков не происходит, то такое взаимодействие затрагивает только периферию мешков, т.е. их промежуточные области II. Поэтому значение бозонного поля во внутренних областях I должно быть таким же, как и для изолированного мешка, и не должно зависеть от расстояния между мешками.

Для упрощения выкладок положим далее $g = 1$, поскольку зависимость от него легко восстанавливается с помощью подстановки $\varphi \rightarrow \varphi/g$. Как это принято в гибридных моделях такого типа, бозонное поле рассматривается в приближении среднего поля, т.е. является c -числовым. Будем также считать, что самодействие бозонного поля $V(\varphi)$ содержит только четные степени φ . Тогда $\varphi(x)$ будет стационарным классическим полем, на фоне которого эволюционируют фермионы, и может быть как нечетной (что и реализуется в рассматриваемом случае), так и четной (в случае взаимодействия мешка с “антимешком”) функцией.

Пользуясь очевидной редукцией задачи по симметрии, далее достаточно будет рассмотреть решение уравнений движения на полуоси $x \geq 0$, где исходные уравнения системы имеют следующий вид в области I ($y_1 < x < y_2$)

$$i\hat{\partial}\psi = 0, \quad (2.2a)$$

$$\varphi = \pi, \quad (2.2b)$$

в области II ($(x_1 \leq x \leq y_1) \cup (y_2 \leq x \leq x_2)$)

$$(i\hat{\partial} - Me^{i\gamma_5\varphi})\psi = 0, \quad (2.3a)$$

$$\varphi'' = i\frac{M}{2}\langle[\bar{\psi}, \gamma_5 e^{i\gamma_5\varphi}\psi]_-\rangle \quad (2.3b)$$

и в области III ($(0 \leq x < x_1) \cup (x > x_2)$)

$$(i\hat{\partial} - M_0 e^{i\gamma_5\varphi})\psi = 0, \quad (2.4a)$$

$$-\varphi'' + V'(\varphi) = 0, \quad (2.4b)$$

при этом $\langle \cdot \rangle$ в уравнении (2.3б) означает усреднение по заданному состоянию фермионов в мешке, которое представляет из себя заполненное море Дирака плюс возможные валентные состояния с положительной энергией.

Спектральная задача для волновых функций фермионов ψ_ω с определенной энергией ω имеет вид

$$\omega\psi_\omega = -i\alpha\psi'_\omega + \beta e^{i\gamma_5\varphi}[M\theta_{II} + M_0\theta_{III}]\psi_\omega. \quad (2.5)$$

Если $|M_0| \rightarrow \infty$, то в области III $\psi \rightarrow 0$, причем таким образом, что в уравнении (2.5) член $M_0\psi_\omega$ исчезает, а на внешних границах мешка (в точках $x_{1,2}$) возникают следующие граничные условия:

$$i\gamma^1\psi_\omega(x_2) + (\text{sign } M_0(x_2))e^{i\gamma_5\varphi(x_2)}\psi_\omega(x_2) = 0, \quad (2.6a)$$

$$-i\gamma^1\psi_\omega(x_1) + (\text{sign } M_0(x_1))e^{i\gamma_5\varphi(x_1)}\psi_\omega(x_1) = 0. \quad (2.6b)$$

Дополненные условием непрерывности $\psi(x)$ на границах между областями I и II условия (2.6) обеспечивают корректную формулировку спектральной задачи для фермионов, запертых в мешке. Отметим, что граничные условия (2.6) суть не что иное, как стандартные киральные граничные условия для гибридных моделей [1]–[4]. Теперь, однако, они возникают не из локального поверхностного действия, что на самом деле не вполне корректно, а как естественное следствие бесконечной массы фермионов в области III [11], [24]. В области I уравнение (2.5) является уравнением свободных безмассовых фермионов

$$\omega\psi_I = -i\alpha\psi'_I, \quad (2.7)$$

а в области промежуточной фазы II имеем

$$\omega\psi_{II} = -i\alpha\psi'_{II} + \beta M e^{i\gamma_5\varphi}\psi_{II}. \quad (2.8)$$

На границах между областями I и II волновые функции ψ_I и ψ_{II} сшиваются по непрерывности:

$$\psi_I(y_{1,2}) = \psi_{II}(y_{1,2}), \quad (2.9)$$

а при $x = x_{1,2}$ удовлетворяют граничным условиям (2.6). При этом в уравнении (2.8) поле φ не произвольно, а самосогласованным образом определяется из уравнения (2.3б) с соответствующими граничными условиями непрерывности в точках $x_{1,2}$, $y_{1,2}$.

3. ДЕФОРМИРОВАННЫЙ МЕШОК И ЕГО ДИСКРЕТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Самосогласованное решение связанных уравнений (2.3) строится по тем же общим принципам, что и в случае одного изолированного мешка [11], [13]. Основное отличие состоит в том, что если для изолированного мешка симметрия конфигурации требует, чтобы размеры $d_1 = y_1 - x_1$ и $d_2 = y_2 - x_2$ левой и правой промежуточных фаз мешка обязательно совпадали, то в случае двух взаимодействующих мешков неизбежно возникает их деформация, в результате которой при конечном расстоянии между мешками $d_1 \neq d_2$. Тем не менее все соображения, использованные в работах [11], [13] для учета

поляризации фермионного вакуума, остаются в силе при вычислении среднего в уравнении (2.3б) и для деформированного мешка.

Опуская подробности вычислений, вполне аналогичные рассмотренным в [11], [13] для изолированного мешка с $d_1 = d_2$, приведем лишь окончательные результаты. Как и уравнения движения (2.2)–(2.9), все результаты приводятся для мешка, расположенного на положительной полуоси $x \geq 0$. В областях промежуточной фазы бозонное поле имеет вид линейной функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} \pi + 2\lambda(x - y_1), & x_1 \leq x \leq y_1, \\ \pi + 2\lambda(x - y_2), & y_2 \leq x \leq x_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

при этом λ принимает дискретные значения, удовлетворяющие условию

$$2\lambda a = \pi s, \quad (3.2)$$

где $a = y_2 - y_1$ – размер центральной области (фазы асимптотической свободы) мешка, а s – целое четное или нечетное число. Качественно поведение бозонного поля внутри мешка показано на рис. 2. Следует отметить, что в выражении (3.1) градиент $\varphi(x)$ в обеих промежуточных областях мешка принимает одно и то же значение $\varphi' = 2\lambda$, несмотря на разницу в их протяженности. В действительности можно строго показать, что совпадение градиентов $\varphi' = 2\lambda$ в промежуточных областях есть необходимое условие существования самосогласованного решения такого типа. Иными словами, в результате взаимодействия мешков возникает различие лишь в размерах промежуточных областей, но не в поведении бозонного поля. В частности, плотности энергии бозонного поля в обеих промежуточных областях будут одинаковы.

Рис. 2. Поведение бозонного поля внутри деформированного мешка.

Энергетический спектр фермионов имеет вид

$$\omega_n = \nu_n + \lambda, \quad (3.3)$$

где частоты ν_n обладают знаковой симметрией $\nu \leftrightarrow -\nu$ и находятся из решения соответствующего трансцендентного уравнения, явный вид которого, равно как и допустимые значения s в уравнении (3.2), существенным образом зависят от знаков киральных масс M, M_0 в каждой области мешка (т.е. от типа мешка).

Простейшим типом мешка является полностью симметричный мешок (далее для краткости будем называть его тип *A*), когда $M_0 \rightarrow \infty$ и $M > 0$ как слева, так и справа от центральной области мешка (см. рис. 3). При этом число s в уравнении (3.2) обязательно должно быть четным $s = 2r$, поскольку для нечетных значений $s = 2r + 1$ фермионный спектр, получаемый из решения уравнений (2.6)–(2.9) при $\varphi(x)$ из (3.1), всегда будет содержать невырожденный уровень со строго нулевой частотой $\nu_0 = 0$, тогда как для четных $s = 2r$ все $\nu_n \neq 0$. В результате при $s = 2r + 1$ возникает явление фракционизации фермионного числа [25], которое приводит к невозможности существования самосогласованного решения уравнений (2.3) вида (3.1)–(3.3) [13].

Рис. 3. Поведение киральных масс для мешка типа *A*.

Уравнение на частоты ν_n в этом случае имеет вид

$$e^{2i\nu a} = \frac{1 - e^{-2ikd_1} \frac{M-i(\nu+k)}{M-i(\nu-k)}}{1 - e^{-2ikd_1} \frac{M+i(\nu-k)}{M+i(\nu+k)}} \frac{1 - e^{2ikd_2} \frac{M-i(\nu-k)}{M-i(\nu+k)}}{1 - e^{2ikd_2} \frac{M+i(\nu+k)}{M+i(\nu-k)}}, \quad (3.4)$$

где $\nu^2 = k^2 + M^2$. Это уравнение имеет две ветви корней, первая из которых соответствует действительным k и приводится к следующему виду:

$$\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x \cos \beta x + \sin \beta x}{\cos \varepsilon x - \cos \beta x + x \sin \beta x}, \quad (3.5)$$

где неизвестной является безразмерная величина x , связанная с k соотношением $k = Mx$, так что $\nu = M\sqrt{1+x^2}$, и введены удобные для дальнейших выкладок безразмерные параметры

$$\alpha = Ma, \quad \beta = M(d_1 + d_2), \quad \varepsilon = M(d_2 - d_1). \quad (3.6)$$

Область изменения действительных корней x_n есть полуось $0 \leq x_n < \infty$, так как в силу конечности размеров мешка фермионные волновые функции суть фактически стоячие волны, вырожденные по знаку k , а соответствующие частоты ν_n меняются в пределах $M \leq \nu_n < \infty$.

Вторая ветвь соответствует чисто мнимому $k = iMx$, $\nu = M\sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, и получается из (3.5) аналитическим продолжением:

$$\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{1-x^2}) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x \operatorname{ch} \beta x + \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch} \beta x + x \operatorname{sh} \beta x - \operatorname{ch} \varepsilon x}. \quad (3.7)$$

При этом для второй ветви $0 < \nu_n \leq M$.

Рис. 4. Поведение киральных масс внутри мешка типа B .

Заметим также, что уравнения (3.5), (3.7) инвариантны относительно изменения знака ε , т.е. относительно замены $d_1 \leftrightarrow d_2$. Иными словами, фермионный спектр такого мешка не меняется при зеркальном отражении относительно центральной области. Это обстоятельство будет иметь существенное значение при исследовании свойств конфигурации двух взаимодействующих мешков этого типа.

Рис. 5. Поведение киральных масс для несимметричного типа C .

Естественным дополнением к симметричному типу мешка является антисимметричный (тип B), когда обе киральные массы M , M_0 слева (или справа) от центральной области мешка меняют знак (см. рис. 4). Обобщая на случай $d_1 \neq d_2$ рассуждения, приведенные для этого типа мешка при $d_1 = d_2$ в работе [13], нетрудно показать, что для такого мешка по-прежнему имеет место самосогласованное решение уравнений (2.3) с бозонным полем вида (3.1). Соотношения (3.2), (3.3) остаются также в силе с той только разницей, что нулевая мода в фермионном спектре возникает теперь при четных s , поэтому разрешенными для состоятельности такого решения оказываются нечетные $s = 2r + 1$. При этом спектральное уравнение на частоты ν_n не меняется и по-прежнему имеет вид (3.4). Таким образом, эти два типа мешков имеют физически совершенно равноправный статус и в совокупности исчерпывают все возможные значения s в уравнении (3.2) при одном и том же уравнении на частоты ν_n (3.4). По существу, между типа-

ми A и B имеет место своеобразная дискретная симметрия, так как такая смена знаков фермионных масс никак не сказывается на основных наблюдаемых свойствах системы — конфайнменте фермионов, свойствах промежуточной фазы, спектре частот ν_n , а лишь определяет четность или нечетность разрешенных значений s в уравнении (3.2).

Далее простым перебором возможных комбинаций знаков киральных масс M , M_0 нетрудно показать, что помимо симметричного и антисимметричного типов существуют еще два других типа — C и D , также дополнительные друг к другу. Эти типы мешков уже не имеют симметрии относительно центральной области мешка и получаются из типов A и B изменением знака M_0 на левой (или правой) границе мешка. В частности, изменяя знак M_0 в точке x_1 для типа A , получим мешок типа C с несимметричным распределением знаков масс, показанным на рис. 5, а та же самая операция для антисимметричного типа B приводит к мешку типа D с распределением знаков, показанным на рис. 6.

Рис.6. Поведение киральных масс для несимметричного типа D .

Для этих типов мешков снова имеет место самосогласованное решение уравнений (2.3) вида (3.1)–(3.3), только теперь фермионы будут иметь другой спектр частот ν_n , а сами мешки тем самым будут обладать рядом других физических свойств. В частности, тип C (рис. 5) существует только при нечетных $s = 2r + 1$, а уравнение на спектр ν_n имеет вид

$$e^{2i\nu a} = - \frac{1 - e^{-2ikd_1} \frac{M+i(\nu+k)}{M+i(\nu-k)}}{1 - e^{-2ikd_1} \frac{M-i(\nu-k)}{M-i(\nu+k)}} \frac{1 - e^{2ikd_2} \frac{M-i(\nu-k)}{M-i(\nu+k)}}{1 - e^{2ikd_2} \frac{M+i(\nu+k)}{M+i(\nu-k)}}. \quad (3.8)$$

Существенная разница между уравнениями (3.4) и (3.8) проявляется наиболее явным образом, если перевести уравнение (3.8) в тригонометрическую форму, аналогичную (3.5). Тогда оно выглядит следующим образом:

$$\operatorname{ctg}(\alpha\sqrt{1+x^2}) = \frac{x\sqrt{1+x^2} \sin \beta x}{(1+x^2) \cos \beta x + x \sin \epsilon x - \cos \epsilon x}. \quad (3.9)$$

В частности, из этого уравнения непосредственно следует, что несимметричность распределения знаков масс в типе C приводит к отсутствию симметрии спектра по знаку ϵ , т.е. относительно замены $d_1 \leftrightarrow d_2$. Однако последняя операция для этого типа мешка не является зеркальным отражением относительно центральной области, так как при замене $d_1 \leftrightarrow d_2$ меняются местами только размеры промежуточных областей слева и справа, но не знаки M_0 на границах мешка. Что же касается зеркального отражения, то

для типа C , как и для симметричного и антисимметричного типов A и B , оно приводит к мешку-двойнику $\bar{C}$, структура которого показана на рис. 7, который имеет те же нечетные разрешенные s и фермионный спектр, определяемый уравнением (3.8), поэтому по своим свойствам ничем не отличается от исходной конфигурации C . Это обстоятельство также будет иметь существенное значение при исследовании свойств конфигурации двух взаимодействующих мешков с участием мешков несимметричного типа.

Рис. 7. Внутренняя структура мешка типа $\bar{C}$ – зеркального двойника мешка типа C .

Другой несимметричный тип мешка D (рис. 6), как и в случае симметричного и антисимметричного типов A и B , является дополнительным к C . Именно, для этого случая разрешенные значения s четные, $s = 2r$, а окончательное спектральное уравнение для частот ν_n совпадает с (3.8). Более того, в полной аналогии с мешками типов A и B мешок типа D можно получить из типа C инвертированием знаков обеих масс M , M_0 слева от центральной области мешка. Поэтому между мешками типов C и D также существует своеобразная дискретная симметрия, связанная с изменением знаков киральных масс, которая не сказывается на спектре частот ν_n , а лишь определяет четность или нечетность разрешенных значений s в уравнении (3.2). Таким образом, два несимметричных типа мешков также имеют физически совершенно равноправный статус и в совокупности исчерпывают все возможные значения s в уравнении (3.2) при одном и том же уравнении на частоты ν_n (3.8).

Наиболее существенная принципиальная разница между (анти)симметричными (A , B) и несимметричными (C , D) типами мешков проявляется прежде всего в УФ-асимптотике фермионного спектра. Эта асимптотика легко находится из тригонометрических уравнений (3.5) и (3.9) методом, описанным в работах [11], [13]. В случае симметричного типа для асимптотики корней $x_n \gg 1$ из (3.5) получим

$$x_n = \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{(-1)^{n+1} \sin[(\pi/2 + \pi n)\alpha/\rho] \cos[(\pi/2 + \pi n)\varepsilon/\rho] + 1 - \alpha/2}{\pi/2 + \pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.10)$$

где $\rho = \alpha + \beta = M(a + d_1 + d_2)$ – безразмерный параметр, соответствующий полному размеру мешка. Отметим, что номер n в асимптотике (3.10) совпадает с точным номером

уровня в спектре уравнения (3.4), включающем как тригонометрическую (3.5), так и гиперболическую (3.7) ветви, если рассматриваются только положительные $\nu_n > 0$ и нумерация ведется с $n = 0$. Детальное объяснение этого факта приводится в работе [11].

Далее удобно ввести безразмерные частоты $\varepsilon_n = \nu_n/M$, и для их УФ-асимптотики из (3.10) получим

$$\varepsilon_n = \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{(-1)^{n+1} \sin[(\pi/2 + \pi n)\alpha/\rho] \cos[(\pi/2 + \pi n)\varepsilon/\rho] + 1 + \beta/2}{\pi/2 + \pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (3.11)$$

Это выражение также удобно переписать с преобразованным тригонометрическим членом, именно

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = & \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \\ & + (-1)^{n+1} \frac{\sin[(\pi/2 + \pi n)(\alpha + \varepsilon)/\rho] + \sin[(\pi/2 + \pi n)(\alpha - \varepsilon)/\rho]}{\pi + 2\pi n} + \\ & + \frac{1 + \beta/2}{\pi/2 + \pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Основная роль асимптотических выражений (3.10)–(3.12) состоит в том, что они определяют расходящиеся слагаемые в энергии фермионной компоненты мешка E_ψ . Как показано в работах [11]–[13], для самосогласованности решения уравнений (2.3) в виде (3.1)–(3.3) основное состояние (вакуум) фермионов в мешке должно быть определено как заполненное дираковское море фермионных состояний с $\nu_n < 0$. Переходя к безразмерным величинам, для энергии фермионного вакуума в рассматриваемом зарядово-симметричном случае имеем следующее выражение [12]:

$$\mathcal{E}_\psi = \frac{E_\psi}{M} = - \sum_n \varepsilon_n. \quad (3.13)$$

При этом в асимптотике (3.11) первое слагаемое дает квадратичную и линейную расходимости в $\mathcal{E}_\psi$, а во втором содержится логарифмическая расходимость, причем тригонометрический член за счет осцилляций к расходимости не приводит. Компенсация первого члена с очевидностью сводится к вычитанию энергии моря свободных фермионов, заключенных в том же “объеме” ρ , а логарифмическая расходимость, пропорциональная $\beta/2$, компенсируется соответствующим однопетлевым контрчленом собственной энергии [11]. Остаточная логарифмическая расходимость соответствует члену $1/(\pi/2 + \pi n)$, не зависящему от параметров мешка, и обусловлена не локальным взаимодействием, а запирающим фермионов внутри мешка [13]. По существу, это есть (бесконечная) энергия взаимодействия фермионов с запирающим потенциалом (стенками мешка). Появление такой бесконечной поверхностной энергии есть характерная черта поляризации вакуума во всех моделях мешков [3], [4], [26]–[33].

Для несимметричного типа мешков из уравнения (3.9) для асимптотики ε_n находим

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{(-1)^n \sin[(\pi/2 + \pi n)\varepsilon/\rho] \cos[(\pi/2 + \pi n)\alpha/\rho] + \beta/2}{\pi/2 + \pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} + \frac{(-1)^n (\sin[(\pi/2 + \pi n)(\alpha + \varepsilon)/\rho] - \sin[(\pi/2 + \pi n)(\alpha - \varepsilon)/\rho]) + \beta}{\pi + 2\pi n} + \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}\quad (3.14)$$

При этом так же, как и для симметричного типа, можно показать, что номер n в асимптотике (3.14) совпадает с истинным номером уровня в положительной части спектра уравнения (3.8), если учитываются обе ветви и нумерация ведется с $n = 0$.

Из (3.14) сразу видно, что логарифмические члены в ε_n для несимметричного типа мешков ведут себя принципиально иначе по сравнению с симметричным типом. Главное отличие состоит в том, что в асимптотике (3.14) отсутствует член $1/(\pi/2 + \pi n)$, который для мешков типов A и B приводит к наличию в $\mathcal{E}_\psi$ логарифмически-расходящегося слагаемого, обусловленного эффектом запираания фермионов внутри мешка, а тригонометрические члены антисимметричны относительно знака ε , т.е. относительно замены $d_1 \leftrightarrow d_2$.

Непосредственным следствием такой разницы в УФ-асимптотике спектра фермионов для симметричных и несимметричных типов мешков является существенное отличие в поведении перенормированной энергии фермионов $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ как функции геометрии мешка. В данном случае естественно перенормировать $\mathcal{E}_\psi$ непосредственно на пертурбативный вакуум, тогда разница между типами A , B и C , D будет проявляться наиболее четко. При этом вычитание энергии моря свободных фермионов удобно провести через промежуточное вычитание энергии фермионного вакуума в двухфазовом ($d_1 = d_2 = 0$) мешке. В результате для перенормированной энергии $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ будем иметь следующее выражение:

$$\tilde{\mathcal{E}}_\psi = \left(-\sum_n \varepsilon_n + \frac{\beta}{\rho} \sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n}\right) - \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho}\right) + \Delta\mathcal{E}_{\text{vac}}, \quad (3.15)$$

где $(\beta/\rho) \sum_n 1/2\varepsilon_n$ есть однопетлевой контрчлен собственной энергии, возникающий за счет рождения виртуальных фермионных пар [11], причем первые две суммы в (3.15) берутся по всем модам фермионного спектра, а $\Delta\mathcal{E}_{\text{vac}}$ есть разность вакуумной энергии двухфазового мешка и пертурбативного вакуума:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{vac}} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} - \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\infty} x dx\right). \quad (3.16)$$

Необходимо сразу отметить, что в выражениях (3.15), (3.16) вместо $\sum_{n=0}^{\infty}$ можно было бы на равных основаниях использовать $\sum_{n=n_0}^{\infty}$. Это есть тот самый конечный произвол, связанный с выбором точки вычитания, который всегда имеется в любой перенормировочной процедуре. При этом, однако, все изменение в выражении для $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ сводится к появлению дополнительного члена вида const/ρ , который для нас существенной роли не играет, так как для трехфазовых мешков внутренний размер a и тем самым величина

ρ всегда ограничены снизу положительной величиной [11], [13]. Поэтому член const/ρ представляет собой гладкую монотонную функцию, которая практически не искажает (сингулярные) эффекты поляризации фермионного вакуума, которые являются главным объектом исследований в нашей задаче. Кроме того, использовать $\sum_{n=0}^{\infty}$ оказывается весьма удобно технически, так как при этом она автоматически объединяется с первыми двумя слагаемыми (см. замечания после формул (3.10) и (3.14)).

Величина $\Delta\mathcal{E}_{\text{vac}}$ наиболее естественным образом вычисляется через регуляризацию по верхнему пределу, а именно

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=0}^N \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{(N+1)^2}{2}, \quad \int_0^{\infty} x dx \rightarrow \int_0^{\Lambda} x dx = \frac{\Lambda^2}{2}. \quad (3.17)$$

Отсюда однозначно следует, что для сокращения расходимостей в $\Delta\mathcal{E}_{\text{vac}}$ должно выполняться равенство $\Lambda(N) = N + 1$, и тогда $\Delta\mathcal{E}_{\text{vac}} = 0$. Следует отметить, что если вычислять $\Delta\mathcal{E}_{\text{vac}}$ по формуле Эйлера–Маклорена [11], то получим $\Delta\mathcal{E}_{\text{vac}} = -\pi/24\rho$, но в данном случае применимость этого метода не является строго обоснованной.

При такой перенормировке из (3.14) сразу видно, что величина $\tilde{\mathcal{E}}_{\psi}$ будет конечной для мешков типов C и D , в то время как для мешков типов A и B член $1/(\pi/2 + \pi n)$ в асимптотике (3.12) остается нескомпенсированным и приводит к появлению в выражении для $\tilde{\mathcal{E}}_{\psi}$ расходящегося слагаемого $(-\sum_n 1/(\pi/2 + \pi n))$, соответствующего бесконечной энергии связи фермионов со стенками мешка. Как показано в работе [13], последний эффект существенно зависит от геометрии мешка, конкретно от наличия или отсутствия области промежуточной фазы. В рассматриваемом случае мы можем получить еще более детальную информацию об этой зависимости, так как теперь можно изменять независимо как размеры d_1 и d_2 , так и знаки M и M_0 для каждой из промежуточных областей мешка. В частности, для симметричного типа при одновременном исчезновении обеих промежуточных областей ($d_1, d_2 \rightarrow 0$) будем иметь $\alpha \pm \varepsilon \rightarrow \rho$, поэтому $(-1)^{n+1}(\sin[(\pi/2 + \pi n)(\alpha + \varepsilon)/\rho] + \sin[(\pi/2 + \pi n)(\alpha - \varepsilon)/\rho])/2 \rightarrow -1$, что в точности компенсирует расходимость в поверхностной энергии такого мешка. Если же исчезает только одна из промежуточных областей (в силу симметрии относительно перестановки $d_1 \leftrightarrow d_2$ достаточно рассмотреть только случай $d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$), то $\alpha + \varepsilon \rightarrow \rho$, но $\rho - (\alpha - \varepsilon) = 2Md_2 \neq 0$. В результате логарифмический член $1/(\pi/2 + \pi n)$ в асимптотике ε_n будет скомпенсирован ровно наполовину. Иными словами, взаимодействие фермионов с одной запирающей стенкой мешка через область промежуточной фазы ненулевого размера дает расходимость в поверхностной энергии мешка, равную $(-1/2) \sum_n 1/(\pi/2 + \pi n)$.

Этот вывод легко проверяется в случае мешков несимметричного типа. Именно, если в таком мешке убрать промежуточную область d_1 и оставить только d_2 , то в асимптотике (3.14) появится член $1/(\pi + 2\pi n)$, а в выражении для $\tilde{\mathcal{E}}_{\psi}$ возникнет расходимость $(-1/2) \sum_n 1/(\pi/2 + \pi n)$, связанная как раз с тем, что фермионы отражаются от правой стенки мешка, расположенной в x_2 , предварительно проходя через область промежуточной фазы d_2 , а от левой стенки, расположенной в x_1 , они отражаются, оставаясь безмассовыми, в результате чего бесконечной энергии связи не возникает. С другой стороны, если убрать область d_2 , а оставить d_1 , то в $\tilde{\mathcal{E}}_{\psi}$ возникнет расходимость $(+1/2) \sum_n 1/(\pi/2 + \pi n)$, которая имеет ту же причину, что и в предыдущем случае,

а другой знак связан с тем, что в рассматриваемом случае у мешков несимметричного типа на левой стенке, расположенной в x_1 , знаки запирающего потенциала и киральной массы в примыкающей промежуточной области противоположны. Окончательный вывод, таким образом, состоит в том, что если непосредственно перед запирающей стенкой мешка находится область промежуточной фазы, то отражение фермионов от такой стенки приводит к появлению расходимости в поверхностной энергии мешка вида $(\pm 1/2) \sum_n 1/(\pi/2 + \pi n)$, причем знак расходимости определяется произведением знаков запирающего потенциала и киральной массы в промежуточной области. Подчеркнем, однако, что хотя формально это утверждение относится только к одной стенке мешка, на самом деле в этом эффекте неявно участвуют одновременно обе стенки мешка. (Последнее утверждение тривиально – в спектральной задаче для фермионов оба граничных условия в точках $x_{1,2}$ равноправны.)

Чтобы найти явный вид сингулярностей в $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ при исчезновении промежуточных областей мешка, заметим, что поведение суммы вида

$$\sum_{n \gg 1} (-1)^n \frac{\sin[(\pi\nu/\rho)(n + 1/2)]}{n + 1/2} \quad (3.18)$$

при $\nu \rightarrow \rho$ можно найти, если использовать известное соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin[z(n + 1/2)]}{n + 1/2} = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{4} \right) \right], \quad |z| < \pi. \quad (3.19)$$

Действительно, суммы (3.18) и (3.19) имеют одинаковый общий член, и при этом при $z \rightarrow \pi$ сумма (3.19) ведет себя как $(-\ln(\pi - z))$. Отсюда следует, что при $\nu \rightarrow \rho$ сумма (3.18) также будет иметь аналогичное поведение, т.е. расти как $(-\ln(\rho - \nu))$. В результате для мешков типов C, D перенормированная энергия $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ будет вести себя при $d_1 \rightarrow 0$ как $\ln[d_1/(a + d_2)]/2\pi$, а при $d_2 \rightarrow 0$ – как $(-\ln[d_2/(a + d_1)]/2\pi)$.

В случае мешков симметричного типа следует прежде всего учесть, что для них перенормировка (3.15) будет оставлять в выражении для $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ поверхностную расходимость $(-\sum_n 1/(\pi/2 + \pi n))$, так как запирающие потенциалы на границах мешка в данном случае будут одного знака (положительного). Иными словами, по отношению к несимметричным мешкам и пертурбативному вакууму (энергия которого принимается за начало отсчета) симметричные мешки сдвинуты по энергии вниз на эту бесконечную величину. Чтобы перейти к другому началу отсчета энергии, при котором мешки типов A, B будут иметь конечную энергию $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$, к перенормировке (3.15) необходимо добавить вычитание поверхностной расходимости, т.е. слагаемое $(+\sum_n 1/(\pi/2 + \pi n))$. Относительно этого нового начала отсчета энергия $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ для мешков типов A, B будет вести себя при $d_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$) как $(-\ln[d_i/(a + d_{3-i})]/2\pi)$. При этом, однако, мешки типов C, D и пертурбативный вакуум будут сдвинуты по энергии на соответствующую бесконечную величину вверх, и $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ для симметричных мешков будет достигать этого уровня только тогда, когда обе промежуточные области мешка будут исчезать одновременно.

В заключение этого раздела необходимо отметить также следующее. Возникает естественный вопрос: является ли расходимость в разности энергий мешков типов A, B и C, D следствием полного конфайнмента, или что будет с этой разностью, если считать

величину запирающего потенциала стенок M_0 конечной? Ответ на этот вопрос оказывается вполне нетривиальным, так как при корректном вычислении энергии систему с неизбежностью приходится помещать в ящик, т.е. снова вводить граничные условия, относительно которых различные типы мешков будут проявлять различные свойства. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в отдельной работе.

4. ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ КОНФИГУРАЦИИ ДВУХ МЕШКОВ

Сами по себе различные типы деформированных мешков, естественно, не могут существовать изолированно, так как их конфигурации не инвариантны относительно пространственной инверсии, что неприемлемо для моделей сильных взаимодействий. Однако для любого из типов A, B, C, D система из двух деформированных мешков, очевидно, может быть составлена P -четным образом и тем самым совместна как с физическими требованиями, так и с исходной антисимметричной конфигурацией бозонного поля, приведенной на рис. 1. Для этого оба мешка должны быть по своим внутренним размерам и знакам киральных масс M, M_0 зеркальным отражением друг друга относительно центральной области (фазы асимптотической свободы), как мешки C и $\bar{C}$, приведенные на рис. 5 и 7.

Будем считать, что самодействие интерполирующего мешки бозонного поля в области III (вне мешков) должно быть таким, чтобы в отсутствие фермионных мешков обеспечивать существование соответствующих одно- и двухсолитонных решений (с топологическими зарядами 1 и 2). Таким требованиям, в частности, удовлетворяет потенциал модели синус-Гордон

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{g^2}(1 - \cos g\varphi). \quad (4.1)$$

Мы, однако, будем исходить из упрощающего предположения, что вне мешков поле φ уже достаточно близко к своим вакуумным значениям (в данном случае $2\pi n$), и поэтому в области III можно оставить только главный (квадратичный) член разложения (4.1) в окрестности соответствующего вакуумного значения φ , не зависящий от явного вида потенциала. В частности, в области между мешками получим

$$V(\varphi) \simeq \frac{m^2}{2}\varphi^2. \quad (4.2)$$

Это предположение, безусловно, не выполняется в реальности, поскольку потенциал (4.2) соответствует только учету одночастичного обмена скалярными мезонами. Однако наша основная цель состоит в исследовании эффектов поляризации фермионного вакуума в конфигурациях с двумя мешками в рамках трехфазовой модели (2.1). Как мы видели в предыдущем разделе, эти эффекты уже в случае одного мешка приводят к сингулярностям в поведении энергии мешка. В то же время нелинейная динамика бозонного поля может давать существенный, но всегда конечный вклад в энергию системы. Поэтому для простоты и наглядности мы будем рассматривать бозонное поле между мешками только в рамках такого одномезонного обмена. На самом деле уже это приближение обеспечивает существование конфигурации двух трехфазовых мешков, которая является самосогласованным решением уравнений движения системы, и приводит

к нетривиальному взаимодействию между мешками, главную роль в котором играют эффекты поляризации вакуума.

Из соотношения (4.2) следует, что в области между мешками бозонное поле должно иметь вид

$$\varphi(x) = A \operatorname{sh} mx, \quad |x| < x_1, \quad (4.3)$$

а вне мешков в том же приближении получим

$$\varphi(x) = 2\pi - B e^{-mx}, \quad x > x_2, \quad (4.4)$$

при этом для $x < -x_2$ поле $\varphi(x)$ определяется по антисимметрии. Сшивая (4.3) и (4.4) по непрерывности с полем внутри мешка (3.1), получим

$$d_1 = \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{\operatorname{th} mx_1}{m} = \frac{a}{s} - \frac{\operatorname{th} mx_1}{m}, \quad d_2 = \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{1}{m} = \frac{a}{s} - \frac{1}{m}. \quad (4.5)$$

Таким образом, d_1 , d_2 и тем самым все остальные характеристики мешка оказываются фактически функциями двух независимых переменных a и x_1 . При этом из условия $d_2 \geq 0$ следует, что $\lambda \leq \pi m/2$, откуда с помощью (3.2) получаем, что

$$a \geq \frac{s}{m}. \quad (4.6)$$

Таким образом, размер области фазы асимптотической свободы мешка a , а вместе с ним и полный размер мешка $D = a + d_1 + d_2$ ограничены снизу положительной величиной $s/m > 0$.

Из (4.5) также следует, что

$$d_1 - d_2 = \frac{1 - \operatorname{th} mx_1}{m} \geq 0, \quad (4.7)$$

т.е. размер внутренних (обращенных друг к другу) промежуточных областей мешков d_1 в такой конфигурации всегда больше, чем внешний размер d_2 , при этом d_2 вообще не зависит от расстояния между мешками $2x_1$. Если же мешки расходятся, т.е. $x_1 \rightarrow \infty$, то $d_1 \rightarrow d_2$, и деформация мешков исчезает, что находится в полном соответствии с физическими требованиями, предъявляемыми к системе взаимодействующих мешков.

Для энергии бозонного поля в такой конфигурации с помощью несложных вычислений получим

$$E_\varphi = 4\pi\lambda = \frac{2\pi^2 s}{a}, \quad (4.8)$$

т.е. E_φ вообще не зависит от расстояния между мешками, а только от их внутреннего размера a . Далее вместо E_φ , как и для энергии фермионной компоненты системы, мы будем использовать безразмерную величину

$$\mathcal{E}_\varphi = \frac{E_\varphi}{M} = \frac{2\pi^2 s}{\alpha}, \quad (4.9)$$

а в качестве меры расстояния между мешками – величину x_1 .

Рис. 8. Конфигурация $\bar{A}A$ в терминах внутренних размеров мешков и знаков киральных масс.

Полная (безразмерная) энергия системы складывается из $\mathcal{E}_\varphi$ и фермионных вкладов от каждого из мешков. Как показано в предыдущем разделе, для зеркальных двойников мешков каждого из типов A, B, C, D все свойства фермионов одинаковы, поэтому

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(a, x_1) = \mathcal{E}_\varphi(a) + 2\tilde{\mathcal{E}}_\psi(a, x_1), \quad (4.10)$$

где $\tilde{\mathcal{E}}_\psi(a, x_1)$ – перенормированная соответствующим образом энергия фермионов одного из мешков. При этом в $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ бозонная компонента является гладкой монотонно убывающей функцией одного параметра a , ограниченной сверху значением $(\mathcal{E}_\varphi)_{\text{max}} = 2\pi^2 m/M$, а все наиболее нетривиальные свойства системы двух мешков обусловлены зависимостью $\tilde{\mathcal{E}}_\psi(a, x_1)$.

Рис. 9. Энергетическая поверхность $\tilde{\mathcal{E}}_A(a, x_1)$ для конфигурации $\bar{A}A$. В целях максимальной наглядности профиля энергии шаг по a выбран неравномерным $a_k = a_{\text{min}} + C^k \delta a$, $k \geq 1$, а для сохранения достаточного наклона поверхности во всей области изменения параметров первый узел по a выведен за область существенного логарифмического роста энергии, возникающего при $a \rightarrow a_{\text{min}}$.

Начнем с общих для всех типов мешков свойств $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ и $\mathcal{E}_{\text{tot}}$. Прежде всего, при фиксированном a и $x_1 \rightarrow \infty$ возникают два одинаковых изолированных мешка с $d_1 = d_2 = a/s - 1/m$ и $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ есть просто их удвоенная энергия. В то же время при $a \rightarrow \infty$ имеем $\mathcal{E}_\varphi \rightarrow 0$, тем самым вся энергия системы сводится к $2\tilde{\mathcal{E}}_\psi$. Из (4.5) при этом следует, что

$d_{1,2} \rightarrow a/s$, поэтому для таких значений a будем иметь $(\alpha \pm \varepsilon)/\rho \rightarrow s/(s+2) < 1 \quad \forall s$, причем равномерно по x_1 . Поэтому высокочастотная компонента в $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ ведет себя вполне регулярным образом, а основной вклад в $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ дают низколежащие уровни, среди которых основную роль будет играть гиперболическая ветвь. Именно, для уравнения (3.7) и аналогичной гиперболической ветви уравнения (3.8) легко проверяется, что при $\alpha \rightarrow \infty$ нижний (по модулю) уровень $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. Как показано в работе [11], для случая одного изолированного мешка последнее обстоятельство приводит к тому, что за счет контрчлена собственной энергии величина $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ будет расти как $\alpha \ln \alpha$. В рассматриваемом случае в целом такое поведение энергии также будет иметь место, однако теперь закон убывания $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и тем самым закон роста $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ более сложен за счет зависимости от x_1 и типа мешка. В частности, как показывают численные вычисления, для мешков типов C, D этот эффект начинает проявляться раньше, чем для мешков типов A, B .

Рис. 10. Часть поверхности $\tilde{\mathcal{E}}_A(a, x_1)$ для конфигурации $\bar{A}A$ в увеличенном масштабе и с ориентацией осей, удобной для наблюдения поведения энергии при малых a, x_1 . Шаг по a такой же неравномерный, как и на рис. 9, при этом хорошо видно, что первый узел по a находится в самом начале логарифмического роста энергии при $a \rightarrow a_{\min}$.

В случае конечных a и x_1 в энергии системы прежде всего начинает проявляться зависимость $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ от типа мешка. Поэтому далее мы будем рассматривать конфигурации взаимодействующих мешков различных типов по отдельности. Начнем с конфигурации $\bar{A}A$ (справа – рассмотренный ранее мешок типа A , слева – его зеркальный двойник $\bar{A}$). Соответствующая конфигурация в терминах внутренних размеров мешков и знаков масс

Рис. 11. Конфигурация $\overline{C}C$.

показана на рис. 8. Заметим, что в случае лагранжиана (2.1), в котором все массы M , M_0 предполагаются положительными, именно эта конфигурация двух мешков будет самогласованным решением уравнений движения системы.

Величина $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ при этом вычисляется с помощью соотношения (3.15) с добавлением члена $\sum_n 1/(\pi/2 + \pi n)$, что компенсирует расходимость в поверхностной энергии, при этом точку вычитания удобнее всего фиксировать таким образом, чтобы последняя сумма содержала все моды фермионного спектра, так что

$$\tilde{\mathcal{E}}_A = \sum_n \left(-\varepsilon_n + \frac{\beta}{\rho} \frac{1}{2\varepsilon_n} + \frac{1}{\pi/2 + \pi n} + \frac{\pi/2 + \pi n}{\rho} \right) + \Delta\mathcal{E}_{\text{vac}}. \quad (4.11)$$

Очевидное свойство конфигурации $\bar{A}A$ состоит в том, что если $a \rightarrow s/m$, то $d_2 \rightarrow 0$ и в $\tilde{\mathcal{E}}_A(a, x_1)$ возникает логарифмическая особенность $(-\ln(ma - s)/2\pi)$. При этом такое поведение энергии системы будет сохраняться для всех (конечных) x_1 , так как d_2 от x_1 не зависит, а при $x_1 \rightarrow \infty$ при логарифме появится коэффициент 2 за счет вклада от $d_1 \rightarrow 0$.

При $a > s/m$ детальная зависимость $\tilde{\mathcal{E}}_A(a, x_1)$ может быть установлена только с помощью численных расчетов. Расчеты проводились для $M/m = 2$, что примерно соответствует значению M_Q/m_π , если для массы составляющего кварка M_Q принять оценку в 300 МэВ, и при минимальном допустимом для данного типа мешков значении $s = 2$. Результаты вычислений $\tilde{\mathcal{E}}_A(a, x_1)$ в различных масштабах и проекциях приведены на рис. 9, 10, из которых следует, что с ростом расстояния между мешками энергия системы в целом медленно убывает, хотя и не монотонно. Аналогичные результаты имеют место и для конфигурации $\bar{B}B$, разница состоит только в разрешенных значениях s . Таким образом, для системы двух мешков симметричного типа эффекты поляризации вакуума в основном проявляются в виде логарифмической особенности при $a \rightarrow s/m$, а в области $a > s/m$ они обуславливают лишь сравнительно медленное убывание энергии с ростом x_1 . Иными словами, эффект Казимира для двух мешков симметричного типа в целом приводит к их отталкиванию с логарифмической сингулярностью при $a \rightarrow s/m$.

Совершенно иной характер имеет поведение энергии системы двух несимметричных мешков. Для определенности мы будем рассматривать мешки типа C , при этом следует по отдельности рассматривать конфигурации $\overline{C}C$ и $C\overline{C}$, поскольку эффект Казимира в системе таких мешков существенно зависит от того, какими сторонами они обращены

друг к другу. Начнем с конфигурации $\overline{C}C$ (рис. 11), которая будет являться решением уравнений движения системы, если в (2.1) изменить знаки M_0 в точках $\pm x_1$ на отрицательные. Величина $\tilde{\mathcal{E}}_C(a, x_1)$ рассчитывается при этом непосредственно по формуле (3.15), а спектр ε_n находится из уравнения (3.9) и его гиперболического аналога. Как и для $\tilde{\mathcal{E}}_A(a, x_1)$, характерной чертой $\tilde{\mathcal{E}}_C(a, x_1)$ является наличие логарифмической особенности $(-\ln(ma-s)/2\pi)$ при $a \rightarrow s/m$ и достаточно малых $x_1 \ll 1/m$, когда исчезает d_2 , но $d_1 \neq 0$. Однако, в отличие от мешков типов A, B , для несимметричных мешков с увеличением x_1 эта особенность постепенно исчезает. Это происходит за счет того, что с ростом x_1 при $a \rightarrow s/m$ исчезает и d_1 , и тогда первый член с синусом в асимптотике (3.14) дает отрицательный вклад в энергию вида $\ln(ma - s \operatorname{th} mx_1)/2\pi$. Следует отметить, что эта компенсация логарифмов имеет место уже при конечных $x_1 \simeq 1/m$, так как $d_1 \rightarrow 0$ экспоненциально быстро по x_1 . В результате в области малых a и $x_1 \ll 1/m$ величина $\tilde{\mathcal{E}}_C(a, x_1)$ имеет логарифмический рост, который вне этой области быстро исчезает, что полностью подтверждается результатами численных расчетов, приведенных на рис. 12.

Рис. 12. Поверхность $\tilde{\mathcal{E}}_C(a, x_1)$ для конфигурации $\overline{C}C$ при $s = 1$. Сетка по a взята неравномерной, как и на рис. 9, 10, чтобы сделать максимально наглядным формирование потенциального барьера при уменьшении a, x_1 .

Для конфигурации $C\overline{C}$ (см. рис. 13) по сравнению с $\overline{C}C$ мы имеем в точности обратную ситуацию. Теперь $\tilde{\mathcal{E}}_\psi(a, x_1)$ удобнее всего определять из левого мешка типа C , который отличается от правого из конфигурации $\overline{C}C$ (рис. 11) перестановкой $d_1 \leftrightarrow d_2$. В результате энергия $\tilde{\mathcal{E}}_\psi(a, x_1)$ для конфигурации $C\overline{C}$ в области малых a и $x_1 \leq 1/m$

оказывается инвертирована по отношению к энергии конфигурации $\overline{C}C$, так как теперь при $a \rightarrow s/m$ и достаточно малых $x_1 \ll 1/m$ сначала возникает логарифмическая особенность $\ln(ma - s)/2\pi$, которая затем с ростом x_1 компенсируется вкладом $(-\ln(ma - s \operatorname{th} mx_1))/2\pi$. Поэтому для конфигурации $C\overline{C}$ вместо логарифмического барьера при малых a и x_1 мы имеем логарифмическую потенциальную яму. Такие свойства системы $C\overline{C}$ также полностью подтверждаются численными расчетами, результаты которых приведены на рис. 14. Наблюдаемый на рис. 12 и 14 рост $\tilde{\mathcal{E}}_\psi(a, x_1)$ при $a \rightarrow \infty$ обусловлен общими свойствами гиперболической ветви фермионного спектра, которые для несимметричного типа проявляются раньше, чем для симметричного.

Рис.13. Конфигурация $C\overline{C}$.

Заметим теперь, что в терминах размерных величин энергетический масштаб рассмотренных эффектов определяется массой конститuentного кварка M . Таким образом, для системы двух мешков типа C (и совершенно аналогично для D , разница только в разрешенных значениях s) поляризация вакуума приводит к возникновению достаточно сильного нелинейного взаимодействия на малых расстояниях, причем в зависимости от конкретной конфигурации ($\overline{C}C$ и $C\overline{C}$) это может быть как отталкивание, так и притяжение. Необходимо также отметить, что несмотря на то что в последнем случае формально потенциал снизу не ограничен, никакого падения на центр (в данном случае в точку $a = s/m, x_1 = 0$) произойти не может, так как в последовательном подходе относительное движение мешков должно рассматриваться на квантовом уровне с помощью подходящих коллективных переменных. Нетрудно убедиться, что кинетические члены всех степеней свободы, ответственных за относительное движение мешков, ведут себя при $a \rightarrow s/m, x_1 \rightarrow 0$ вполне регулярным образом, поэтому в соответствующей квантово-механической задаче с такой логарифмической ямой могут возникать только связанные состояния, а падение на центр запрещено.

Наконец, остановимся кратко на свойствах системы “мешок–антимешок” с нулевым суммарным топологическим зарядом. В этом случае, очевидно, нечетная конфигурация бозонного поля, приведенная на рис. 1, должна быть заменена на соответствующую четную (см. рис. 15). Как и в случае системы “мешок–мешок”, мы будем исходить из упрощающего предположения, что вне мешков φ должно быть достаточно близко к своим вакуумным значениям. Тогда в соответствии с потенциалом (4.2) в области между мешками будем иметь

$$\varphi(x) = A \operatorname{ch} mx, \quad |x| < x_1. \quad (4.12)$$

Рис. 14. Поверхность $\tilde{\mathcal{E}}_C(a, x_1)$ для конфигурации $C\bar{C}$ при $s = 1$. Неравномерность сетки такая же, как и на рис. 9, 10, 12, чтобы сделать максимально наглядным формирование потенциальной ямы при уменьшении a, x_1 .

Сшивка по непрерывности для бозонного поля дает

$$d_1 = \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{\text{cth } mx_1}{m} = \frac{a}{s} - \frac{\text{cth } mx_1}{m}, \quad d_2 = \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{1}{m} = \frac{a}{s} - \frac{1}{m}. \quad (4.13)$$

Таким образом, внешний промежуточный размер мешков d_2 остается таким же, каким он был в системе “мешок–мешок”, а внутренний промежуточный размер d_1 , наоборот, становится меньше, чем d_2 , а именно

$$d_2 - d_1 = \frac{\text{cth } mx_1 - 1}{m}. \quad (4.14)$$

Если же мешки расходятся, т.е. $x_1 \rightarrow \infty$, то $d_1 \rightarrow d_2$. При этом из условия $d_1 \geq 0$ следует

$$1 \geq \text{th } mx_1 \geq \frac{s}{ma}. \quad (4.15)$$

Таким образом, в четном случае в дополнение к ограничению снизу на размер мешков (4.6) возникает существенно более нетривиальное ограничение снизу на расстояние x_1 между мешками в зависимости от их размера, именно $x_1 \geq x_{\min}(a)$, где

$$\text{th}(mx_{\min}(a)) = \frac{s}{ma}. \quad (4.16)$$

Далее из (4.12), (4.13) легко получить, что энергия бозонного поля по-прежнему определяется соотношением (4.8) и не зависит от x_1 , поэтому все нетривиальные свойства системы “мешок–антимешок” снова определяются исключительно фермионной компонентой системы. Заметим также, что из (4.15) следует, что $\varphi(x_1) \leq \pi$, а

$$\varphi(0) \leq \frac{\pi}{\operatorname{ch} mx_1} \leq \pi \sqrt{1 - \left(\frac{s}{ma}\right)^2}. \quad (4.17)$$

Последнее соотношение показывает, что в отличие от системы “мешок–мешок”, для которой условие $\varphi(0) = 0$ обеспечивалось непосредственно из условия антисимметрии $\varphi(x)$, для обоснованности аппроксимации (4.12) для интерполирующего поля между мешками должно выполняться условие $mx_1 \gg 1$, или, что эквивалентно, $ma \ll s + 1$. Иными словами, внутренний размер мешков a должен быть достаточно близок к своему минимальному значению s/m , что, однако, не является слишком жестким ограничением, так как в области больших a все вышеупомянутые факторы синфазно действуют только в сторону увеличения энергии фермионов.

Рис. 15. Профиль бозонного поля для системы “мешок–антимешок”.

Такая структура четной конфигурации бозонного поля приводит к тому, что эффект Казимира для системы “мешок–антимешок” выглядит несколько иначе, чем для системы “мешок–мешок”. Действительно, наиболее сильно поляризация фермионного вакуума проявляется в $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ при исчезновении одной (или сразу обеих) промежуточных фаз мешков, причем для системы “мешок–мешок” основную роль играла возможность обращения в нуль d_2 при конечных x_1 . Теперь, однако, d_2 может исчезать, только если $x_1 \rightarrow \infty$, где $d_1 \rightarrow d_2$, т.е. когда имеются два бесконечно удаленных недеформированных мешка, а $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ является такой же функцией a , как и в случае “мешок–мешок”.

В результате при конечных x_1 основную роль в эффекте Казимира для системы “мешок–антимешок” играет обращение в нуль d_1 , что для каждого значения размера мешков a происходит при $x_1 \rightarrow x_{\min}(a)$. Более конкретно, для мешков типов A, B при $x_1 \rightarrow x_{\min}(a)$ в $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ будет наблюдаться логарифмический рост по закону

$$-\frac{\ln(ma - s \operatorname{cth} mx_1)}{2\pi},$$

а для мешков типов C, D снова все определяется тем, какими сторонами они повернуты друг к другу. При этом поскольку при $x_1 \rightarrow x_{\min}(a)$ обращается в нуль d_1 , а не d_2 ,

то поведение системы “мешок–антимешок” для мешков типов C и D обратно к тому, что имелось для системы “мешок–мешок”. В частности, для конфигурации $\overline{C}C$ будем иметь логарифмическую яму, а для $C\overline{C}$, наоборот, – барьер. При этом размер соответствующих областей логарифмического роста и убывания энергии снова будет порядка $O(1/m)$, так как процесс выравнивания размеров d_1 и d_2 происходит экспоненциально быстро по x_1 . Однако, в отличие от системы “мешок–мешок”, в данном случае эти области располагаются не в окрестности $x_1 = 0$, а вдоль кривой $x_{\min}(a)$, образуя тем самым логарифмический “овраг” или “гребень” шириной порядка $O(1/m)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен эффект Казимира для системы двух трехфазовых киральных мешков в $(1+1)$ -мерном случае. Наши результаты показывают, что в такой системе поляризация фермионного вакуума может приводить к возникновению сильного нелинейного взаимодействия на конечных расстояниях, причем в зависимости от типов мешков это может быть как отталкивание, так и притяжение. При этом характерный энергетический масштаб эффекта определяется массой конститuentного кварка M , а масштаб расстояний, на которых он проявляется, оказывается порядка комптоновской длины мезонов.

В отношении этих результатов необходимо отметить следующее. Прежде всего, принципиальную роль в этом эффекте играет трехфазовость модели, так как все сингулярности в энергии системы при конечных расстояниях возникают за счет исчезновения той или иной промежуточной фазы мешков. Здесь еще раз весьма четко проявляется уже отмечавшееся ранее (см. [11]–[13]) обстоятельство, что трехфазовая модель мешков на самом деле не имеет гладкого перехода в двухфазовую конфигурацию, в которой промежуточная фаза составляющих кварков изначально отсутствует, хотя на уровне исходного лагранжиана формальный предел $d \rightarrow 0$ существует. Более того, из проведенных расчетов следует, что для двухфазовых мешков возникновение подобных сингулярностей в энергии Казимира невозможно.

Другим существенным моментом является то обстоятельство, что при расчете этого эффекта основной упор был сделан на исследование роли поляризации фермионного вакуума внутри мешков в динамике системы, а связывающее (интерполирующее) мешки бозонное поле учитывалось только на уровне одномезонного обмена. Это предположение, безусловно, не выполняется в реальности, однако следует отметить, что нелинейная динамика бозонного поля может давать существенный, но только конечный вклад в энергию системы, не внося тем самым принципиальных изменений в характер сингулярностей, обусловленных фермионной компонентой системы. С другой стороны, роль нелинейности бозонного поля нельзя и преуменьшать, так как в конечном счете именно структура бозонного поля определяет условия обращения в нуль размеров областей промежуточных фаз, а тем самым и возникновения соответствующих сингулярностей в энергии.

Заметим также, что несмотря на определенную упрощающую специфику $(1+1)$ -мерного случая, основные свойства рассмотренного эффекта, будучи обусловлены лишь наличием промежуточной фазы, так или иначе должны проявиться и в трехмерном случае. Однако трехмерный случай требует серьезного изменения всей техники расчетов, преж-

де всего процедуры выделения конечной части из вакуумной энергии фермионов [30]–[33], и поэтому будет рассмотрен отдельно.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 00-15-96577) и Санкт-Петербургского конкурсного центра фундаментального естествознания (грант № 00-0-6.2-29).

Список литературы

- [1] *G. E. Brown, M. Rho.* Phys. Lett. B. 1979. V. 82. P. 177.
- [2] *V. Vento, M. Rho, E. M. Nyman, J. H. Jun, G. E. Brown.* Nucl. Phys. A. 1980. V. 345. P. 413.
- [3] *H. Hosaka, O. Toki.* Phys. Rep. 1996. V. 277. P. 65.
- [4] *M. Rho.* Phys. Rep. 1994. V. 240. P. 1.
- [5] *I. Zahed, G. E. Brown.* Phys. Rep. 1986. V. 142. P. 1.
- [6] *G. Holzwarth, B. Schwesinger.* Rep. Progr. Phys. 1986. V. 49. P. 825.
- [7] *A. Chodos, C. B. Thorn.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2733; *T. Inoue, T. Maskawa.* Progr. Theor. Phys. 1975. V. 54. P. 1853.
- [8] *S. Gasiorowicz, J. L. Rosner.* Am. J. Phys. 1981. V. 49. P. 1954.
- [9] *L. Montanet et al.* Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 1173; *B. Povh et al.* Particles and Nuclei. Berlin: Springer, 1995.
- [10] *M. Lavelle, D. McMillan.* Phys. Rep. 1997. V. 279. P. 1.
- [11] *К. А. Свешников, И. К. Сулаев.* ТМФ. 1998. Т. 117. С. 263.
- [12] *I. Cherednikov, S. Fedorov, M. Khalili, K. Sveshnikov.* Nucl. Phys. A. 2000. V. 676. P. 339.
- [13] *К. А. Свешников, И. Ю. Малахов, С. М. Федоров, М. Ф. Халили.* ТМФ. 2002. Т. 132. № 2; hep-ph/0201124.
- [14] *S. Thérberge, A. W. Thomas, G. A. Miller.* Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 2838; 1981. V. 24. P. 216.
- [15] *A. W. Thomas.* Adv. Nucl. Phys. 1984. V. 13. P. 1.
- [16] *G. A. Miller.* Int. Rev. Nucl. Phys. 1984. V. 2. P. 190.
- [17] *S. Kahana, G. Ripka, V. Soni.* Nucl. Phys. A. 1984. V. 415. P. 351.
- [18] *M. K. Banerjee, W. Broniowski, T. D. Cohen.* A chiral quark soliton model. In: Chiral Solitons. Ed. K. F. Liu. Singapoure: World Scientific, 1987. P. 255.
- [19] *D. I. Diakonov, V. Yu. Petrov, P. V. Povilitsa.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 306. P. 809.
- [20] *M. C. Birse.* Progr. Part. Nucl. Phys. 1991. V. 25. P. 1.
- [21] *R. Alkofer, H. Reinhardt, H. Weigel.* Phys. Rep. 1996. V. 265. P. 139.
- [22] *M. Creutz.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 1749; *M. Creutz, K. Soh.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 443.
- [23] *K. Sveshnikov.* Phys. Lett. A. 1989. V. 136. P. 1; *К. А. Свешников.* ТМФ. 1990. Т. 82. № 1. С. 55.
- [24] *R. Perry, M. Rho.* Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 1169.
- [25] *A. J. Niemi, G. W. Semenoff.* Phys. Rep. 1986. V. 135. P. 99.
- [26] *P. J. Mulders.* Phys. Rev. D. 1984. V. 30. P. 1073.
- [27] *G. Plumien, B. Muller, W. Greiner.* Phys. Rep. 1986. V. 134. P. 87.
- [28] *A. D. Jackson, M. Rho.* Phys. Lett. B. 1986. V. 173. P. 217; P. 220.
- [29] *A. D. Jackson, L. Vepstas.* Phys. Rep. 1990. V. 187. P. 109.
- [30] *E. Elizalde, M. Bordag, K. Kirsten.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 895.
- [31] *H. Falomir, M. DeFrancia, E. M. Santangelo.* Phys. Lett. B. 1996. V. 371. P. 285.
- [32] *E. Elizalde, M. Bordag, K. Kirsten, S. Lesenduarde.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 1743.
- [33] *M. Bordag, U. Mohideen, V. Mostepanenko.* Phys. Rep. 2001. V. 353. P. 1.

Поступила в редакцию 28.II.2002 г.