Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Ультратретичное квантование термодинамики, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 3, 388–398

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:45:13

© 2002 г.

В. П. Маслов*

УЛЬТРАТРЕТИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ

Показано, что с помощью правила Дирака–Боголюбова замены бозонных операторов рождения и уничтожения s -числами ультратретичное квантование позволяет получить формулы Бардина–Купера–Шриффера–Боголюбова.

Ключевые слова: асимптотика, третичное квантование, квантование термодинамики.

1. ТРЕТИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

В предыдущей статье автора [1] введено квантование термодинамики для ансамбля, состоящего из не взаимодействующих между собой систем. При этом считалось, что системы ансамбля одинаковы и являются квантовыми системами N частиц. В данной статье рассматривается ансамбль из одинаковых ультратретично-квантованных систем [2]–[4]. Для квантования ансамбля из ультратретично-квантованных систем применяется метод третичного квантования [5].

Состояния ультратретично-квантованной системы описываются векторами пространства $\mathcal{F}$ [2]–[4]. Это пространство является бозонным пространством Фока [6], в нем определены операторы рождения и уничтожения частиц с номером s $\hat{b}^+(x, s)$ и $\hat{b}^-(x, s)$, а также операторы рождения и уничтожения пары частиц $\hat{B}^+(x, x')$ и $\hat{B}^-(x, x')$, где $x, y \in \mathbf{T}$, $\mathbf{T}$ – трехмерный тор $L \times L \times L$, s – дискретная переменная, называемая номером или статистическим спином, $s = 0, 1, \dots$. Операторы $\hat{b}^\pm(x, s)$ и $\hat{B}^\pm(x, x')$ удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям [6]. Кроме того, в пространстве $\mathcal{F}$ существует вакуумный вектор Φ_0 такой, что

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1, \quad \hat{b}^-(x, s)\Phi_0 = 0, \quad \hat{B}^-(x, x')\Phi_0 = 0,$$

и любой вектор Φ пространства $\mathcal{F}$ единственным образом представляется в виде

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k! M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \times \\ & \times \Phi_{k,M}(x_1, s_1; \dots; x_k, s_k; y_1, y_2; \dots; y_{2M-1}, y_{2M}) \times \\ & \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \dots \hat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \Phi_0, \end{aligned}$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия

где $\Phi_{k,M}$ – функции, симметричные относительно перестановок пар переменных (x_i, s_i) и (x_j, s_j) и симметричные относительно перестановок пар переменных (y_{2l-1}, y_{2l}) и (y_{2m-1}, y_{2m}) , $l, m = 1, \dots, M$.

Спектр энергий ультратретиочно-квантованной системы определяется следующей задачей на собственные значения:

$$\widehat{H}\Phi = \lambda \widehat{E}\Phi, \quad \widehat{E}\Phi \neq 0, \quad (1)$$

где $\widehat{H}$, $\widehat{E}$ – ультратретиочно-квантованные операторы в пространстве $\mathcal{F}$:

$$\widehat{H} = \mathcal{H}[\widehat{B}^+(\cdot), \widehat{B}^-(\cdot), \widehat{B}^+(\cdot), \widehat{b}^+(\cdot), \widehat{b}^-(\cdot)], \quad (2)$$

$$\widehat{E} = E[\widehat{B}^+(\cdot), \widehat{B}^-(\cdot), \widehat{B}^+(\cdot), \widehat{b}^+(\cdot), \widehat{b}^-(\cdot)], \quad (3)$$

$\mathcal{H}$ и E – функционалы, зависящие от функций $\Phi(x, y)$ и $\varphi(x, s)$ и имеющие вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Phi^*(\cdot), \Phi(\cdot), \varphi^*(\cdot), \varphi(\cdot)] &= \\ &= \exp\left(-\iint dx dy \Phi^*(x, y)\Phi(x, y) - \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \varphi^*(x, s)\varphi(x, s)\right) \text{Sp}(\widehat{H}\hat{\rho}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E[\Phi^*(\cdot), \Phi(\cdot), \varphi^*(\cdot), \varphi(\cdot)] &= \\ &= \exp\left(-\iint dx dy \Phi^*(x, y)\Phi(x, y) - \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \varphi^*(x, s)\varphi(x, s)\right) \text{Sp}(\hat{\rho}), \end{aligned} \quad (5)$$

$\hat{\rho}$ – вторично-квантованный оператор, зависящий от $\Phi(x, y)$ и $\varphi(x, s)$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} \frac{1}{k! \sqrt{M! M'} (k+2M)! (k+2M')!} \times \\ &\times \left(\sum_{s=0}^{\infty} \iint dx dx' \varphi(x, s)\varphi^*(x', s) \widehat{\psi}^+(x) \widehat{\psi}^-(x') \right)^k \times \\ &\times \left(\iint dy dy' B(y, y') \widehat{\psi}^+(y) \widehat{\psi}^+(y') \right)^M \times \\ &\times \left(\iint dz dz' \Phi^*(z, z') \widehat{\psi}^-(z, z') \widehat{\psi}^-(z') \right)^M \exp\left(-\int d\xi \widehat{\psi}^+(\xi) \widehat{\psi}^-(\xi)\right), \end{aligned} \quad (6)$$

$\widehat{\psi}^+(x)$ и $\widehat{\psi}^-(x)$ – бозонные операторы рождения и уничтожения, соответственно. Кроме того, в формуле (4) $\widehat{H}$ – вторично-квантованный гамильтониан вида

$$\widehat{H} = \int dx \widehat{\psi}^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \widehat{\psi}^-(x) + \frac{1}{2} \iint dx dy V(x, y) \widehat{\psi}^+(x) \widehat{\psi}^+(y) \widehat{\psi}^-(y) \widehat{\psi}^-(x). \quad (7)$$

Для третичного квантования ансамбля далее будет использоваться представление, в котором векторам Φ пространства $\mathcal{F}$ соответствуют функционалы $\Phi[Q(\cdot), q(\cdot)]$ от функций $Q(x, y)$, $q(x, s)$, а операторы $\hat{B}^\pm(x, y)$ и $\hat{b}^\pm(x, s)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{B}^-(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q(x, y) + \frac{\delta}{\delta Q(x, y)} \right), \\ \hat{B}^+(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q(x, y) - \frac{\delta}{\delta Q(x, y)} \right), \\ \hat{b}^-(x, s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q(x, s) + \frac{\delta}{\delta q(x, s)} \right), \\ \hat{b}^+(x, s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q(x, s) - \frac{\delta}{\delta q(x, s)} \right).\end{aligned}\tag{8}$$

Скалярное произведение векторов Φ_1 и Φ_2 в этом представлении есть континуальный интеграл

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int \cdots \int \prod_{x, y} DQ(x, y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(x, s) \Phi_1^*[Q(\cdot), q(\cdot)] \Phi_2^*[Q(\cdot), q(\cdot)]. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь ансамбль из N одинаковых не взаимодействующих ультраторично-квантованных систем. Состояния ансамбля описываются векторами L пространства $\mathcal{L}_N = \text{Symm} \underbrace{\mathcal{F} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}}_n$. Элементами этого пространства являются функционалы $L[Q_1(\cdot), q_1(\cdot); \dots; Q_N(\cdot), q_N(\cdot)]$, зависящие от функций $Q_i(x, y)$, $q_i(x, s)$, $i = 1, 2, \dots, N$, и симметричные относительно перестановок пар функций $Q_i(x, y)$, $q_i(x, s)$ и $Q_j(x, y)$, $q_j(x, s)$, $i, j = 1, \dots, N$. Так как системы не взаимодействуют, то каждое собственное значение энергии ансамбля есть сумма некоторых N собственных значений задачи (1). Отсюда следует, что спектр энергии ансамбля и соответствующие собственные векторы определяются следующей задачей:

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^N \left\{ \prod_{j=1}^N E \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_j(\cdot) - \frac{\delta}{\delta Q_j(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_j(\cdot) + \frac{\delta}{\delta Q_j(\cdot)} \right), \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j(\cdot) - \frac{\delta}{\delta q_j(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j(\cdot) + \frac{\delta}{\delta q_j(\cdot)} \right) \right] \right\} \times \\ & \times \mathcal{H} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_i(\cdot) - \frac{\delta}{\delta Q_i(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_i(\cdot) + \frac{\delta}{\delta Q_i(\cdot)} \right), \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i(\cdot) - \frac{\delta}{\delta q_i(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i(\cdot) + \frac{\delta}{\delta q_i(\cdot)} \right) \right] \times \\ & \times L[Q_1(\cdot), q_1(\cdot); \dots; Q_N(\cdot), q_N(\cdot)] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda \prod_{i=1}^N E \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_i(\cdot) - \frac{\delta}{\delta Q_i(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_i(\cdot) + \frac{\delta}{\delta Q_i(\cdot)} \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i(\cdot) - \frac{\delta}{\delta q_i(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i(\cdot) + \frac{\delta}{\delta q_i(\cdot)} \right) \right] \times \\
&\quad \times L[Q_1(\cdot), q_1(\cdot); \dots; Q_N(\cdot), q_N(\cdot)].
\end{aligned} \tag{10}$$

Будем теперь считать, что число N не фиксировано. В таком случае уравнения (10) могут быть третично проквантованы. Если N – переменная величина, то пространство состояний такого ансамбля есть фоксовское пространство $\mathcal{L} = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k$. В этом пространстве вводятся операторы рождения $\hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)]$ и уничтожения $\hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)]$. Уравнения (10) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
&\left\{ \iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)] \times \right. \\
&\quad \times \mathcal{H} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q(\cdot) - \frac{\delta}{\delta Q(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q(\cdot) + \frac{\delta}{\delta Q(\cdot)} \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q(\cdot) - \frac{\delta}{\delta q(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q(\cdot) + \frac{\delta}{\delta q(\cdot)} \right) \right] \hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)] - \Lambda \Bigg\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ \iint \prod_{x',y'} DQ'(x',y') \prod_{s'=0}^{\infty} \prod_{z'} Dq'(z',s') \times \right. \\
&\quad \times \left\{ \hat{\mathcal{A}}^+[Q'(\cdot), q'(\cdot)] E \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q'(\cdot) - \frac{\delta}{\delta Q'(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q'(\cdot) + \frac{\delta}{\delta Q'(\cdot)} \right), \right. \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q'(\cdot) - \frac{\delta}{\delta q'(\cdot)} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q'(\cdot) + \frac{\delta}{\delta q'(\cdot)} \right) \right] \hat{\mathcal{A}}^-[Q'(\cdot), q'(\cdot)] - \right. \\
&\quad \left. \left. - \hat{\mathcal{A}}^+[Q'(\cdot), q'(\cdot)] \hat{\mathcal{A}}^-[Q'(\cdot), q'(\cdot)] \right\} \right\} L = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

где L – вектор пространства $\mathcal{L}$. Уравнение (1) имеет набор решений $\Phi_k \in \mathcal{F}$, λ_k , $k = 0, 1, \dots$, такой, что

$$1) (\Phi_k, \widehat{\bar{E}}\Phi_l) = \delta_{kl}, \quad (\Phi_k, \Phi_l) = \delta_{kl};$$

$$2) (\Phi_k, \widehat{\bar{E}}\Phi_k) = 0 \text{ при всех } k \text{ тогда и только тогда, когда } \widehat{\bar{E}}\Phi = 0.$$

Заметим также, что $\widehat{\bar{E}}\widehat{H} = \widehat{H}\widehat{\bar{E}} = \widehat{H}$. Пусть $\Phi_k[Q(\cdot), q(\cdot)]$ – отвечающие векторам Φ_k

функционалы. Введем в пространстве $\mathcal{L}$ операторы

$$\begin{aligned}\hat{a}_k^- &= \iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \Phi_k^*[Q(\cdot), q(\cdot)] \hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)], \\ \hat{a}_k^+ &= \iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \Phi_k[Q(\cdot), q(\cdot)] \hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)].\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнение (11) тогда может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\left[\left[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- - \Lambda \right] \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- - \right. \right. \\ \left. \left. - \iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)] \hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)] \right) L = 0, \quad (13)\end{aligned}$$

где использованы автономные скобки $[[\cdot]]$ [5].

В работе [1] для ансамбля введены операторы больцмановской энтропии и вероятности. Обобщение на ультравторично-квантованный случай энтропии, введенной в [1], дает следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Собственными значениями s энтропии и ее собственными векторами L будем называть решение следующей задачи:

$$\begin{aligned}\left[\left[\ln \left(\frac{\Gamma(\hat{N} + 1)}{\prod_{k=0}^{\infty} \Gamma(\hat{N}_k + 1)} \right) - S \right] \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- - \right. \right. \\ \left. \left. - \iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)] \hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)] \right) L = 0, \quad (14)\end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, $\hat{N}_k = \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^-$, $\hat{N} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{N}_k$. Кроме того, собственными значениями F и собственными векторами L свободной энергии при температуре θ будем называть решения уравнения

$$\begin{aligned}\left[\left[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (\hat{N}_k + \theta \ln(\Gamma(\hat{N}_k + 1))) - \theta \ln(\Gamma(\hat{N} + 1)) - F \right] \times \right. \\ \times \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- - \iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)] \times \right. \\ \left. \left. \times \hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)] \right) L = 0. \quad (15)\end{aligned}$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ ЗАПОЛНЕНИЯ ДЛЯ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Если число систем ансамбля N стремится к бесконечности, то в уравнении (15) от операторов $\hat{A}^+$, $\hat{A}^-$ можно перейти к c -числам [5]. Тогда собственные значения свободной энергии F являются экстремальными значениями следующего функционала, зависящего от функционала $A[Q(\cdot), q(\cdot)]$:

$$F[A^*[\cdot], A[\cdot]] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_k + \theta \ln \left(\frac{a_k^* a_k}{N} \right) \right) a_k^* a_k, \quad (16)$$

где

$$a_k = \iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \Phi_k^*[Q(\cdot), q(\cdot)] A[Q(\cdot), q(\cdot)]. \quad (17)$$

Причем экстремум функционала (16) рассматривается при дополнительном условии

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* a_k = N. \quad (18)$$

Оказывается, что экстремальные значения функционала (16) при условии (18) совпадают с точностью до множителя N с экстремальными значениями функционала на пространстве $\mathcal{F}$

$$F[\Phi] = \frac{(\Phi \hat{H} \Phi)}{(\Phi \hat{E} \Phi)} - \theta S[\Phi], \quad (19)$$

где $S[\Phi]$ следующий функционал на пространстве $\mathcal{F}$:

$$S[\Phi] = -\text{Sp}(\hat{R}(\Phi) \ln(\hat{R}(\Phi))), \quad (20)$$

а $\hat{R}(\Phi)$ – вторично-квантованный оператор вида

$$\begin{aligned} \hat{R}(\Phi) = & \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} \frac{1}{k! \sqrt{M! M'} (k+2M)! (k+2M')!} \times \right. \\ & \times \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 dx'_1 \dots dx_k dx'_k dy_1 \dots dy_{2M} dz_1 \dots dz_{2M'} \times \\ & \times \hat{\psi}^+(y_1) \dots \hat{\psi}^+(y_{2M}) \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}^+(x_k) \times \\ & \times \hat{\psi}^-(x'_k) \dots \hat{\psi}^-(x'_1) \hat{\psi}^-(z_{2M'}) \dots \hat{\psi}^-(z_1) \times \\ & \times \exp \left(- \int d\xi \hat{\psi}^+(\xi) \hat{\psi}^-(\xi) \right) \times \\ & \times \left(\Phi, \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \dots \hat{b}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \times \right. \\ & \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \hat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \hat{B}^+(y, y') \hat{B}^-(y, y') \right) \times \\ & \times \hat{B}^-(z_{2M'-1}, z_{2M'}) \dots \hat{B}^-(z_2, z_1) \times \end{aligned}$$

$$\times \hat{b}^{-3}(x'_k, s_k) \dots \hat{b}^{-3}(x'_1, s_1) \Phi \Big) (\Phi, \overline{E} \Phi)^{-1}. \quad (21)$$

Введем теперь *представление чисел заполнения* в пространстве $\mathcal{F}$. Пусть заданы два набора функций $\{\Psi_\alpha(x, y)\}$ и $\{u_\beta(x, s)\}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots$, таких, что функции $\{\Psi_\alpha(x, y)\}$ линейно независимы и образуют полную систему в пространстве $L_2(\mathbf{T}^2)$, а функции $\{u_\beta(x, s)\}$ линейно независимы и являются полной системой в пространстве $L_2(\mathbf{T} \times \Sigma)$, где Σ – множество неотрицательных целых чисел. Каждой паре таких наборов $\{\Psi_\alpha(x, y)\}$ и $\{u_\beta(x, s)\}$ сопоставим следующую полную систему линейно независимых векторов пространства $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\{n\}, \{m\}} = & \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_\alpha!}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \int dx u_\alpha(x, s) \hat{b}^+(x, s) \right)^{n_\alpha} \times \\ & \times \prod_{\beta=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m_\beta!}} \left(\iint dy dx \Psi_\beta(y, z) \hat{B}^+(y, z) \right)^{m_\beta} \Phi_0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\{n\}, \{m\}$ – обозначения для наборов целых чисел $n_\alpha \geq 0$ и $m_\beta \geq 0$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots$.

В силу полноты и линейной независимости системы векторов (22) в пространстве $\mathcal{F}$ любой вектор $\Phi \in \mathcal{F}$ единственным образом представляется в виде

$$\Phi = \sum_{\{n\}} \sum_{\{m\}} \Psi(\{n\}, \{m\}) \Phi_{\{n\}, \{m\}}, \quad (23)$$

где через $\sum_{\{n\}}$ и $\sum_{\{m\}}$ обозначены суммы по всем возможным наборам $\{n\}$ и $\{m\}$. Коэффициенты $\Psi(\{n\}, \{m\})$ разложения (23) являются представлением вектора $\Phi \in \mathcal{F}$ в числах заполнения, отвечающих паре наборов функций $\{\Phi_\alpha(x, y)\}$ и $\{u_\beta(x, s)\}$. Эти коэффициенты суть функции наборов целых чисел $\{n\}$ и $\{m\}$ – чисел заполнения. Будем далее считать, что функции $\Phi_0(x, y)$ и $u_0(x, s)$ являются решениями уравнений Бардина–Купера–Шриффера–Боголюбова (БКШБ), отвечающих температуре θ и числу частиц N , а функции $\Phi_\alpha(x, y)$, $u_\beta(x, s)$ произвольные. Рассмотрим задачу нахождения экстремумов функционала (19) не на всем пространстве $\mathcal{F}$, а на пространстве, образованном такими векторами Φ , для которых выполняется условие

$$\Psi(\{n\}, \{m\}) = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} n_\alpha + 2 \sum_{\beta=1}^{\infty} m_\beta > \Delta N, \quad (24)$$

где $0 < \Delta < 1$ – некоторое число. Экстремальные значения функционала (19) на векторах, удовлетворяющих условию (24), суть собственные значения свободной энергии в “яме”; ширина этой “ямы” определяется параметром Δ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть вектор Φ такой, что для его представления $\Psi(\{n\}, \{m\})$ в числах заполнения, отвечающих паре наборов $\Phi_\alpha(x, y)$ и $u_\beta(x, s)$, выполнено условие (24). Тогда это условие выполнено также и для представления $\Psi'(\{n\}, \{m\})$ вектора Φ в числах заполнения, отвечающих другой паре наборов $\Phi'_\alpha(x, y)$ и $u'_\beta(x, s)$, если $\Phi_0(x, y) = \Phi'_0(x, y)$ и $u_0(x, s) = u'_0(x, s)$.

Рассмотрим теперь в представлении чисел заполнения *исходную задачу* о нахождении экстремума функционала (16) при условии (18). Каждому вектору $\Phi \in \mathcal{F}$ отвечает функционал $A[Q(\cdot), q(\cdot)]$. При этом

$$\iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \Phi_k^*[Q(\cdot), q(\cdot)] A[Q(\cdot), q(\cdot)] = (\Phi_k, \bar{E}\Phi).$$

Кроме того, в силу свойств векторов Φ_k

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (\Phi, \bar{E}\Phi_k) (\Phi_k, \bar{E}\Phi) &= (\Phi, \bar{H}\Phi), \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\Phi, \bar{E}\Phi_k) (\Phi_k, \bar{E}\Phi) &= (\varphi, \bar{H}\Phi), \end{aligned}$$

поэтому функционалу (16) и условию (18) соответствует следующий функционал на пространстве $\mathcal{F}$:

$$\tilde{F}[\Phi] = \frac{(\Phi, \bar{H}\Phi)}{(\Phi, \bar{E}\Phi)} + \theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Phi, \bar{E}\Phi_k) (\Phi_k, \bar{E}\Phi)}{(\Phi, \bar{E}\Phi)} \ln \left(\frac{(\Phi, \bar{E}\Phi_k) (\Phi_k, \bar{E}\Phi)}{(\Phi, \bar{E}\Phi)} \right). \quad (25)$$

Функционалы $\tilde{F}[\Phi]$ (25) и $F[\Phi]$ (19) не совпадают, хотя имеют одинаковые экстремальные значения и векторы. Рассмотрим экстремумы функционала (25) на векторах, удовлетворяющих условию (24). Эти экстремумы не совпадают с экстремумами функционала (19) на том же множестве, и поэтому можно сравнить, экстремумы какого функционала лучше “приближают” собственные значения свободной энергии при условии (24).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Векторы, на которых функционалы (19) и (25) принимают экстремальные значения, имеют вид

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k/2\theta} \Phi_k, \quad (26)$$

где числа c_k принимают значения 0 или 1. Соответствующее вектору (26) собственное значение свободной энергии (экстремальное значение функционалов (19) и (25)) есть

$$F = -\theta \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k/2\theta} \right). \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Способ, которым функции $\varphi_0(x, s)$ и $\Phi_0(x, y)$ выражаются через решения уравнений БКШБ, приведен в статье [4] (формулы (71) и (76)).

3. СИМВОЛ ТРЕТИЧНО-КВАНТОВАННОГО ОПЕРАТОРА СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Заметим прежде всего, что определение символа, данное в предыдущих статьях [2], [3], не совсем отражает термодинамическую асимптотику, хотя это определение и согласуется с правилом Боголюбова–Дирака о том, что операторы рождения и уничтожения в главном асимптотическом члене надо положить c -числами. Однако определенный таким образом символ скорее нужно назвать псевдосимволом. Пусть оператор $\hat{H}$ в формуле (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{l=1}^L \int \cdots \int dx_1 \dots dx_l \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}^+(x_l) \times \\ & \times H_l \left(x_1^2, \dots, x_l^2; -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \hat{\psi}^-(x_1) \dots \hat{\psi}^-(x_l). \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда в случае ультравторичного квантования без операторов рождения и уничтожения пар частиц $\hat{B}^\pm(x, y)$ для операторов $\bar{\hat{H}}$ и $\bar{\hat{E}}$, определенных формулами (2)–(5), имеет место тождество

$$\bar{\hat{H}} = \bar{\hat{E}} \bar{\hat{A}}, \quad (29)$$

где $\bar{\hat{A}}$ – оператор в пространстве $\mathcal{F}$, который имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\hat{A}} = & \sum_{l=1}^L \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_l=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_l \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{\psi}^+(x_l, s_l) \times \\ & \times H_l \left(x_1^2, \dots, x_l^2; -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \hat{b}^-(x_l, s_l) \dots \hat{b}^-(x_1). \end{aligned} \quad (30)$$

В случае, если ультравторичное квантование учитывает также операторы рождения и уничтожения пар частиц, тождество (29) справедливо, но оператор $\bar{\hat{A}}$ имеет более сложный вид, чем (30). Например, в случае, когда оператор $\hat{H}$ задается формулой (7) (частный случай формулы (28) при $L = 2$), оператор $\bar{\hat{A}}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\hat{A}} = & \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{b}^-(x, s) + \\ & + \iint dx dy \hat{B}^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) \right) \hat{B}^-(x, y) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \iint dx dy V(x, y) \hat{b}^+(x, s_1) \hat{b}^+(y, s_2) \hat{b}^-(y, s_2) \hat{b}^-(x, s_1) + \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \iiint dx dy dz (V(x, y) + V(x, z)) \times \\ & \times \hat{b}^+(x, s) \hat{B}^+(y, z) \hat{B}^-(y, z) \hat{b}^-(x, s) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint dx dy V(x, y) \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^-(x, y) + \\
& + \frac{1}{2} \iiint dx dy dz dw V(x, y) \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^+(z, w) \times \\
& \times (\hat{B}^-(y, w) \hat{B}^-(x, z) + \hat{B}^-(w, y) \hat{B}^-(z, x) + \\
& + \hat{B}^-(y, z) \hat{B}^-(w, x) + \hat{B}^-(z, y) \hat{B}^-(x, w)).
\end{aligned} \tag{31}$$

Если в выражениях (30), (31) положить операторы $\hat{B}^\pm(x, y)$, $\hat{b}^\pm(x, s)$ c -числами, то получится символ, который, как это строго доказано в работе [7], отвечает асимптотике в термодинамическом пределе.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда потенциал взаимодействия имеет такой же вид, как в модели БКШБ, оба символа совпадают. Для рассмотренного в данной статье третично-квантованного уравнения (15) также имеет место тождество, аналогичное (29). А именно,

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{k=0}^2 \lambda_k (\hat{N}_k + \theta \ln(\Gamma(\hat{N} + 1))) - \theta \ln(\Gamma(\hat{N} + 1)) - F \right] \times \\
& \times \exp \left(\sum_{k=0}^3 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- - \iint \prod_{x,y} DQ(x, y) \prod_{s=0}^\infty \prod_z Dq(z, s) \times \right. \\
& \times \hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)] \hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)] \Big) = \\
& = \exp \left(\sum_{k=0}^3 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- - \iint \prod_{x,y} DQ(x, y) \prod_{s=0}^\infty \prod_z Dq(z, s) \times \right. \\
& \times \hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)] \hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)] \Big) \times \\
& \times \left[\sum_{k=0}^1 \lambda_k (\hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- + \theta \ln(\Gamma(\hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- + 1))) - \right. \\
& \left. - \theta \ln \left(\Gamma \left(\sum_{k=0}^\infty \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- + 1 \right) \right) - F \right].
\end{aligned} \tag{32}$$

Поэтому естественно считать символом, отвечающим уравнению (15), выражение, которое получается из оператора, стоящего в правой части равенства (32) в автономных скобках, если положить операторы $\hat{a}_k^+$ и $\hat{a}_k^-$ c -числами.

4. ПРОНЕСЕНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ ЧЕРЕЗ ТРЕТИЧНО-КВАНТОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ

Перейдем в представление, в котором векторам пространства $\mathcal{L}$ соответствуют функционалы от функционалов $z[Q(\cdot), q(\cdot)]$, а операторы $\hat{\mathcal{A}}^\pm[Q(\cdot), q(\cdot)]$ имеют вид

$$\hat{\mathcal{A}}^-[Q(\cdot), q(\cdot)] = \frac{\delta}{\delta z[Q(\cdot), q(\cdot)]}, \quad \hat{\mathcal{A}}^+[Q(\cdot), q(\cdot)] = z[Q(\cdot), q(\cdot)].$$

Введем переменные

$$z_k = \iint \prod_{x,y} DQ(x,y) \prod_{s=0}^{\infty} \prod_z Dq(z,s) \Phi_k[Q(\cdot), q(\cdot)] z[Q(\cdot), q(\cdot)]$$

и переменную

$$\tilde{z}[Q(\cdot), q(\cdot)] = z[Q(\cdot), q(\cdot)] - \sum_{k=0}^{\infty} z_k \Phi_k^*[Q(\cdot), q(\cdot)].$$

Пусть вектору L в уравнении (15) соответствует функционал $[z, \tilde{z}[Q(\cdot), q(\cdot)]]$. Тогда уравнение (15) принимает вид

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_k z_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \theta \ln \left(\Gamma \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} + 1 \right) \right) \right) - \right. \\ \left. - \theta \ln \left(\Gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k \frac{\partial}{\partial z_k} + 1 \right) \right) - F \right) L[z, 0] = 0. \quad (33)$$

В случае, когда рассматривается ансамбль, состоящий из N систем, функционал $L[z, 0]$ обладает следующим свойством: $L[\lambda z, 0] = \lambda^N L[z, 0]$. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ будем искать решение уравнения (33) в виде $L[z, 0] = e^{N S(z)} \varphi(z)$, где $S(z)$ и $\varphi(z)$ удовлетворяют условиям $S(\lambda z) = S(z) + \ln \lambda$, $\varphi(\lambda z) = \varphi(z)$. Тогда после пронесения $e^{N S(z)}$ уравнение (33) примет вид

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_k z_k \left(N \frac{\partial S}{\partial z_k} + \frac{\partial}{\partial z_k} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta \ln \left(\Gamma \left(z_k \left(N \frac{\partial S}{\partial z_k} + \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right) \right) \right) - \theta \ln(N!) - F \right) \varphi(z) = 0. \quad (34)$$

Раскладывая левую часть уравнения (34) по степеням N и приравнявая к нулю коэффициент при главной степени, получим уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_k + \theta \ln \left(z_k \frac{\partial S}{\partial z_k} \right) \right) z_k \frac{\partial S}{\partial z_k} = f_1, \quad (35)$$

где $f_1 = F/N + O(1/N^2)$. Уравнение (35) есть уравнение Гамильтона–Якоби для символа, определенного в предыдущем разделе.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. ТМФ. 2002. Т. 131. № 2. С. 261–277.
- [2] В. П. Маслов. Функциональный анализ и его приложения. 2000. Т. 34. № 4. С. 35–48.
- [3] В. П. Маслов. ТМФ. 2000. Т. 125. № 2. С. 297–314.
- [4] В. П. Маслов. ТМФ. 2001. Т. 129. № 3. С. 464–490.
- [5] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов. Метод комплексного роста в многочастичных задачах и задачах квантовой теории поля. М.: УРСС, 2000.
- [6] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1987.
- [7] В. П. Маслов, Г. В. Коваль. Докл. РАН. (в печати).

Поступила в редакцию 8.IV.2002 г.