Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Павлов, Редукция на поверхность связей второго рода, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 3, 399–407

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:23:04

РЕДУКЦИЯ НА ПОВЕРХНОСТЬ СВЯЗЕЙ ВТОРОГО РОДА

Предложена рекуррентная процедура, позволяющая по данным связям второго рода явно строить эквивалентные им связи и каноническое преобразование так, что на поверхности связей скобка Дирака сводится к скобке Пуассона.

Ключевые слова: механика Гамильтона–Дирака, системы со связями, редукция на поверхность связей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен вариант последовательной схемы перехода от лагранжева описания динамики систем с неголономными связями к гамильтонову описанию. В отличие от большинства исследований на эту тему, использовавших вслед за Дираком понятие “слабых” равенств (соотношений для классов эквивалентности), в этой работе все соотношения справедливы и вне поверхности связей, т.е. принят определенный способ выбора представителей классов эквивалентности. В данном подходе возникает процедура “размножения” связей, уточняющая схему Дирака и допускающая ее инвариантную формулировку [2]. С помощью этой процедуры удалось прояснить геометрический смысл связей второго рода и скобок Дирака, а также сформулировать стандартный прием, позволяющий найти все локальные симметрии модели с данной функцией Лагранжа [3] (см. также более раннюю работу [4]).

По поводу связей второго рода и скобки Дирака в работе [1] было упомянуто следующее, восходящее к работам [4], [5], утверждение. Неособым линейным преобразованием связей второго рода можно добиться того, чтобы матрица их скобок Пуассона приобрела нормальную форму (состояла бы из блоков 2×2 на главной диагонали, каждый из которых есть простейшая антисимметричная матрица ε_{ik}). После этого с помощью канонической замены переменных можно сделать преобразованные связи второго рода частью новых координат и импульсов. Тогда скобка Дирака сведется к скобке Пуассона в остальных новых канонических переменных. Ниже предлагается рекуррентная процедура, позволяющая явно реализовать указанное утверждение.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

2. РАЗМНОЖЕНИЕ СВЯЗЕЙ

Поскольку рекуррентия связана с самой процедурой размножения связей, напомним основные моменты этой процедуры. Мы начинаем с лагранжевой формы принципа Гамильтона, когда функциональными аргументами действия

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q})$$

являются обобщенные координаты $q = (q^1, q^2, \dots, q^n)$. Чтобы воспользоваться техникой симплектической геометрии, следует модифицировать действие, включив в число его функциональных аргументов обобщенные скорости $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$,

$$S[q, v] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q, v) - v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \right).$$

Однако в вырожденном случае, когда ранг гессиана $\Gamma_{ik} = \partial^2 L / \partial v^i \partial v^k$ не максимален, одной этой модификации недостаточно – число функциональных аргументов действия приходится еще увеличить. Разобьем набор индексов $\{i\} = (1, 2, \dots, n)$ на два непересекающихся набора $\overset{0}{A} = \{a\}$ и $\overset{0}{M} = \{\mu\} = (1, \dots, m)$ так, что Γ_{ab} – какой-нибудь минор максимального ранга. Тогда эквивалентные первоначальным уравнения движения получаются из условия экстремальности действия

$$S[q, v, \check{p}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q, v) - v^a \frac{\partial L}{\partial v^a} - p_\mu v^\mu + \dot{q}^a \frac{\partial L}{\partial v^a} + p_\mu \dot{q}^\mu \right), \quad (1)$$

где $\check{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ – набор множителей Лагранжа, вариации по которым обеспечивают выполнимость уравнений движения $\dot{q}^\mu = v^\mu$ и которые введены для компенсации вырожденности гессиана.

Переход к гамильтоновой форме динамики осуществляется следующим образом. невырожденность гессиана Γ_{ab} позволяет локально разрешить относительно v^a определения импульсов $p_a = \partial L / \partial v^a$, получив $v^a = U^a(q, \hat{p}, \check{v})$, где $\hat{p}$ – дополнительный к $\check{p}$ набор, а $\check{v} = (v^1, v^2, \dots, v^m)$. Обозначим символом $\#$ подстановку $v^a = U^a$ для любой функции переменных $q, v, \check{p}$. Благодаря матричному тождеству [6] $\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha} \Gamma^{ab} \Gamma_{b\nu}$ (матрица с индексами сверху обратна к Γ_{ab}), функция Рауса

$$R(q, \hat{p}, \check{v}) = \left(L - v^a \frac{\partial L}{\partial v^a} \right)^\#$$

линейна по $\check{v}$,

$$R(q, \hat{p}, \check{v}) = -H(q, \hat{p}) + v^\mu \psi_\mu(q, \hat{p}), \quad (2)$$

причем $\psi_\mu(q, \hat{p}) = (\partial L / \partial v^\mu)^\#$. Введем обозначение

$$\varphi_\mu = p_\mu - \psi_\mu. \quad (3)$$

В результате получаем, что замена функциональных аргументов $\hat{v} \rightarrow \hat{p}$ приводит действие (1) к гамильтоновой форме

$$S[q, p, \check{v}] = \int_{t_1}^{t_2} dt (-H - v^\mu \varphi_\mu + p_i \dot{q}^i), \quad (4)$$

а уравнения Эйлера–Лагранжа для него принимают предложенный Дираком вид

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{H, q^i\} + v^\nu \{\varphi_\nu, q^i\}, \\ \dot{p}_i &= \{H, p_i\} + v^\nu \{\varphi_\nu, p_i\}, \\ \varphi_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\{\cdot, \cdot\}$ – стандартная скобка Пуассона в переменных p, q . Отметим, что в качестве множителей Лагранжа для действия (4) выступают скорости $\check{v}$, а для действия (1) – импульсы $\check{p}$. Поэтому в обоих случаях разумно включить их в число локальных координат фазового пространства. При этом в гамильтоновом случае производная по времени от любой функции, заданной на этом пространстве, в силу уравнений движения примет вид

$$\dot{f} = \{H, f\} + v^\nu \{\varphi_\nu, f\} + \dot{v}^\nu \frac{\partial f}{\partial v^\nu}. \quad (6)$$

Согласно Дираку условие совместности системы уравнений (5) означает, что производная по времени в силу уравнений движения для (первичных) связей φ_μ должна сводиться к линейной комбинации связей с некоторыми функциями на фазовом пространстве в качестве коэффициентов. В соответствии с формулой (6) получим

$$\dot{\varphi}_\mu = \{H, \varphi_\mu\} + v^\nu \{\varphi_\nu, \varphi_\mu\}. \quad (7)$$

По определению (3) функции φ_μ линейны по p_μ с единичным коэффициентом, поэтому оба члена правой части соотношения (7) не зависят от p_μ , упомянутая линейная комбинация равна нулю и для выполнения условия совместности мы должны потребовать, чтобы $\dot{\varphi}_\mu = 0$.

Рассмотрим матрицу $\gamma_{\nu\mu} = \{\varphi_\nu, \varphi_\mu\}$. Если ее ранг на поверхности первичных связей $M_0 = \{\varphi_\mu = 0, \mu \in \overset{0}{M}\}$ не максимален, выделим какой-нибудь минор наибольшего ранга $\gamma_{\alpha\beta}$, разбив набор индексов $\overset{0}{M}$ на два непересекающихся набора $\overset{1}{A} = \{\alpha\}$ и $\overset{1}{M} = \{\mu'\}$. Связи φ_α называются (первичными) связями второго рода. При этом на поверхности M_0 имеем $\gamma_{\mu'\nu'} = \gamma_{\mu'\alpha} \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\nu'}$, а в силу линейности функций φ_μ по p_μ это будет справедливо и вне M_0 . Тогда в качестве нулевых векторов матрицы $\gamma_{\mu\nu}$ можно выбрать

$$\beta_{\mu'}^\mu = \delta_{\mu'}^\mu - \delta_\alpha^\mu \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\mu'}. \quad (8)$$

Требование $\dot{\varphi}_\alpha = 0$ позволяет фиксировать множители Лагранжа $v^\alpha = -(\{H, \varphi_\beta\} + v^{\mu'} \gamma_{\mu'\beta}) \gamma^{\beta\alpha}$, так что производная по времени в силу уравнений движения примет вид

$$\dot{f} = \{H, f\}_1^* + v^{\nu'} \{\varphi_{\nu'}, f\}_1^* + \dot{v}^\nu \frac{\partial f}{\partial v^\nu}, \quad (9)$$

где $\{\cdot, \cdot\}_1^*$ – скобка Дирака $\{\cdot, \cdot\}^D$, построенная по первичным связям второго рода,

$$\{f, g\}_1^* = \{f, g\} - \{f, \varphi_\alpha\} \gamma^{\alpha\beta} \{\varphi_\beta, g\}. \quad (10)$$

Строго говоря, в последнем члене формулы (9) следовало бы подставить вместо $\dot{v}^\alpha$ их значения, вычисленные с помощью первоначального уравнения (6). Поскольку для дальнейших рассуждений не важен довольно громоздкий явный вид этих выражений, мы их не выписываем, заметив только, что член с ускорениями примет вид $\dot{v}^{\nu'} \beta_{\nu'}^\nu \partial f / \partial v^\nu$.

Если матрица $\gamma_{\nu\mu}$ невырождена (набор $\overset{1}{M}$ пуст), все множители Лагранжа окажутся фиксированными, а условие совместности выполненным. В противном случае умножение условия $\dot{\varphi}_\mu = 0$ на нулевые векторы матрицы $\gamma_{\nu\mu}$ дает вторичные связи,

$$0 = \{H, \varphi_\mu\} \beta_{\mu'}^\mu = \{H, \varphi_{\mu'}\}_1^* \equiv \overset{1}{\varphi}_{\mu'} \quad (11)$$

Требование совместности сужает при этом поверхность связей до

$$M_1 = \{\varphi_\mu = 0, \mu \in \overset{0}{M}; \overset{1}{\varphi}_{\mu'} = 0, \mu' \in \overset{1}{M}\}.$$

3. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ $\gamma_{\alpha\beta}$ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Возьмем какой-нибудь ненулевой элемент матрицы $\gamma_{\alpha\beta}$ и временно обозначим $\varphi_\alpha = \xi$, $\varphi_\beta = \eta$, $\{\xi, \eta\} = \gamma_0^{-1}$. Очевидно, $\{\xi, \gamma_0 \eta\} = 1 + \{\xi, \gamma_0\} \eta$; обозначив $\gamma_i = \{\xi, \gamma_0 \gamma_{i-1}\}$, построим формальный ряд

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \gamma_0 \left(\eta - \frac{\gamma_1 \eta^2}{2!} + \frac{\gamma_2 \eta^3}{3!} - \dots \right) = \\ &= \gamma_0 \int_0^\eta d\eta \left(1 - \gamma_1 \eta + \frac{\gamma_2 \eta^2}{2!} - \frac{\gamma_3 \eta^3}{3!} + \dots \right) = \gamma_0 \int_0^\eta d\eta \exp(-\eta \{\xi, \gamma_0 \cdot\}) \circ 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Последний интеграл следует понимать как формальный псевдодифференциальный оператор, вспомнив, что взятие скобки Пуассона связи φ с функцией $f(p, q)$ эквивалентно действию на эту функцию векторного поля $X_{d\varphi}$, соответствующего в симплектической геометрии дифференциалу связи. В этих обозначениях

$$\tilde{\eta} = \gamma_0 \int_0^\eta d\eta \exp(-\eta X_{d\xi} \gamma_0) \circ 1 \equiv X^{(\xi)} \eta, \quad (13)$$

где $X^{(\xi)}$ – упомянутый псевдодифференциальный оператор. Очевидно, что коэффициенты ряда (12) подобраны так, что $\{\xi, \tilde{\eta}\} = 1$, а преобразование $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi, \tilde{\eta})$ является неособым.

Пусть теперь $\{\xi, \eta\} = 1$, а ζ – любая из остальных связей второго рода. Обозначив $(X_{d\xi})^n \zeta = \delta_n$, $(X_{d\eta})^n \zeta = \varepsilon_n$, построим аналогичные (12) формальные ряды

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &= \zeta - \frac{\delta_1 \eta}{1!} + \frac{\delta_2 \eta^2}{2!} - \frac{\delta_3 \eta^3}{3!} + \dots = \exp(-\eta X_{d\xi}) \zeta \equiv Y^{(\xi)} \zeta, \\ \tilde{\zeta} &= \zeta + \frac{\varepsilon_1 \xi}{1!} + \frac{\varepsilon_2 \xi^2}{2!} + \frac{\varepsilon_3 \xi^3}{3!} + \dots = \exp(\xi X_{d\eta}) \zeta \equiv Y^{(-\eta)} \zeta. \end{aligned} \quad (14)$$

Их структура обеспечивает выполнимость условий $\{\xi, \tilde{\zeta}\} = 0 = \{\eta, \tilde{\zeta}\}$, однако нам нужно одновременное обращение в нуль скобок Пуассона преобразованной связи ζ с обеими связями ξ, η . Это достигается за счет того, что операции $Y^{(\xi)}$ и $Y^{(-\eta)}$ коммутируют, поскольку перестройка выражения $Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}\zeta$ в $Y^{(-\eta)}Y^{(\xi)}\zeta$ осуществляется за счет тождества Якоби $X_{d\xi}X_{d\eta}\zeta = X_{d\eta}X_{d\xi}\zeta + X_{d\zeta}\{\xi, \eta\}$, где второй член в правой части обращается в нуль вследствие равенства $\{\xi, \eta\} = 1$ (подробнее см. приложение). Итак, выражение $\zeta^* = Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}\zeta$ имеет нулевую скобку Пуассона с обеими связями ξ, η . Выполним такой переход для всех остальных связей второго рода. Новая матрица $\gamma_{\alpha\beta}$ будет иметь матрицу ε_{ik} в левом верхнем углу, а остальные элементы первых двух строк и столбцов будут нулевыми. В приложении (см. формулу (П.3)) показано, что эта новая матрица останется невырожденной, а структура разложений (12) и (14) обеспечит эквивалентность новых связей старым. Теперь можно взять следующий ненулевой элемент из правого нижнего блока и повторить процедуру, что завершает рекуррентность.

4. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Описанный в разделе 2 переход к гамильтоновой форме динамики таков, что при любом выборе локальных координат первичные связи (3) линейны по импульсам: часть импульсов оказывается “маркированной”. Назвав преобразованные по процедуре раздела 3 связи новыми координатами и импульсами, мы должны “подправить” остальные координаты и импульсы. Возьмем какую-нибудь их пару p, q . Прежде всего, необходимо обеспечить равенство нулю скобок Пуассона этих p, q с преобразованными связями. Очевидно, что это достигается действием на них пар псевдодифференциальных операторов $Y^{(\xi)}$ и $Y^{(-\eta)}$, отвечающих всем преобразованным связям второго рода. В приложении (см. формулу (П.6)) показано, что скобка Пуассона преобразованных таким образом p, q выражается через скобку Дирака, построенную по преобразованным связям,

$$\{Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}p, Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}q\} = Y^{(\xi)}Y^{(-\eta)}\{p, q\}_{\xi, \eta}^D, \quad (15)$$

а она, вообще говоря, не единична. Поэтому для преобразованных только что p, q необходимо дополнительное преобразование типа (12). Поскольку же правая часть (15) обращается в нуль под действием $X_{d\xi}$ и $X_{d\eta}$, скобки Пуассона дополнительно преобразованных p, q с новыми связями второго рода останутся нулевыми.

В сущности, процедура “подправки” новых координат и импульсов повторяет процедуру приведения матрицы $\gamma_{\alpha\beta}$ к нормальному виду. После ее завершения мы приходим к уравнению движения

$$\dot{f} = \{H, f\}^{M_\alpha} + v^{\nu'}\{\varphi_{\nu'}, f\}^{M_\alpha} + \dot{v}^{\nu'}\beta_{\nu'}^\nu \frac{\partial f}{\partial v^\nu}, \quad (16)$$

где символом $\{\cdot, \cdot\}^{M_\alpha}$ обозначена скобка Пуассона, суженная на поверхность первичных связей второго рода $M_\alpha = \{\varphi_\alpha = 0\}$, и к суженным на эту поверхность уравнениям связей $\varphi_{\mu'} = 0$. Условие совместности для этой системы приводит к уравнениям вторичных связей $\varphi_{\mu'}^1 \equiv \{H, \varphi_{\mu'}\}^{M_\alpha} = 0$. При этом матрица суженных скобок Пуассона

для первичных связей $\varphi_{\mu'}$ является просто нулевой: преобразовав эти связи с помощью формул (14), мы всюду получим $\gamma_{\alpha\mu'} = 0$. Вследствие матричного тождества то же будет справедливо для $\gamma_{\nu'\mu'}$, а ряды (14) на поверхности M_α сводятся к первым членам, т.е. самим связям $\varphi_{\mu'}$.

Далее необходимо обеспечить согласованность уравнений (16) и уравнений вторичных связей. Мы приходим к матрице (суженных на поверхность M_α) скобок Пуассона $\gamma_{\nu'\mu'}^1 = \{\varphi_{\nu'}, \varphi_{\mu'}^1\}^{M_\alpha}$ и, если ее ранг ненулевой, повторяем процедуру раздела 3.

В реальном проведении рекуррентной процедуры встречаются некоторые особенности. В качестве примера рассмотрим случай, когда имеется только одна первичная связь.

5. ПРИМЕР: σ -МОДЕЛЬ

Зададим σ -модель функцией Лагранжа

$$L(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{n}}, \sigma) = 2^{-1}(\dot{\mathbf{n}}^2 + \sigma(\mathbf{n}^2 - \gamma)), \quad (17)$$

где обобщенными координатами являются вектор $\mathbf{n} \in R^n$ и скаляр $\sigma \in R^1$, а постоянная $\gamma > 0$. Модифицированное лагранжево действие имеет вид

$$S[\mathbf{n}, \sigma; \mathbf{v}, \nu; \pi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(\mathbf{n}, \mathbf{v}, \sigma) - \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \pi \nu + \dot{\mathbf{n}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{n}}} + \pi \dot{\sigma} \right). \quad (18)$$

Гессиан однократно вырожден (не зависит от скорости ν); формула, определяющая импульсы $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v}$, элементарно разрешается относительно обобщенных скоростей $\mathbf{v}$, и мы приходим к гамильтонову действию

$$S[\mathbf{n}, \sigma; \mathbf{p}, \pi; \nu] = \int_{t_1}^{t_2} dt (-h - \nu \varphi_0 + \mathbf{p} \dot{\mathbf{n}} + \pi \dot{\sigma}) \quad (19)$$

с функцией Гамильтона

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{n}, \sigma) = 2^{-1}(\mathbf{p}^2 - \sigma(\mathbf{n}^2 - \gamma)) \quad (20)$$

и первичной связью $\varphi_0 = \pi$. Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \{h, f\} + \nu \{\varphi_0, f\}, \\ \varphi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Условие их совместности приводит к уравнению вторичной связи (аналогом матрицы $\gamma_{\nu\mu}$ здесь является (1×1) -“матрица” $\{\varphi_0, \varphi_0\} = 0$)

$$0 = \dot{\varphi}_0 = \{h, \varphi_0\} = \varphi_1 \equiv 2^{-1}(\mathbf{n}^2 - \gamma). \quad (22)$$

Условие совместности (22) и первого из уравнений движения (21) приводит к уравнению третичной связи

$$0 = \dot{\varphi}_1 = \{h, \varphi_1\} = \varphi_2 \equiv \mathbf{p} \mathbf{n} \quad (23)$$

(аналогом матрицы $\overset{1}{\gamma}$ будет $\{\varphi_0, \varphi_1\} = 0$). Та же картина возникает на следующем этапе “размножения” связей,

$$0 = \dot{\varphi}_2 = \{h, \varphi_2\} = \varphi_3 \equiv \mathbf{p}^2 + \sigma \mathbf{n}^2. \quad (24)$$

Наконец, последнее условие совместности

$$0 = \dot{\varphi}_3 = \{h, \varphi_3\} + \nu \{\varphi_0, \varphi_3\} = 4\sigma \varphi_2 + \nu \mathbf{n}^2 \quad (25)$$

фиксирует множитель Лагранжа ν .

В нашем примере связи второго рода идентифицируются как таковые лишь на четвертом этапе “размножения”: $\{\varphi_0, \varphi_3\} = \mathbf{n}^2$. Это связано с тем, что функция Гамильтона линейна по обобщенной координате σ , игравшей в первоначальной лагранжевой формулировке роль множителя Лагранжа, фиксирующего векторное поле $\mathbf{n}$ на сфере S^{n-1} . Гессиан был вырожден именно по соответствующей скорости ν , играющей роль множителя Лагранжа в гамильтоновой формулировке (19). Получающееся после его фиксации с помощью (25) дифференциальное уравнение движения

$$\dot{f} = \{h, f\} - 4\sigma \varphi_2 (\mathbf{n}^2)^{-1} \{\varphi_0, f\} \quad (26)$$

с учетом уравнения (23) третичной связи эквивалентно простейшему уравнению

$$\dot{f} = \{h, f\}, \quad (27)$$

так что в нашем примере никакой скобки Дирака на этом этапе вводить не нужно.

Тем не менее редукция на поверхность связей φ_0, φ_3 имеет смысл. В этой паре связей разумно модифицировать (в духе процедуры раздела 3) вторую из них; ряд (12) для нее обрывается на первом члене, $\tilde{\varphi}_3 = \sigma + (\mathbf{p}^2/\mathbf{n}^2)$. Возьмем после этого пару $\varphi_0, \tilde{\varphi}_3$ в качестве новых импульса и координаты для готовящегося канонического преобразования (конечно, они изначально связаны с π и σ). Подправка остальных канонических переменных элементарна: поскольку $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$ имеют нулевые скобки Пуассона с φ_0 , а выражения $\tilde{\mathbf{p}}$ и $\tilde{\mathbf{n}}$, обеспечивающие равенство нулю их скобок Пуассона с φ_3 — это ряды по степеням φ_0 с нулевыми членами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$, соответственно, то на поверхности $M_{0,3} = \{\varphi_0 = 0 = \varphi_3\}$ каноническими переменными останутся $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$.

Изменится на этой поверхности вид функции Гамильтона, поскольку в ней необходимо учесть уравнение связи φ_3 ,

$$h_{(0)} = h|_{M_{0,3}} = \mathbf{p}^2 (1 - \gamma (2\mathbf{n}^2)^{-1}) = \mathbf{p}^2 \frac{4\varphi_1 + \gamma}{2(2\varphi_1 + \gamma)}. \quad (28)$$

Сужением на поверхность $M_{0,3}$ первоначальных уравнений движения и их следствий — условий согласованности — оказывается система

$$\dot{f} = \{h_0, f\} = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad (29)$$

причем связи φ_1 и φ_2 – второго рода: $\{\varphi_2, \varphi_1\} = \mathbf{n}^2$. В этой ситуации уравнения (29) могут быть интерпретированы как уравнения Эйлера–Лагранжа (и их следствия в форме условий совместности) для действия

$$S[\mathbf{n}; \mathbf{p}; \lambda] = \int_{t_1}^{t_2} dt (-h_0 - \lambda \varphi_1 + \mathbf{p} \dot{\mathbf{n}}). \quad (30)$$

Эта гамильтонова форма не имеет лагранжева аналога: множитель Лагранжа λ не является динамической переменной, поскольку не входит в 1-форму Картана–Лиувилля $\mathbf{p} d\mathbf{n} = \mathbf{p} \dot{\mathbf{n}} dt$.

Строго говоря, получающиеся из действия (30) уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид не (29), а

$$\dot{f} = \{h_0, f\} + \lambda \{\varphi_1, f\} = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad (31)$$

уравнение связи $\varphi_1 = 0$ получается варьированием по λ (при этом φ_1 – первичная связь в новой формулировке), а третье из уравнений (29) эквивалентно условию совместности

$$0 = \dot{\varphi}_1 = \{h_0, \varphi_1\} = \varphi_2 \equiv \mathbf{p} \mathbf{n} (1 - \gamma (2\mathbf{n}^2)^{-1}) = \mathbf{p} \mathbf{n} \frac{4\varphi_1 + \gamma}{2(2\varphi_1 + \gamma)} \quad (32)$$

(мы сохраняем обозначение φ_2 для выражения, отличающегося ненулевым множителем от старого (23)). Наконец, последнее условие совместности

$$0 = \dot{\varphi}_2 = \{h_0, \varphi_2\} + \lambda \{\varphi_1, \varphi_2\} = \mathbf{p} \mathbf{n} \frac{2\varphi_1 + \gamma}{2\varphi_1 + 2\gamma} \quad (33)$$

фиксирует множитель Лагранжа λ . Как и в случае с ν , он оказывается пропорциональным связям, никакой модификации скобки Пуассона не происходит, и редукция на этом шаге сводится к построению канонического преобразования.

Эквивалентные паре φ_1 и φ_2 связи с единичной скобкой Пуассона, очевидно, имеют вид $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1$ и $\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 / (2\varphi_1 + \gamma)$. Возьмем их в качестве пары канонических переменных, заменяющих последние компоненты векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ СВОЙСТВА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Воспользуемся соответствием между скобками Пуассона и векторными полями, отвечающими дифференциалам функций. Введем обозначения

$$\{a, \{b\{c, \{\dots, d\}\dots\}\}\} = [abc\dots d], \quad [\underbrace{aa\dots a}_n b] = [(a)_n b], \quad [a] = a. \quad (\text{П.1})$$

Тогда $Y^\xi f = \sum_{n \geq 0} (n!)^{-1} (-\eta)^n [(\xi)_n f]$ и по индукции легко доказывается, что

$$[(\xi)_n (ab)] = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i! (n-i)!} [(\xi)_i a] [(\xi)_{n-i} b]. \quad (\text{П.2})$$

Поскольку $\sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n = \sum_{i \geq 0} \sum_{\nu \geq 0}$, где $\nu = n - i$, то из (П.2) следует, что

$$Y^{(\xi)}(ab) = \sum_{n \geq 0} (n!)^{-1} (-\eta)^n \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i! (n-i)!} [(\xi)_i a] [(\xi)_{n-i} b] = Y^{(\xi)} a \cdot Y^\xi b. \quad (\text{П.3})$$

Далее по индукции будем иметь

$$[(\xi)_n ab] = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i! (n-i)!} \{ [(\xi)_i a], [(\xi)_{n-i} b] \}. \quad (\text{П.4})$$

С помощью формулы (П.4) получим

$$\begin{aligned} Y^{(\xi)} \{a, b\} &= \sum_{n \geq 0} (n!)^{-1} (-\eta)^n \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i! (n-i)!} \{ [(\xi)_i a], [(\xi)_{n-i} b] \} = \\ &= \{Y^{(\xi)} a, Y^{(\xi)} b\} - \sum_{i \geq 0, \nu \geq 0} (i!)^{-1} ((\nu-1)!)^{-1} (-\eta)^{i+\nu-1} [\eta(\xi)_i a] \cdot [(\xi)_\nu b] - \\ &\quad - \sum_{i \geq 1, \nu \geq 0} (\nu!)^{-1} ((i-1)!)^{-1} (-\eta)^{i+\nu-1} [\eta(\xi)_i b] \cdot [(\xi)_\nu a] = \\ &= \{Y^{(\xi)} a, Y^{(\xi)} b\} - Y^{(\xi)} \{\xi, a\} \cdot Y^{(\xi)} \{\eta, b\} - Y^{(\xi)} \{\eta, a\} \cdot Y^{(\xi)} \{\xi, b\}, \end{aligned}$$

где учтено, что

$$\xi \eta \{ab\} = \{\xi a, \eta b\} + \xi b \{\eta, a\} - \eta a \{\xi, b\} - ab.$$

Окончательно находим

$$\{Y^{(\xi)} a, Y^{(\xi)} b\} = Y^{(\xi)} (\{a, b\} - \{a, \xi\} \{\eta, b\} + \{a, \eta\} \{\xi, b\}) = Y^{(\xi)} \{a, b\}_{\xi \eta}^D. \quad (\text{П.5})$$

Поскольку псевдодифференциальные операторы, относящиеся к связям, коммутируют, формулы (П.3) и (П.5) остаются в силе после применения к ним любого числа операторов и в любом их сочетании. Наконец, полезно указать формулу, обратную к (13),

$$\left\{ \xi, \int_0^\eta d\eta Y^{(\xi)} a \right\} = a. \quad (\text{П.6})$$

Список литературы

- [1] В. П. Павлов. ТМФ. 1992. Т. 92. № 3. С. 451–456.
- [2] В. П. Павлов, А. О. Старинец. ТМФ. 1995. Т. 105. № 3. С. 429–437.
- [3] В. П. Павлов. Тр. МИАН. 2000. Т. 228. С. 145–154.
- [4] Д. М. Гитман, И. В. Тютин. Каноническое квантование систем со связями. М.: Наука, 1986.
- [5] Л. Д. Фаддеев. ТМФ. 1969. Т. 1. № 1. С. 3–18.
- [6] Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 4.III.2002 г.