Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Славнов, Квантовая механика как полная физическая теория, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 3, 434–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:25:53

© 2002 г.

Д. А. Славнов*

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА КАК ПОЛНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Показано, что принципы “полной физической теории” и выводы стандартной квантовой механики не находятся в таком антагонистическом противоречии, как это принято считать. В рамках алгебраического подхода сформулированы аксиомы, которые позволяют построить обновленную математическую схему квантовой механики. Эта схема включает в себя стандартный математический аппарат квантовой механики. Одновременно с этим в ней имеется математический объект, который адекватно описывает индивидуальный эксперимент. Приведен пример использования предложенной схемы.

Ключевые слова: квантовая механика, физическая реальность, алгебраический подход.

1. ВВЕДЕНИЕ

В знаменитой работе Эйнштейна, Подольского, Розена [1] были сформулированы принципы, которым, по мнению авторов, должна удовлетворять полная физическая теория: а) “каждый элемент физической реальности должен иметь отражение в физической теории”; б) “если мы можем, без какого бы то ни было возмущения системы, предсказать с достоверностью (т.е. с вероятностью, равной единице) значение некоторой физической величины, то существует элемент физической реальности, соответствующий этой физической величине”.

Стандартная квантовая механика (теория, восходящая к Бору, Гейзенбергу, Дираку, фон Нейману) не восприняла этот тезис. Единичный эксперимент не имеет адекватной копии в математическом аппарате стандартной квантовой механики. Более того, прочно утвердилось мнение, что такой копии быть не может.

В предлагаемой работе делается попытка сформулировать основные положения математической схемы квантовой механики, которые удовлетворяют двум, казалось бы, взаимно исключающим требованиям. Во-первых, в рамках этой схемы можно воспроизвести стандартный математический аппарат квантовой механики. Во-вторых, в этой схеме имеется математический объект, который адекватно описывает индивидуальный эксперимент.

Большинство из этих положений сформулированы в работе [2]. Здесь они будут уточнены и дополнены. В частности, существенным образом уточнена роль измерительного

*Московский государственный университет, Москва, Россия

прибора. В предлагаемой работе, в отличие от работы [2], большее внимание будет уделено математическим аспектам теории. Более подробное феноменологическое обоснование аксиом и связь предлагаемого подхода с другими вариантами теории можно найти в [2].

2. НАБЛЮДАЕМЫЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

Математический аппарат квантовой механики предлагается строить, взяв за основу алгебраический подход к квантовой теории [3], в котором наблюдаемым величинам ставятся в соответствие элементы некоторой алгебры. Основные положения алгебраического подхода формулируются проще, если помимо непосредственно наблюдаемых величин в рассмотрение включаются их комплексные комбинации. Эти комбинации в дальнейшем будут называться динамическими величинами.

В качестве *первого постулата* примем следующее утверждение.

Динамическим величинам соответствуют элементы инволютивной, ассоциативной и (в общем случае) некоммутативной алгебры $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей следующим условиям: а) для каждого элемента $\hat{R} \in \mathfrak{A}$ найдется эрмитов элемент $\hat{A}$ ($\hat{A}^ = \hat{A}$) такой, что $\hat{R}^* \hat{R} = \hat{A}^2$; б) если $\hat{R}^* \hat{R} = 0$, то $\hat{R} = 0$.*

Предполагается, что в алгебре имеется единичный элемент $\hat{I}$ и что наблюдаемым величинам соответствуют эрмитовы элементы алгебры $\mathfrak{A}$. Их множество обозначим $\mathfrak{A}_+$.

Сформулируем *второй постулат*.

Совместимым (одновременно измеримым) наблюдаемым соответствуют взаимно коммутирующие элементы множества $\mathfrak{A}_+$.

Характерной особенностью совместимых наблюдаемых является то, что для них возможна система измерительных приборов, которая позволяет многократно измерять эти наблюдаемые в произвольной последовательности. При этом результаты повторного измерения наблюдаемых не изменяются. Соответствующие измерения назовем воспроизводимыми.

Обозначим через $\mathfrak{Q}_\xi$ ($\mathfrak{Q} \equiv \{\hat{Q}\} \in \mathfrak{A}_+$) максимальную действительную коммутативную подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$. Это подалгебра совместимых наблюдаемых. Индекс ξ ($\xi \in \Xi$) отличает одну такую подалгебру от другой. Если алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна (алгебра классических динамических величин), то множество Ξ состоит из одного элемента. Если алгебра $\mathfrak{A}$ некоммутативна (алгебра квантовых динамических величин), то множество Ξ имеет мощность континуума.

Эрмитовы элементы алгебры $\mathfrak{A}$ являются латентной (скрытой) формой наблюдаемых величин. Явная форма — это некоторое число, оно проявляется в *индивидуальном* наблюдении. Будем считать, что существует некоторая физическая реальность, которая определяет результат такого индивидуального наблюдения. Эту физическую реальность назовем физическим состоянием квантового объекта.

Далее нам потребуется следующее определение [4]. Пусть $\mathfrak{B}$ — действительная (комплексная) коммутативная алгебра и $\tilde{\varphi}$ — линейный функционал на $\mathfrak{B}$. Если

$$\tilde{\varphi}(\hat{B}_1 \hat{B}_2) = \tilde{\varphi}(\hat{B}_1) \tilde{\varphi}(\hat{B}_2) \quad \forall \hat{B}_1 \in \mathfrak{B}, \quad \hat{B}_2 \in \mathfrak{B},$$

то функционал $\tilde{\varphi}$ называется действительным (комплексным) гомоморфизмом на алгебре $\mathfrak{B}$.

Теперь сформулируем *третий постулат*.

Физическое состояние квантового объекта, фигурирующего в индивидуальном наблюдении, описывается (в общем случае многозначным) функционалом $\varphi(\hat{A})$ ($\hat{A} \in \mathfrak{A}_+$), сужение $\varphi_\xi(\hat{A})$ которого на каждую подалгебру $\mathfrak{Q}_\xi$ однозначно и является действительным гомоморфизмом ($\varphi_\xi(\hat{A}) = A$ – действительное число).

Многозначность функционала φ обуславливается тем фактом, что результат наблюдения может зависеть не только от наблюдаемого квантового объекта, но и от особенностей прибора, используемого для наблюдения. Типичный измерительный прибор состоит из анализатора и детектора. Анализатор – это устройство с одним входом и несколькими выходами. Рассмотрим для примера прибор, измеряющий наблюдаемую $\hat{A}$. Для простоты будем считать, что спектр этой наблюдаемой дискретен. Тогда каждый выход анализатора должен соответствовать определенной точке спектра. Детектор регистрирует, через какой выход квантовый объект покинул анализатор. Соответствующая точка спектра принимается за значение наблюдаемой $\hat{A}$, зарегистрированное измерительным прибором.

Вообще говоря, в одном эксперименте может быть зарегистрировано значение не одной наблюдаемой $\hat{A}_i$, а целой совокупности совместимых наблюдаемых. Все эти наблюдаемые должны принадлежать какой-то одной подалгебре $\mathfrak{Q}_\xi$. В этом случае каждый выход анализатора должен соответствовать совокупности точек спектров наблюдаемых $\hat{A}_i$, по одной точке для каждой независимой наблюдаемой. Конечно, анализатор должен иметь соответствующую конструкцию. Устроенный таким образом анализатор (и весь измерительный прибор) будем называть согласованным с подалгеброй $\mathfrak{Q}_\xi$.

Совокупность наблюдаемых $\hat{A}_i$ не обязательно должна регистрироваться одним прибором. Для этой цели может использоваться группа измерительных приборов (один сложный прибор). В этом случае вся группа (каждый ее элемент) должна быть согласована с подалгеброй $\mathfrak{Q}_\xi$. Будем считать, что сужение $\varphi_\xi(\hat{A})$ функционала φ , соответствующего определенному физическому состоянию, описывает значение наблюдаемой $\hat{A}$, которое регистрируется в этом физическом состоянии измерительным прибором, согласованным с подалгеброй $\mathfrak{Q}_\xi$.

Будем считать, что согласованность прибора с той или иной алгеброй определяется его классическими характеристиками, т.е. конструкцией, положением в пространстве и т.п. Если прибор согласован с подалгеброй $\mathfrak{Q}_\xi$, то будем говорить, что он принадлежит к типу $\mathfrak{Q}_\xi$.

Одна наблюдаемая может принадлежать двум (и более) разным подалгебрам: $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi \cap \mathfrak{Q}_{\xi'}$. Если функционал φ многозначен в точке $\hat{A}$, то возможно, что $\varphi_\xi(\hat{A}) \neq \varphi_{\xi'}(\hat{A})$. Физически это означает, что при использовании различных измерительных приборов мы можем для одной и той же наблюдаемой в одном и том же физическом состоянии зарегистрировать разные значения. Таким образом, функционал φ не описывает значение наблюдаемой $\hat{A}$ в определенном физическом состоянии. Он описывает реакцию определенного типа измерительного прибора на наблюдаемую $\hat{A}$. Соответственно физической реальностью является не значение наблюдаемой $\hat{A}$ в рассматриваемом физическом состоянии, а реакция измерительного прибора на это состояние.

Если функционал φ однозначен в точке $\hat{A}$, то будем говорить, что соответствующее физическое состояние φ устойчиво на наблюдаемой $\hat{A}$. В этом случае можно говорить, что наблюдаемая $\hat{A}$ имеет в физическом состоянии φ определенное значение и это зна-

чение является физической реальностью.

Можно показать [4], что функционалы, фигурирующие в третьем постулате, обладают следующими свойствами:

$$\varphi_\xi(0) = 0; \quad (1a)$$

$$\varphi_\xi(\hat{I}) = 1; \quad (1б)$$

$$\varphi_\xi(\hat{A}^2) \geq 0; \quad (1в)$$

$$\text{если } \lambda = \varphi_\xi(\hat{A}), \text{ то } \lambda \in \sigma(\hat{A}); \quad (1г)$$

$$\text{если } \lambda \in \sigma(\hat{A}), \text{ то } \lambda = \varphi_\xi(\hat{A}) \text{ для некоторого } \varphi_\xi(\hat{A}). \quad (1д)$$

Здесь $\sigma(\hat{A})$ – спектр элемента $\hat{A}$ в алгебре $\mathfrak{A}$. В стандартной квантовой механике соответствующие свойства индивидуальных измерений постулируются, здесь они являются следствиями третьего постулата.

Многозначность функционала φ позволяет ввести его непротиворечивым образом. В этом можно убедиться прямым построением. Ясно, что достаточно построить сужение φ_ξ функционала φ на каждую подалгебру $\mathfrak{Q}_\xi$.

Опишем несколько способов построения функционала φ . Первый способ заключается в следующем. В каждой подалгебре $\mathfrak{Q}_\xi$ произвольным образом выбираем систему $G(\mathfrak{Q}_\xi)$ независимых образующих. Далее требуем, чтобы φ_ξ было бы некоторым отображением $G(\mathfrak{Q}_\xi)$ в набор S_ξ действительных чисел (допустимые точки спектров для соответствующих элементов множества $G(\mathfrak{Q}_\xi)$). На остальных элементах подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$ функционал φ_ξ строим, используя свойства линейности и мультипликативности.

Ясно, что если каждый функционал φ_ξ строить независимо от других, то такая процедура всегда возможна. С другой стороны, при таком построении функционал φ будет в сильной мере неоднозначным.

Можно попытаться построить однозначный функционал φ . Для этого выберем некоторую подалгебру $\mathfrak{Q}_1$ (типа $\mathfrak{Q}$). Пусть $G(\mathfrak{Q}_1)$ – набор образующих алгебры $\mathfrak{Q}_1$. Сужение φ_1 функционала φ на подалгебру $\mathfrak{Q}_1$ определим, потребовав, чтобы φ_1 было некоторым отображением $G(\mathfrak{Q}_1)$ в набор S_1 действительных чисел (точек спектров для соответствующих элементов подалгебры $\mathfrak{Q}_1$).

Далее выбираем другую подалгебру $\mathfrak{Q}_2$. При $\mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{Q}_2 \equiv \mathfrak{Q}_{12} \neq \emptyset$ сначала строим набор образующих G_{12} подалгебры $\mathfrak{Q}_{12}$, затем дополняем его набором G_{21} до полного набора образующих алгебры $\mathfrak{Q}_2$. Сужение φ_2 строим следующим образом. Если $\hat{A} \in G_{12}$, то $\varphi_2(\hat{A}) = \varphi_1(\hat{A})$. Если $\hat{A} \in G_{21}$, то функционал φ_2 определяем так, чтобы он был отображением G_{21} в некоторый допустимый набор точек спектров соответствующих элементов алгебры $\mathfrak{Q}_2$.

Эту же схему будем использовать для построения сужений функционала φ на другие подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$. Однако может оказаться, что на некотором этапе эта схема окажется внутренне противоречивой. Дело в том, что подалгебра $\mathfrak{Q}_\xi$ может иметь непустые пересечения с другими подалгебрами $\mathfrak{Q}_{\xi 1}, \mathfrak{Q}_{\xi 2}, \dots, \mathfrak{Q}_{\xi n}$, для которых сужения функционала φ уже зафиксированы. Соответствующие отображения могут оказаться недопустимыми для элементов подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$.

В этом случае поступим следующим образом. Пусть k – максимальное число ($1 \leq k \leq n$) такое, что для всех i ($1 \leq i \leq k$) определения $\varphi_\xi(\hat{A}) = \varphi_{\xi i}(\hat{A})$ являются допустимыми. С помощью этих определений зададим функционал $\varphi_\xi(\hat{A})$ на подалгебре

$\Omega^k = (\Omega_{\xi 1} \cup \dots \cup \Omega_{\xi k}) \cap \Omega_\xi$. Далее берем некоторый набор $G^{(k)}$ образующих подалгебры Ω^k и дополняем его набором G_k до полного набора образующих алгебры Ω_ξ . На образующих G_k функционал $\varphi_\xi(\hat{A})$ определяем так, чтобы он реализовывал отображение G_k во множество допустимых точек спектров соответствующих элементов подалгебры Ω_ξ . На этом этапе возникает многозначность функционала φ , т.е. в этом случае однозначный функционал построить не удастся. Вместе с тем возникающая неоднозначность будет в некотором смысле минимальной. Таким образом, в общем случае избежать неоднозначности функционала φ нельзя. Кочен и Шпекер [5] привели конкретный пример такого случая.

Однако всегда можно построить функционал φ , однозначный на всех наблюдаемых, которые принадлежат любой наперед заданной подалгебре Ω_ξ . Для этого достаточно подалгебре Ω_ξ приписать первый номер (положить $\xi = 1$) и сужение φ_1 функционала φ на подалгебру Ω_1 определить описанным выше способом. Далее следует перебрать все подалгебры Ω_i (типа Ω_ξ), которые имеют непустые пересечения с подалгеброй Ω_1 . Для построения сужений φ_i функционала φ на каждую из подалгебр Ω_i достаточно воспользоваться рецептом, который был использован в предыдущем варианте для построения сужения φ_2 . По построению такой функционал φ будет однозначным на всех элементах, принадлежащих Ω_1 . Разные подалгебры Ω_i могут иметь общие элементы, которые не принадлежат подалгебре Ω_1 . На них функционал φ может оказаться многозначным.

В качестве *четвертого постулата* примем следующее утверждение.

Равенство $\varphi(\hat{A}_1) = \varphi(\hat{A}_2)$ выполняется для всех φ тогда и только тогда, когда $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

То есть функционал φ разделяет две любые различные наблюдаемые.

3. КВАНТОВЫЙ АНСАМБЛЬ

Функционал φ отображает множество $\Omega_\xi = \{\hat{Q}\}_\xi$ в множество действительных чисел,

$$\{\hat{Q}\}_\xi \xrightarrow{\varphi} \{Q = \varphi(\hat{Q})\}_\xi.$$

Для разных функционалов φ_i, φ_j множества $\{\varphi_i(\hat{Q})\}_\xi, \{\varphi_j(\hat{Q})\}_\xi$ могут различаться, а могут и совпадать. Если для всех $\hat{Q} \in \{\hat{Q}\}$ справедливо равенство $\varphi_i(\hat{Q}) = \varphi_j(\hat{Q}) = Q$, то функционалы φ_i и φ_j назовем $\{Q\}$ -эквивалентными. Пусть $\{\varphi\}_Q$ — множество всех физических состояний, которым соответствуют $\{Q\}$ -эквивалентные функционалы, устойчивые на наблюдаемых из подалгебры $\{\hat{Q}\}_\xi$. Множество соответствующих физических состояний назовем квантовым (чистым) состоянием и обозначим Ψ_Q . Множество физических систем, находящихся в этих физических состояниях, назовем квантовым Ψ_Q -ансамблем.

Строго говоря, приведенное определение квантового состояния справедливо только для физической системы, в которой нет одинаковых частиц. Для описания одинаковых частиц нужно несколько обобщить определение квантового состояния [2].

Будем рассматривать квантовый Ψ_Q -ансамбль как генеральную совокупность (в смысле теории вероятностей), а каждый эксперимент по измерению наблюдаемой $\hat{A}$ как испытание. В качестве события $\hat{A}$ будем рассматривать эксперимент, в котором измеренное значение наблюдаемой $\hat{A}$ не больше $\hat{A}$, т.е. $\varphi(\hat{A}) = A \leq \hat{A}$. Это событие не

является безусловным. В силу второго постулата одно испытание не может быть событием для двух некоммутирующих наблюдаемых. Вероятность события $\tilde{A}$ определяется структурой квантового ансамбля и этим условием. Пусть эта вероятность равна $P(\tilde{A})$.

Множество физических состояний, которые фигурируют в счетной выборке из взаимно независимых случайных испытаний по измерению наблюдаемой $\hat{A}$, обозначим $\{\varphi\}_Q^{\hat{A}}$ ($\{\varphi\}_Q^{\hat{A}} \subset \{\varphi\}_Q$). Заметим, что если $\hat{B}$ – наблюдаемая, не коммутирующая с $\hat{A}$, то вероятность пересечения множеств $\{\varphi\}_Q^{\hat{A}}$ и $\{\varphi\}_Q^{\hat{B}}$ равна нулю. Действительно, с одной стороны, в одном испытании нельзя измерить наблюдаемые $\hat{A}$ и $\hat{B}$. С другой стороны, множество $\{\varphi\}_Q$ имеет мощность континуума. Поэтому вероятность того, что в двух случайных счетных выборках одно состояние из $\{\varphi\}_Q$ повторится, равна нулю. Таким образом, на описанных выборках дополнительное условие выполняется автоматически с вероятностью единица.

По определению вероятность появления события $\tilde{A}$ в каждом из этих испытаний равна $P(\tilde{A})$. Она определяет вероятностную меру $\mu(\varphi)$ ($\varphi(\hat{A}) \leq \tilde{A}$) на любой такой выборке. В свою очередь, мера $\mu(\varphi)$ определяет распределение значений $A_i = \varphi_i(\hat{A})$ наблюдаемой $\hat{A}$ и математическое ожидание $\langle \hat{A} \rangle$ в этой выборке:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{\{\varphi\}_Q^{\hat{A}}} d\mu(\varphi) \varphi(\hat{A}).$$

Пусть при $1 \leq i \leq n$ функционалы $\varphi_i \in \{\varphi\}_Q^{\hat{A}}$, тогда по теореме Хинчина (закон больших чисел) (см., например, [6]) случайная величина $\bar{A}_n = (A_1 + \dots + A_n)/n$ сходится по вероятности к $\langle \hat{A} \rangle$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{n} (\varphi_1(\hat{A}) + \dots + \varphi_n(\hat{A})) \right\} = \langle \hat{A} \rangle \equiv \Psi_Q(\hat{A}). \quad (2)$$

Формула (2) определяет функционал (квантовое среднее) на множестве $\mathfrak{A}_+$. Вся совокупность квантовых экспериментов однозначно указывает на то, что мы должны принять следующий *постулат линейности*.

Функционал Ψ_Q линеен на множестве $\mathfrak{A}_+$.

Это значит, что

$$\Psi_Q(\hat{A} + \hat{B}) = \Psi_Q(\hat{A}) + \Psi_Q(\hat{B})$$

и в том случае, когда $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$.

Квантовые эксперименты свидетельствуют в пользу справедливости еще одного постулата. Дело в том, что для экспериментального определения вероятности $P(\tilde{A})$ мы должны проводить случайные испытания. Однако на практике эти испытания часто сопровождаются некоторыми условиями, поскольку для экспериментального нахождения квантового среднего наблюдаемой используется не случайный набор приборов, способных измерять эту наблюдаемую, а какой-то один тип такого прибора. При этом в разных сериях экспериментов могут использоваться приборы разных типов. Опыт показывает, что во всех этих случаях вероятность $P(\tilde{A})$ оказывается одной и той же. Таким образом, справедлив *постулат репрезентативности*.

Вероятность $P(\tilde{A})$ обнаружить событие $\tilde{A}$ для системы, находящейся в любом квантовом состоянии Ψ_Q , не зависит от типа измерительного прибора, который при этом используется.

Конечно, здесь имеется в виду идеальный измерительный прибор. Любой реальный прибор вносит систематическую ошибку.

Обсудим теперь вопрос, каким образом может быть реализовано требование постулата репрезентативности в рамках предлагаемого подхода. Пусть функционал φ^μ многозначен на наблюдаемой $\hat{A}$. Это связано с тем, что результат наблюдения, проводимого над некоторым квантовым объектом, может зависеть не только от внутренних свойств этого объекта, но и от типа прибора, предназначенного для исследования наблюдаемой $\hat{A}$. Пронумеруем каким-то фиксированным образом разные типы приборов. Пусть $\{D_1(\hat{A}), D_2(\hat{A}), \dots, D_n(\hat{A})\}$ — множество разных типов приборов. Значения многозначного функционала φ^μ на элементах $\hat{A}$ пронумеруем в соответствии с нумерацией измерительных приборов,

$$\varphi^\mu(\hat{A}) = \{A_{\mu 1}, \dots, A_{\mu n}\}, \quad (3)$$

где $A_{\mu i}$ — показание прибора $D_i(\hat{A})$ в физическом состоянии φ^μ . Каждый конкретный прибор $D_i(\hat{A})$ имеет вполне определенные физические характеристики и поэтому согласован с определенной подалгеброй $\mathfrak{Q}_i$ ($\hat{A} \in \mathfrak{Q}_i$). В этом смысле он “знает”, какое значение функционала выбрать. Для конкретного физического состояния некоторые (или все) значения $A_{\mu i}$ могут совпадать.

Рассмотрим другой функционал φ^ν , который на наблюдаемой $\hat{A}$ имеет значения

$$\varphi^\nu = \{A_{\nu 1}, \dots, A_{\nu n}\}, \quad (4)$$

где $\nu 1, \dots, \nu n$ — некоторая перестановка индексов $\mu 1, \dots, \mu n$, $A_{\nu i}$ обозначает показание прибора $D_i(\hat{A})$ в физическом состоянии φ^ν . Пусть на других наблюдаемых функционалы φ^μ и φ^ν совпадают.

Если физическое состояние φ^μ принадлежит квантовому состоянию $\Psi_Q = \{\varphi\}_Q$, то физическое состояние φ^ν также принадлежит Ψ_Q . Действительно, если $\hat{A} \in \{\hat{Q}\}$, то функционалы φ^μ и φ^ν однозначны на $\hat{A}$ и поэтому совпадают. Если $\hat{A} \notin \{\hat{Q}\}$, то на $\hat{Q} \in \{\hat{Q}\}$ функционалы φ^μ и φ^ν совпадают по построению. Все рассуждения остаются в силе, если мы рассмотрим функционалы, получающиеся с помощью любой другой перестановки индексов $\mu 1, \dots, \mu n$.

Убедимся, что для выполнения постулата репрезентативности достаточно потребовать, чтобы относительные вероятности попадания на состояния φ^μ и φ^ν были одинаковы. Действительно, пусть для экспериментального нахождения среднего значения наблюдаемой $\hat{A}$ в квантовом состоянии Ψ_Q мы используем прибор $D_i(\hat{A})$. Обозначим результат такого эксперимента $\Psi_Q^i(\hat{A})$. Теоретически величина $\Psi_Q^i(\hat{A})$ строится следующим образом. Берется некоторое физическое состояние φ^μ . В $\Psi_Q^i(\hat{A})$ это состояние вносит вклад $A_{\mu i}$ с весом w_μ (вероятность попадания на состояние φ^μ). Далее берем состояние φ^ν . Оно вносит вклад $A_{\nu i}$ с весом $w_\nu = w_\mu$. Таким же образом надо учесть все состояния, которые получаются другими перестановками аргументов в формуле (3). Далее по той же схеме следует учесть физические состояния, которые не связаны с φ^μ перестановкой аргументов в формуле (3).

Пусть теперь для нахождения среднего мы используем прибор $D_j(\hat{A})$. Результат такого эксперимента обозначим $\Psi_Q^j(\hat{A})$. Для теоретического расчета $\Psi_Q^j(\hat{A})$ будем использовать описанную выше схему. Опять начнем с состояний $\varphi^\mu, \varphi^\nu, \dots$. В результате мы получим множество значений $A_{\mu j}, A_{\nu j}, \dots$, которые дадут вклад в $\Psi_Q^j(\hat{A})$ с весом w_μ . Но множества $(A_{\mu i}, A_{\nu i}, \dots)$ и $(A_{\mu j}, A_{\nu j}, \dots)$ отличаются только перестановкой элементов. Поэтому суммарные вклады физических состояний $\varphi^\mu, \varphi^\nu, \dots$ в $\Psi_Q^i(\hat{A})$ и $\Psi_Q^j(\hat{A})$ будут одинаковыми. Аналогично рассматриваем вклады от физических состояний, не связанных перестановкой аргументов с φ^μ . В результате получим, что $\Psi_Q^i(\hat{A}) = \Psi_Q^j(\hat{A})$.

Теперь для реализации постулата репрезентативности достаточно убедиться, что для каждого физического состояния φ^μ найдется соответствующее состояние типа φ^ν . Очевидно, это действительно будет так, если в конструктивные схемы построения множества физических состояний, описанных ранее, мы внесем один дополнительный пункт. Вместе с каждым построенным по предложенной схеме многозначным функционалом φ^μ в множество функционалов следует внести все функционалы, значения которых получаются всевозможными перестановками аргументов в формуле (4).

Следовательно, хотя приборы $D_i(\hat{A})$ и $D_j(\hat{A})$ в индивидуальных наблюдениях могут давать разные результаты в одном физическом состоянии, для средних значений наблюдаемой $\hat{A}$ они будут давать один и тот же результат. Таким образом, для определения квантовых средних значений наблюдаемых величин предлагаемая модель дает те же результаты, что и стандартная квантовая механика.

Любой элемент $\hat{R}$ алгебры $\mathfrak{A}$ однозначно представляется в виде $\hat{R} = \hat{A} + i\hat{B}$, где $\hat{A}, \hat{B} \in \mathfrak{A}_+$. Поэтому функционал Ψ_Q можно однозначно расширить до линейного функционала на алгебре $\mathfrak{A}$: $\Psi_Q(\hat{R}) = \Psi_Q(\hat{A}) + i\Psi_Q(\hat{B})$.

Пусть $\hat{R}^* \hat{R} = \hat{A}^2 \in \{\hat{Q}\}$ ($\hat{A} \in \mathfrak{A}_+$). Если $\varphi \in \{\varphi\}_Q$, то $\varphi(\hat{R}^* \hat{R}) = A^2$. Поэтому

$$\Psi_Q(\hat{R}^* \hat{R}) = A^2 = \varphi(\hat{A}^2) \big|_{\varphi \in \{\varphi\}_Q}.$$

Согласно неравенству (1в) имеем $A^2 \geq 0$. Кроме того, благодаря условию (1а) и четвертому постулату $\sup \varphi(\hat{R}^* \hat{R}) > 0$, если $\hat{R} \neq 0$.

Определим норму элемента $\hat{R}$ равенством

$$\|\hat{R}\|^2 = \sup_{\varphi} \varphi(\hat{R}^* \hat{R}) = \sup_Q \Psi_Q(\hat{R}^* \hat{R}). \quad (5)$$

Так как Ψ_Q – положительный линейный функционал, то для $\|\hat{R}\|$ действительно выполняются все аксиомы нормы (см. [2], [3]). Поскольку $\varphi([\hat{A}^2]^2) = [\varphi(\hat{A}^2)]^2$, то $\|\hat{R}^* \hat{R}\| = \|\hat{R}\|^2$. Поэтому алгебра $\mathfrak{A}$ является C^* -алгеброй. Таким образом, необходимым условием для непротиворечивости постулата линейности является следующее требование: алгебра $\mathfrak{A}$ может быть оснащена структурой C^* -алгебры.

Это требование может быть сформулировано в чисто алгебраических терминах, так как для C^* -алгебры справедливо соотношение [7]

$$\rho(\hat{R}) = \|\hat{R}\| = \rho^{1/2}(\hat{R}^* \hat{R}). \quad (6)$$

Здесь $\rho(\hat{R})$ – спектральный радиус элемента $\hat{R}$: $\rho(\hat{R}) = \sup_{\lambda} |\lambda_R|$, где $\lambda_R \in \sigma(\hat{R})$.

С помощью формулы (1д) соотношение (6) можно переписать в виде

$$\|\widehat{R}\| = \left[\sup_{\varphi} \varphi(\widehat{R}^* \widehat{R}) \right]^{1/2},$$

что согласуется с формулой (5).

Таким образом, спектральный радиус (чисто алгебраическое понятие) каждого элемента алгебры $\mathfrak{A}$ должен удовлетворять, во-первых, аксиомам нормы, а во-вторых, условию $\rho^2(\widehat{R}) = \rho(\widehat{R}^* \widehat{R})$.

В свете сказанного выше целесообразно дать новую формулировку *первому постулату*.

Динамическим величинам соответствуют элементы алгебры $\mathfrak{A}$, которая имеет структуру C^ -алгебры.*

Причина, по которой мы с самого начала не приняли такую формулировку первого постулата, заключается в следующем. То, что наблюдаемые обладают алгебраическими свойствами, а квантовые средние – свойством линейности, непосредственно вытекает из эксперимента. В отличие от этого, математические соотношения, которые включаются в определение C^* -алгебры, не имеют такой непосредственной связи с экспериментом.

Постулируя принадлежность наблюдаемых нормированной алгебре, необходимо считать наблюдаемые ограниченными. В любом эксперименте мы всегда имеем дело с ограниченными значениями наблюдаемых. Поэтому с точки зрения эксперимента нормируемость алгебры не является ограничением. Однако в квантовой теории сплошь и рядом приходится иметь дело с неограниченными операторами, которые, конечно, не являются элементами нормированной алгебры. В алгебраическом подходе принято рассматривать “неограниченные наблюдаемые” как элементы, присоединенные к алгебре ограниченных динамических величин, т.е. считать, что неограниченные наблюдаемые допускают спектральное представление, в котором спектральные проекторы являются элементами нормированной алгебры. Возникающие при этом проблемы являются общими для всего алгебраического подхода в квантовой теории. Мы их касаться не будем.

4. ЭВОЛЮЦИЯ ВО ВРЕМЕНИ И УСЛОВИЕ ЭРГОДИЧНОСТИ

В стандартной квантовой механике эволюция во времени задается уравнением Гейзенберга

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = i[\hat{H}, \hat{A}(t)], \quad \hat{A}(0) = \hat{A}, \quad (7)$$

где $\hat{A}(t)$ и гамильтониан $\hat{H}$ – операторы в некотором гильбертовом пространстве. Однако для того чтобы уравнение (7) сохраняло физический смысл, достаточно считать $\hat{A}(t)$ и $\hat{H}$ элементами некоторой алгебры (в частности, алгебры $\mathfrak{A}$) или элементами, присоединенными к алгебре.

В нашем случае уравнение эволюции можно переписать в терминах физических состояний. Поэтому примем *пятый постулат*.

Физическое состояние квантовой системы эволюционирует во времени следующим образом:

$$\varphi(\hat{A}) \rightarrow \varphi_t(\hat{A}) \equiv \varphi(\hat{A}(t)), \quad (8)$$

где $\hat{A}(t)$ определяется уравнением (7).

Уравнение (8) вполне однозначно описывает временную эволюцию физического состояния. Другое дело, что с помощью наблюдений мы можем определить начальное значение $\varphi(\hat{A})$ функционала только с точностью до его принадлежности некоторому квантовому состоянию $\{\varphi\}_Q$ [2]. Поэтому большинство наших предсказаний о временной эволюции квантового объекта носит вероятностный характер. Кроме того, уравнения (7) и (8) справедливы только для систем, которые не подвергаются воздействию первого рода (термин фон Неймана [8]), т.е. не взаимодействуют с классическим измерительным прибором.

Вернемся к постулату линейности. С точки зрения эксперимента этот постулат является вполне обоснованным. Однако не вполне ясно, можно ли реализовать этот постулат в рамках рассматриваемой нами математической схемы. Оказывается, что этот постулат можно связать с временной эволюцией квантовой системы. Чтобы выполнить эту связь, придется наложить ограничения на гамильтониан $\hat{H}$.

Примем *шестой постулат*.

Гамильтониан $\hat{H}$ является эрмитовым спектральным (возможно, присоединенным) элементом алгебры $\mathfrak{A}$. Спектр $\hat{H}$ содержит по крайней мере одно дискретное невырожденное значение E_0 .

Это значит, что гамильтониан $\hat{H}$ имеет интегральное представление вида

$$\hat{H} = \int d\hat{p}_E E,$$

где $\hat{p}_E$ — проекторы, обладающие свойствами

$$\begin{aligned} \hat{p}_E \in \mathfrak{A}, \quad \hat{p}_E^* = \hat{p}_E, \quad \hat{p}_E^2 = \hat{p}_E, \quad \hat{p}_E \hat{p}_{\tilde{E}} = \hat{p}_E \quad \text{при} \quad E \leq \tilde{E}, \\ \lim_{E \rightarrow -\infty} \hat{p}_E = 0, \quad \lim_{E \rightarrow \infty} \hat{p}_E = \hat{I}. \end{aligned}$$

Несколько условно $d\hat{p}_E$ можно представить в виде

$$d\hat{p}_E = \sum_n \hat{p}_n \delta(E - E_n) dE + \hat{\omega}(E) dE. \quad (9)$$

Здесь $\hat{p}_n \hat{p}_m = \hat{p}_m \hat{p}_n = 0$ при $m \neq n$, $\hat{p}_n \hat{\omega} = \hat{\omega} \hat{p}_n = 0$, $\|\hat{\omega}\| < \infty$. В соотношении (9) в сумме по n обязательно должен присутствовать по крайней мере один член ($n = 0$) с невырожденным значением E_0 .

Кроме этого последнего ограничения, другие требования всегда подразумеваются при рассмотрении любой квантово-механической модели. Требование наличия дискретной точки спектра, по всей видимости, также не является слишком ограничительным. Например, одночастичная квантовая система может иметь чисто непрерывный энергетический спектр. Однако ее можно считать одночастичным состоянием расширенной системы, которая помимо одночастичного состояния может находиться в вакуумном состоянии. Энергетический спектр расширенной системы уже будет обладать дискретной невырожденной точкой спектра.

Величина E_0 не обязательно должна быть нижней гранью спектра. Под невырожденностью E_0 подразумевается, что в разложении (9) проектор $\hat{p}_0$ одномерный. Проектор $\hat{p}$ будем называть одномерным, если его нельзя представить в виде

$$\hat{p} = \sum_{\alpha} \hat{p}_{\alpha}, \quad \hat{p}_{\alpha} \neq \hat{p}, \quad \hat{p} \hat{p}_{\alpha} = \hat{p}_{\alpha} \hat{p} = \hat{p}_{\alpha}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\hat{A} \in \mathfrak{A}_+$, тогда $\hat{A}_0 = \hat{p}_0 \hat{A} \hat{p}_0$ имеет вид $\hat{A}_0 = \hat{p}_0 \Psi_0(\hat{A})$, где $\Psi_0(\hat{A})$ – некоторый функционал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $[\hat{A}_0, \hat{p}_0] = 0$, то $\hat{A}_0$ и $\hat{p}_0$ имеют общее спектральное разложение единицы. Поскольку проектор $\hat{p}_0$ одномерный, то спектральное разложение $\hat{A}_0$ должно иметь вид $\hat{A}_0 = \hat{p}_0 \Psi_0(\hat{A}) + \hat{A}'_0$, где $\hat{A}'_0$ ортогонально $\hat{p}_0$. Поэтому $\hat{A}_0 = \hat{p}_0 \hat{A}_0 = \hat{p}_0 \hat{p}_0 \Psi_0(\hat{A}) + \hat{p}_0 \hat{A}'_0 = \hat{p}_0 \Psi_0(\hat{A})$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Функционал $\Psi_0(\hat{A})$ линеен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\hat{p}_0 \Psi_0(\hat{A} + \hat{B}) = \hat{p}_0(\hat{A} + \hat{B})\hat{p}_0 = \hat{p}_0 \Psi_0(\hat{A}) + \hat{p}_0 \Psi_0(\hat{B}).$$

Так как $\hat{p}_0 \neq 0$, то $\Psi_0(\hat{A} + \hat{B}) = \Psi_0(\hat{A}) + \Psi_0(\hat{B})$, что и требовалось доказать.

Физическое состояние $\varphi_{0\alpha}$ назовем основным, если $\varphi_{0\alpha}(\hat{p}_0) = 1$. По линейности функционал $\Psi_0(\hat{A})$ однозначно расширяется на алгебру $\mathfrak{A}$: $\Psi_0(\hat{A} + i\hat{B}) = \Psi_0(\hat{A}) + i\Psi_0(\hat{B})$, где $\hat{A}, \hat{B} \in \mathfrak{A}_+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Функционал $\Psi_0(\hat{A})$ положителен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойству (1в) справедливо неравенство

$$\varphi_{0\alpha}(\hat{p}_0 \hat{R}^* \hat{R} \hat{p}_0) \geq 0.$$

С другой стороны,

$$\varphi_{0\alpha}(\hat{p}_0 \hat{R}^* \hat{R} \hat{p}_0) = \varphi_{0\alpha}(\hat{p}_0 \Psi_0(\hat{R}^* \hat{R})) = \Psi_0(\hat{R}^* \hat{R}).$$

Утверждение доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Функционал Ψ_0 удовлетворяет условию нормировки: $\Psi_0(\hat{I}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$1 = \varphi_{0\alpha}(\hat{p}_0 \hat{I} \hat{p}_0) = \varphi_{0\alpha}(\hat{p}_0 \Psi_0(\hat{I})) = \Psi_0(\hat{I}),$$

что и требовалось доказать.

Для того чтобы выяснить физический смысл функционала Ψ_0 , рассмотрим элемент $\bar{A}$, который в алгебре $\mathfrak{A}$ соответствует наблюдаемой $\hat{A}$, усредненной по времени,

$$\bar{A} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dt \hat{A}(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dt e^{-i\hat{H}t} \hat{A} e^{i\hat{H}t}. \quad (10)$$

Здесь предел понимается как предел по норме. Подставляя в (10) спектральное разложение $\hat{H}$, получаем

$$\bar{A} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dt \left[\sum_n \hat{p}_n \hat{A} \hat{p}_n + \hat{B}(t) \right],$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{B}(t) = & \int dE \sum_n [\hat{p}_n \hat{A} \widehat{\omega}(E) e^{i(E_n - E)t} + \widehat{\omega}(E) \hat{A} \hat{p}_n e^{-i(E_n - E)t}] + \\ & + \sum_{\substack{n, m \\ n \neq m}} \hat{p}_n \hat{A} \hat{p}_m e^{i(E_n - E_m)t} + \int dE dE' \widehat{\omega}(E) \hat{A} \widehat{\omega}(E') e^{i(E - E')t}.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что благодаря наличию в этом выражении временных экспонент справедливо равенство

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dt \widehat{B}(t) \right\| = 0.$$

Таким образом,

$$\bar{A} = \sum_n \hat{p}_n \hat{A} \hat{p}_n.$$

Рассмотрим теперь значение наблюдаемой $\bar{A}$ в основном физическом состоянии $\varphi_{0\alpha}$,

$$\varphi_{0\alpha} \left(\sum_n \hat{p}_n \hat{A} \hat{p}_n \right) = \varphi_{0\alpha} (\hat{p}_0 \hat{A} \hat{p}_0) + \varphi_{0\alpha} \left(\sum_{n \neq 0} \hat{p}_n \hat{A} \hat{p}_n \right). \quad (11)$$

Здесь мы воспользовались линейностью функционала $\varphi_{0\alpha}$ на взаимно коммутирующих элементах $\hat{p}_n \hat{A} \hat{p}_n$ и $\hat{p}_m \hat{A} \hat{p}_m$. Так как $\hat{p}_n \hat{p}_0 = 0$ при $n \neq 0$, то правую часть соотношения (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\Psi_0(\hat{A}) + \varphi_{0\alpha} \left((\hat{I} - \hat{p}_0) \sum_{n \neq 0} \hat{p}_n \hat{A} \hat{p}_n (\hat{I} - \hat{p}_0) \right) = \\ = \Psi_0(\hat{A}) + \varphi_{0\alpha} (\hat{I} - \hat{p}_0) \varphi_{0\alpha} \left((\hat{I} - \hat{p}_0) \sum_{n \neq 0} \hat{p}_n \hat{A} \hat{p}_n (\hat{I} - \hat{p}_0) \right) = \Psi_0(\hat{A}).\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\varphi_{0\alpha}(\bar{A}) = \Psi_0(\hat{A}).$$

Значение наблюдаемой $\bar{A}$ во всех основных физических состояниях одно и то же.

Функционал Ψ_0 обладает всеми свойствами, которыми должен обладать функционал, задающий квантовые средние. Он линеен, положителен, равен единице на единичном элементе. Кроме того, он непрерывен как линейный функционал на C^* -алгебре. Поэтому вместо аксиомы линейности мы можем принять *седьмой постулат* (аксиому эргодичности).

Среднее значение наблюдаемой в основном состоянии квантового ансамбля равняется значению этой наблюдаемой, усредненной по времени, в любом основном физическом состоянии.

Теперь для построения стандартного математического аппарата квантовой механики мы можем воспользоваться канонической конструкцией Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) (см., например, [3]).

Будем считать два элемента $\hat{R}, \hat{S} \in \mathfrak{A}$ эквивалентными, если для любого $\hat{K} \in \mathfrak{A}$ справедливо условие $\Psi_0(\hat{K}^*(\hat{R} - \hat{S})) = 0$. Обозначим через $\Phi(\hat{R})$ класс эквивалентности

элемента $\hat{R}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ всех классов эквивалентности в $\mathfrak{A}$. Превратим $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ в линейное пространство, полагая $a\Phi(\hat{R}) + b\Phi(\hat{S}) = \Phi(a\hat{R} + b\hat{S})$. Скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ определим формулой $(\Phi(\hat{R}), \Phi(\hat{S})) = \Psi_0(\hat{R}^* \hat{S})$. Это скалярное произведение порождает в $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ норму $\|\Phi(\hat{R})\|^2 = \Psi_0(\hat{R}^* \hat{R})$. Пополнение по такой норме превращает $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ в гильбертово пространство. Каждому элементу $\hat{S}$ алгебры $\mathfrak{A}$ однозначно сопоставляется линейный оператор $\Pi_\Psi(\hat{S})$, действующий в этом пространстве по закону $\Pi_\Psi(\hat{S})\Phi(\hat{R}) = \Phi(\hat{S}\hat{R})$.

Заметим, что использование основного состояния Ψ_0 не является обязательным условием в конструкции ГНС. Все наши рассуждения можно основывать не на проекторе $\hat{p}_0$, а на любом другом одномерном проекторе $\hat{p}$. В этом случае также справедливо равенство

$$\hat{p}\hat{A}\hat{p} = \hat{p}\Psi_p(\hat{A}), \quad (12)$$

где $\Psi_p(\hat{A})$ — функционал, обладающий свойствами линейности и положительности; кроме того, $\Psi_p(\hat{I}) = 1$.

Вместо основных физических состояний $\varphi_{0\alpha}$ можно использовать базовые физические состояния $\varphi_{p\alpha}$. Эти состояния удовлетворяют условию $\varphi_{p\alpha}(\hat{p}) = 1$. Множество $\{\varphi_{p\alpha}\}$ физических состояний образует базовое квантовое состояние $\{\varphi\}_p$. Вместо аксиомы эргодичности можно постулировать, что квантовое среднее в состоянии $\{\varphi\}_p$ определяется функционалом Ψ_p , который фигурирует в равенстве (12). В этом случае мы теряем связь квантового среднего со средним по времени. В качестве компенсации теория приобретает большую гибкость, так как предположения о спектре гамильтониана становятся излишними.

5. ПРИМЕР

В качестве иллюстрации вышеизложенного рассмотрим квантовую систему, наблюдаемые величины которой описываются эрмитовыми (2×2) -матрицами. Элементы $\hat{H}$, $\hat{p}_0$, $\hat{A}$ имеют вид

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{bmatrix}, \quad \hat{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Очевидно, $\hat{p}_0\Psi_0(\hat{A}) = \hat{p}_0\hat{A}\hat{p}_0 = \hat{p}_0d$, т.е.

$$\Psi_0(\hat{A}) = d. \quad (13)$$

Кроме того,

$$\bar{A} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dt e^{-iE_0 t \tau_3} \hat{A} e^{iE_0 t \tau_3} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где τ_i — матрицы Паули.

Не составляет труда построить все физические состояния. Рассмотрим эрмитову матрицу $\hat{A}$, т.е. $a^* = a$, $d^* = d$, $c = b^*$. Любая такая матрица может быть представлена в виде

$$\hat{A} = r_0 \hat{I} + r \hat{\tau}(\bar{n}), \quad (15)$$

где $\bar{n}$ – единичный трехмерный вектор, $\hat{\tau}(\bar{n}) = (\bar{\tau}\bar{n})$. Чтобы формула (15) была справедливой, следует положить

$$r = \left(\frac{(a-d)^2}{4} + bb^* \right)^{1/2}, \quad r_0 = \frac{a+d}{2},$$

$$n_1 = \frac{b+b^*}{2r}, \quad n_2 = \frac{b-b^*}{2ir}, \quad n_3 = \frac{a-d}{2r}.$$

Коммутатор матриц $\hat{\tau}(\bar{n})$, $\hat{\tau}(\bar{n}')$ отличен от нуля при $\bar{n}' \neq \pm\bar{n}$. Поэтому каждая (с точностью до знака) матрица $\hat{\tau}(\bar{n})$ является образующей для действительной максимальной коммутативной подалгебры. Так как $\hat{\tau}(\bar{n})\hat{\tau}(\bar{n}) = \hat{I}$, то спектр элемента $\hat{\tau}(\bar{n})$ состоит из двух точек ± 1 .

Пусть $\{f(\bar{n})\}$ – множество всех таких функций, что $f(-\bar{n}) = -f(\bar{n})$ и областью значений этих функций являются числа ± 1 . Физическое состояние описывается функционалом, значение которого совпадает с одной из точек спектра соответствующего элемента алгебры. Для каждой точки спектра найдется подходящий функционал. Поэтому множеству физических состояний соответствует множество функционалов, определяемых формулой

$$\varphi(\hat{\tau}(\bar{n})) = f(\bar{n}).$$

Учитывая свойства (1a)–(1d), которыми должно обладать каждое физическое состояние, получаем

$$\varphi(\hat{A}) = r_0 + rf(\bar{n}). \quad (16)$$

Основным состоянием является любой функционал $\varphi_{0\alpha}$, для которого

$$f(\bar{n}) = -1 \quad \text{при} \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1.$$

Подставляя в (16) элемент $\bar{A}$ (14), получаем

$$\varphi_{0\alpha}(\bar{A}) = \frac{a+d}{2} - \frac{a-d}{2} = d.$$

Это согласуется с формулой (13).

В рассматриваемой модели можно обойтись без многозначных функционалов. Если бы мы стали рассматривать алгебру матриц, описывающих единичный спин, то без многозначных функционалов обойтись бы не удалось. В свое время это было отмечено (в других терминах) Коченом и Шпекером [5].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В принципе, физическое состояние можно рассматривать как специфический скрытый параметр. Однако благодаря многозначности функционала φ для этого скрытого параметра не выполняются условия запрещающей теоремы Кочена и Шпекера [5]. Ранее в статье [2] указывалось, что для φ не выполняются условия запрещающей теоремы фон Неймана [8]. Кроме того, там же показано, что для функционала φ не выполняются условия теоремы Белла [9]. Таким образом, для физического состояния оказываются неприменимыми аргументы, которые обычно приводятся противниками использования скрытых параметров в квантовой механике.

В связи с многозначностью функционала φ физический процесс, который обычно называется измерением, более уместно называть наблюдением. В термине “наблюдение” лучше отражается тот факт, что показание используемого прибора зависит от двух причин: физического состояния наблюдаемого объекта и типа прибора. При этом тип прибора определяется не только наблюдаемой, которую он должен зарегистрировать, но и от игнорируемого параметра прибора. В предлагаемом подходе роль такого игнорируемого параметра играет тип измерительного прибора. Разные типы приборов соответствуют разным максимальным коммутативным подалгебрам, которым принадлежит рассматриваемая наблюдаемая. В отличие от значения скрытого параметра, значение игнорируемого параметра в принципе может быть экспериментально установлено.

Таким образом, результат наблюдательного эксперимента (физическая реальность) определяется двумя другими физическими реальностями: физическим состоянием наблюдаемого объекта и типом наблюдающего устройства. При этом в индивидуальном квантовом эксперименте, в отличие от классического, в общем случае второй физической реальностью пренебречь нельзя. Вместе с тем в эксперименте по определению среднего значения наблюдаемой и в квантовом случае можно не учитывать тип измерительного прибора.

Благодарности. В заключение автор выражает свою глубокую благодарность К. А. Свешникову и П. К. Силаеву за очень полезную дискуссию.

Список литературы

- [1] *A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen.* Phys. Rev. 1935. V. 77. P. 777; *А. Эйнштейн, Б. Подольский, Н. Розен.* УФН. 1936. Т. 16. С. 440.
- [2] *Д. А. Славнов.* ТМФ. 2001. Т. 129. С. 87; quant-ph/0101139.
- [3] *Ж. Эмх.* Алгебраический подход в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
- [4] *У. Рудин.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- [5] *S. Kochen, E. P. Specker.* J. Math. Fluid. Mech. 1967. V. 17. P. 59.
- [6] *Ж. Невё.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
- [7] *Ж. Диксмье.* C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
- [8] *И. фон Нейман.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
- [9] *J. S. Bell.* Physics (N. Y.). 1965. V. 1. P. 195.

Поступила в редакцию 29.I.2002 г.