Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Суханов, Соотношения неопределенностей Шредингера и физические особенности коррелированно-когерентных состояний, *ТМФ*, 2002, том 132, номер 3, 449–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:22:23

© 2002 г.

А. Д. Суханов*

СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ШРЕДИНГЕРА И ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КОРРЕЛИРОВАННО-КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Показано, что различие между соотношениями неопределенностей (СН) Шредингера и СН Гейзенберга носит принципиальный характер. Предложена модифицированная версия стохастической механики, позволяющая наглядно продемонстрировать равноправие вкладов антикоммулятора и коммутатора в СН Шредингера. Проведена классификация квантовых состояний, минимизирующих СН Шредингера в произвольный момент времени. Установлено, что корреляция флуктуаций координаты и импульса в таких коррелированно-когерентных состояниях (ККС) в значительной степени определяется вкладами не только коммутатора, но и антикоммулятора соответствующих операторов. Показано, что с течением времени характер этой корреляции качественно меняется от *противофазной*, типичной для СН Гейзенберга, до *синфазной*, в которой вклад антикоммулятора оказывается решающим. Проведен сравнительный анализ свойств свободной микрочастицы и квантового осциллятора в ККС и показано, что в обеих моделях ККС соответствуют бегуще-стоячим волнам де Бройля.

Ключевые слова: универсальные соотношения неопределенностей Шредингера, обобщенный коррелятор, коррелированно-когерентные состояния, противофазная и синфазная корреляция флуктуаций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Со времени завершения формирования основных положений квантовой механики прошло уже 75 лет. Однако дискуссия по поводу ее физической интерпретации не утихает. Важнейший элемент этой дискуссии связан с проблемой одновременной измеримости физических величин.

Как известно, в основе классических теорий физики лежит представление о возможности точного одновременного измерения любых физических величин, что связано с принципиальным отсутствием у них неустранимых флуктуаций. Качественное отличие неклассических теорий от классических, ставшее окончательно ясным после публикации в 1927 г. знаменитой работы Гейзенберга [1], состоит в том, что в квантовой механике такое измерение невозможно. Из анализа Гейзенберга следовало, что физическая система, находясь в произвольном квантовом состоянии, не обладает одновременно

Расширенный вариант доклада на XXIV Международном совещании по фундаментальным проблемам физики высоких энергий и теории поля (Протвино, ИФВЭ, июнь 2001 г.)

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия. E-mail: ogol@oldi.ru

строго определенными значениями сопряженных физических величин, и потому они не могут быть совместно точно измерены. Каждая из этих величин испытывает неустойчивые флуктуации относительно средних значений, корреляция которых ограничена соответствующими соотношениями неопределенностей (СН).

Указанное обстоятельство связано с тем, что согласно общепринятым взглядам [2], [3] при переходе от классической механики к квантовой структура алгебры наблюдаемых не меняется, но сами наблюдаемые становятся операторами, подчиняющимися известным коммутационным соотношениям. Этот основополагающий тезис предопределил особую роль коммутаторов в аппарате традиционной квантовой механики. Неудивительно, что и основу ее физической интерпретации составили СН Гейзенберга, в которых минимальное значение произведения дисперсий наблюдаемых, принципиально ограничивающее точность их одновременного измерения, определяется только средним значением соответствующего коммутатора.

Между тем, согласно воспоминаниям Гейзенберга [4], еще в 1930 г. Бор говорил о неклассическом характере не только квантовой механики, но и статистической термодинамики. Довольно скоро было установлено [5], что СН координата–импульс имеет место и в теории неклассического броуновского движения, разработанной еще Эйнштейном [6]. Если исключить нефизический случай нулевой температуры, когда броуновское движение просто отсутствует, это СН является нетривиальным, хотя соответствующие наблюдаемые – вовсе не операторы, а случайные статистически зависимые c -числовые величины. Отсюда следует, что наличие СН для каких-либо наблюдаемых не обязательно связано с вкладом коммутатора этих наблюдаемых [7], [8], а может определяться каким-то другим характером их статистической зависимости.

Более того, и в квантовой механике характер статистической зависимости наблюдаемых, проявляющийся в корреляции их флуктуаций и фиксированный вкладом их коммутатора, не является единственно возможным. Как показали Шредингер [9] и Робертсон [10] еще в 1930 г., в наиболее общем случае справедливы СН, в правую часть которых вносят вклады как коммутатор наблюдаемых, так и их антикоммутатор. С этой точки зрения известные СН Гейзенберга представляют собой лишь частный случай СН Шредингера–Робертсона (кратко СН Шредингера), значение которых в полной мере не оценено до сих пор. СН Шредингера можно назвать универсальными, поскольку они оказываются нетривиальными и в квазиклассическом пределе, что позволяет в принципе использовать их аналоги вне квантовой механики.

Следует отметить, что вопрос о предпочтительности СН Шредингера перед СН Гейзенберга многие годы мог бы звучать несколько риторически, ибо, как правило, в качестве полного набора базисных состояний использовались только стационарные состояния. Ситуация изменилась с начала 60-х г. XX века, когда предметом исследования и применения оказались не только стационарные состояния или их произвольные суперпозиции, но и полные наборы специфических нестационарных состояний – *когерентные* состояния [11], [12] и *коррелированно-когерентные* состояния (ККС) [13], [14]. Эти наборы нестационарных состояний в физическом смысле выделяются тем, что оказываются наиболее близкими к классическим состояниям тех же физических систем. В связи с этим они представляют наибольший интерес и с точки зрения распространения некоторых результатов квантовой механики на другие неклассические теории.

До сих пор СН Шредингера и минимизирующие их ККС анализировались, главным

образом, с математической точки зрения [15]. В данной работе мы исследуем физические особенности СН Шредингера и соответствующих ККС и покажем, что их отличие от СН Гейзенберга имеет не технический, а принципиальный характер. Рассмотрение проводится на простейшем примере СН координата–импульс в рамках как традиционной квантовой механики, так и модифицированной версии стохастической механики [16]. В последнем случае вклады антикоммутатора и коммутатора в СН Шредингера удастся представить единообразно, что облегчает их сравнительный анализ и переход к квазиклассическому приближению. Будет продемонстрировано, что в характере корреляций флуктуаций, описываемых по отдельности вкладами коммутатора и антикоммутатора в СН Шредингера, наблюдается качественное различие. Более того, относительная роль этих вкладов изменяется с течением времени. На типичных моделях свободной микро-частицы и квантового осциллятора будет показано, что ККС в этих моделях отвечают бегуще-стоячим волнам де Бройля.

2. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ШРЕДИНГЕРА И ИХ ЧАСТНЫЕ ВЕРСИИ

2.1. СН Шредингера для произвольных наблюдаемых. Как известно [15], [17], наиболее общие соотношения неопределенностей для произвольных наблюдаемых в квантовой механике – СН Шредингера – являются прямым следствием неравенства Коши–Буняковского–Шварца в гильбертовом пространстве. При дальнейшем анализе мы ограничимся эрмитовыми операторами и чистыми состояниями, хотя более общее рассмотрение также возможно [15].

Допустим, что мы рассматриваем наблюдаемые A и B , которым сопоставляются эрмитовы операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$. В квантовом состоянии $|\psi\rangle \equiv |\rangle$, которое ни для одного из них не является собственным, наблюдаемые A и B можно характеризовать средними значениями $\bar{A}$ и $\bar{B}$ и дисперсиями

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &\equiv \langle |(\Delta \hat{A})^2| \rangle = \langle |\Delta \hat{A} \cdot \Delta \hat{A}| \rangle = \langle \Delta A | \Delta A \rangle, \\ (\Delta B)^2 &\equiv \langle |(\Delta \hat{B})^2| \rangle = \langle |\Delta \hat{B} \cdot \Delta \hat{B}| \rangle = \langle \Delta B | \Delta B \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \hat{A} &\equiv \hat{A} - \bar{A}, & \Delta \hat{A} | &\equiv | \Delta A \rangle, \\ \Delta \hat{B} &\equiv \hat{B} - \bar{B}, & \Delta \hat{B} | &\equiv | \Delta B \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда для произвольных наблюдаемых A и B СН Шредингера принимает вид

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq |\tilde{R}_{AB}|^2 \equiv |\langle \Delta A | \Delta B \rangle|^2 = |\langle |\Delta \hat{A} \cdot \Delta \hat{B}| \rangle|^2. \quad (3)$$

Входящую в соотношение (3) величину $|\tilde{R}_{AB}|$ будем впредь называть обобщенным коррелятором флуктуаций наблюдаемых A и B . Он равен модулю комплексной амплитуды перехода $\tilde{R}_{AB}$ из состояния $|\Delta B\rangle$ в состояние $|\Delta A\rangle$. Разделив в ней вещественную и мнимую части, получим, что *обобщенный коррелятор* можно записать в виде

$$|\tilde{R}_{AB}| = \sqrt{\sigma_{AB}^2 + c_{AB}^2}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \langle |\{\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}\}| \rangle, \quad c_{AB} = \frac{1}{2} |\langle |[\hat{A}, \hat{B}]| \rangle| \quad (5)$$

суть вклады в $|\tilde{R}_{AB}|$ антикоммутатора и коммутатора операторов $\Delta\hat{A}$ и $\Delta\hat{B}$, соответственно.

Следует напомнить, что доказательство СН Шредингера [8], [9], [17] основано на анализе положительной определенности нормы вектора $|M\rangle \equiv |\Delta A + \lambda \Delta B\rangle$, где в общем случае в качестве λ можно выбрать произвольное комплексное число. Если ограничиться частным выбором мнимого числа λ , то же самое доказательство приводит к СН Гейзенберга. Наконец, при выборе вещественного числа λ тем же способом доказывається справедливость другой частной версии СН Шредингера.

Нетрудно видеть, что обобщенный коррелятор $|\tilde{R}_{AB}|$, как и дисперсии $(\Delta A)^2$ и $(\Delta B)^2$, инвариантен относительно унитарных преобразований в гильбертовом пространстве, в отличие от величин σ_{AB} и c_{AB} по отдельности. Именно он в целом определяет характер корреляции флуктуаций наблюдаемых A и B в произвольных состояниях и фиксирует минимальные ограничения точности их одновременного измерения.

В тех состояниях, где $\sigma_{AB} \equiv 0$, но $c_{AB} \neq 0$, СН Шредингера (3) превращается в свою частную версию – СН Гейзенберга

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq c_{AB}^2. \quad (6)$$

Для тех состояний, в которых $c_{AB} \equiv 0$, но $\sigma_{AB} \neq 0$, СН Шредингера (3) принимает форму другой своей частной версии – квантового аналога СН Эйнштейна в статистической термодинамике [8]

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \sigma_{AB}^2. \quad (7)$$

Заметим, что последнее может иметь место не только тогда, когда при $\hbar \neq 0$ коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, но и при обращении в нуль среднего значения нетривиального коммутатора. Наконец, если $\sigma_{AB} \neq 0$, но $\sigma_{AB} \ll c_{AB}$ или если $c_{AB} \neq 0$, но $\sigma_{AB} \gg c_{AB}$, то можно сказать, что правая часть СН Шредингера, оставаясь инвариантной, приближенно совпадает с правыми частями либо СН Гейзенберга, либо квантового аналога СН Эйнштейна.

Необходимо подчеркнуть, что в квазиклассическом пределе, когда $\hbar \rightarrow 0$, вклад коммутатора c_{AB} в СН Шредингера (3) обращается в нуль. В то же время вклад антикоммутатора σ_{AB} стремится к коррелятору флуктуаций c -числовых величин A и B и отличен от нуля, если между ними существует статистическая зависимость. В результате в этом пределе СН Шредингера (3) принимает форму, аналогичную СН Эйнштейна из равновесной статистической термодинамики [7]

$$\overline{(\Delta A)^2} \cdot \overline{(\Delta B)^2} \geq \overline{(\Delta A \cdot \Delta B)}^2, \quad (8)$$

знакомую по классической теории вероятностей [18]. Черта означает здесь усреднение по соответствующему распределению вероятностей.

Таким образом, СН Шредингера, в отличие от своих частных версий, являются: а) *инвариантными* относительно унитарных преобразований и, следовательно, не меняются при унитарной эволюции микросистемы со временем; б) *универсальными*, ибо они характеризуют корреляции флуктуаций физических величин при любой форме их статистической зависимости.

Иногда встречаются высказывания, которые можно истолковать так, что СН Гейзенберга справедливы и для тех состояний, в которых выполняются СН Шредингера,

т.е. когда вклад антикоммутатора $\sigma_{AB} \neq 0$. При этом принято говорить о том, что отбрасывание положительной величины σ_{AB} в правой части СН Шредингера только усиливает неравенство, характерное для СН Гейзенберга. Последнее действительно так, и при $\sigma_{AB} \neq 0$ вместо (6) всегда можно написать сильное неравенство

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 > c_{AB}^2. \quad (9)$$

Однако подобные неравенства не имеют особого физического смысла, а потому называть их СН Гейзенберга нет оснований. Во всяком случае, области применимости формулы (6), справедливой только при $\sigma_{AB} \equiv 0$, и формулы (9), справедливой при $\sigma_{AB} \neq 0$, совершенно различны. Поэтому объединять их в одно соотношение было бы неправильно.

В дальнейшем нас будет интересовать характер корреляций флуктуаций величин A и B , отвечающих вкладам σ_{AB} и c_{AB} в обобщенный коррелятор $|\tilde{R}_{AB}|$, а также возможность изменения характера таких корреляций со временем. При этом особый интерес представляет анализ тех состояний, для которых неравенства (3), (6), (7) превращаются в строгие равенства. Классификацию таких состояний мы дадим ниже на примере важнейшего СН координата–импульс.

2.2. СН Шредингера координата–импульс в традиционной квантовой механике. Проанализируем подробнее СН Шредингера координата–импульс для микрочастицы, совершающей одномерное движение. В этом случае $\hat{A} = \hat{q}$ и $\hat{B} = \hat{p}$, так что СН Шредингера (3) с обобщенным коррелятором $|\tilde{R}_{qp}|$ принимает вид

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 \geq |\tilde{R}_{qp}|^2 = \sigma_{qp}^2 + \frac{\hbar^2}{4}, \quad (10)$$

где учтено, что $c_{qp} = \hbar/2$.

Для удобства дальнейшего анализа представим величину σ_{qp} в нескольких различных формах. Прежде всего, ее удобно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{qp} &= \frac{1}{2} \int dq \psi^*(q) \left\{ \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} - \bar{p} \right) (q - \bar{q}) + (q - \bar{q}) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} - \bar{p} \right) \right\} \psi(q) = \\ &= m \int dq (q - \bar{q}) j(q) \equiv mI. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\psi(q) = \sqrt{\rho_{\text{pr}}(q)} \cdot e^{i\varphi(q)}$ – волновая функция микрочастицы в q -представлении, а $j(q)$ – плотность потока вероятности:

$$j(q) = \frac{\hbar}{2im} \left\{ \psi^*(q) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial q} \psi(q) \right\} = \frac{\hbar}{m} \rho_{\text{pr}}(q) \frac{\partial \varphi}{\partial q}. \quad (12)$$

Соответственно величина I имеет смысл первого момента функции $j(q)$. В квазиклассическом пределе она переходит в первый момент плотности потока числа частиц.

Нетрудно видеть, что для обращения в нуль величины I и, тем самым, вклада σ_{qp} в СН Шредингера (10) (когда оно сводится к соответствующему СН Гейзенберга) нужно, чтобы либо $j \equiv 0$, либо при $j \neq 0$ функция $j(q)$ была бы четной. Первый случай реализуется для вещественных волновых функций, когда фаза $\varphi = 0$. Для реализации

второго случая при четности по q плотности вероятности $\rho_{\text{pr}}(q)$ необходимо, чтобы фаза $\varphi(q)$ была нечетной функцией q . С этой точки зрения все волновые функции, описывающие финитное движение (стоячие волны де Бройля), будучи вещественными, дают $\sigma_{qp} = 0$. Аналогично, гармоническая волновая функция, описывающая инфинитное движение свободной микрочастицы в идеализированной модели (бегущая волна де Бройля), также дает $\sigma_{qp} = 0$, ибо для нее $j = \text{const}$.

Другой подход к величине σ_{qp} оказывается полезным, если известно, что дисперсия координаты $(\Delta q)^2$ зависит от времени. В этом случае ее можно представить в виде

$$\sigma_{qp} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\Delta q)^2 = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \langle (\Delta \hat{q})^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{p}, \Delta \hat{q} \} \rangle, \quad (13)$$

где было использовано равенство $\Delta \hat{p} = (m/2) d(\Delta \hat{q})/dt$. Из формулы (13) следует, что по крайней мере для волновых функций стационарных состояний $\sigma_{qp} = 0$.

Наконец, отметим, что если величина $\sigma_{qp} \neq 0$, то она остается отличной от нуля и в квазиклассическом пределе. Тогда вкладом $c_{qp} = \hbar/2$ в правую часть СН (10) можно пренебречь, так что СН Шредингера приближенно совпадает с квантовым аналогом СН Эйнштейна. Следует также подчеркнуть, что подобная ситуация для квантовой механики является достаточно привычной. Указанное различие в поведении величин σ_{qp} и c_{qp} по отношению к этому пределу качественно напоминает различия в поведении орбитального и спинового моментов атома или вероятностей вынужденного и спонтанного излучений при $\hbar \rightarrow 0$.

Из проведенного рассмотрения следует, что в рамках стандартного математического аппарата квантовой динамики вычисление вкладов σ_{qp} и c_{qp} в правую часть СН Шредингера (10) производится качественно разными способами – через антикоммутатор и коммутатор, соответственно. Последнее обстоятельство несколько затрудняет их совместный анализ и, в частности, нахождение состояний, превращающих СН Шредингера (10) в равенство, а также переход к квазиклассическому пределу.

2.3. СН Шредингера координата–импульс в стохастической механике.

Ситуацию удастся значительно упростить, если то же самое СН Шредингера (10) проанализировать в рамках математического аппарата стохастической механики Нельсона [16], ведущей начало фактически от работы Маделунга [19]. Как было показано в работах [20], [21], в этом отношении результаты применения квантовой и стохастической механики полностью совпадают. Однако аппарат стохастической механики, с нашей точки зрения, обладает тем преимуществом, что позволяет рассматривать вклады σ_{qp} и c_{qp} в СН Шредингера (10) единообразно.

Чтобы убедиться в этом, придадим формализму Нельсона несколько иную форму. С этой целью запишем произвольную волновую функцию микрочастицы в q -представлении в виде

$$\psi(q) \equiv \exp \{ \chi(q) + i\varphi(q) \}, \quad (14)$$

где $\chi(q) \equiv \ln \rho_{\text{pr}}(q)/2$. Объединим аргументы экспоненты в формуле (14) и введем комплексную фазу

$$\tilde{\varphi}(q) \equiv \varphi(q) - i\chi(q). \quad (15)$$

Тогда соответствующая ей комплексная скорость

$$\tilde{V}(q) \equiv \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial q} = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - i \frac{\partial \chi}{\partial q} \right) = v(q) + iu(q) \quad (16)$$

удобна тем, что объединяет текущую скорость $v(q)$ и осмотическую скорость $u(q)$, введенные ранее Нельсоном:

$$v(q) \equiv \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial q}, \quad u(q) \equiv -D_Q \frac{1}{\rho_{\text{pr}}(q)} \frac{\partial}{\partial q} \rho_{\text{pr}}(q), \quad (17)$$

где коэффициент $D_Q \equiv \hbar/(2m)$ можно назвать квантовым коэффициентом диффузии.

Подчеркнем, что текущая скорость v определяется фазой, а осмотическая скорость u – амплитудой волновой функции. При $\hbar \neq 0$ обе эти скорости равноправны, причем именно скорость v определяет, согласно (12), плотность потока вероятности $j = \rho_{\text{pr}} v$, входящую в уравнение непрерывности. В то же время в квазиклассическом пределе скорость v превращается в скорость потока частиц, а скорость u обращается в нуль.

Формальное отличие данного подхода от оригинального подхода Нельсона состоит в том, что Нельсон вместо комплексно-сопряженных скоростей $\tilde{V}$ и $\tilde{V}^*$ использовал скорости прямого и попятного во времени стохастических процессов. Напомним, однако, что попятное движение во времени в квантовой динамике эквивалентно переходу к комплексно-сопряженным величинам. С этой точки зрения введение комплексной скорости $\tilde{V}$ физически вполне оправданно. Вместе с тем оно позволяет значительно упростить последующий анализ моделей как в самой квантовой механике, так и в квазиклассическом приближении.

В частности, в исходном подходе Нельсона изменение со временем двух скоростей $v(q, t)$ и $u(q, t)$ определяется сложными зацепляющимися уравнениями, которые в одномерном случае принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a + u \frac{\partial u}{\partial q} - v \frac{\partial v}{\partial q} + D_Q \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -D_Q \frac{\partial^2 v}{\partial q^2} - v \frac{\partial u}{\partial q} - u \frac{\partial v}{\partial q}, \quad (19)$$

где $a = -(1/m) \partial U / \partial q$ – ускорение. Очевидно, что интерпретация каждого из уравнений (18) и (19) отнюдь не проста.

В то же время для комплексной скорости $\tilde{V}$, объединяя уравнения (18) и (19), нетрудно получить уравнение

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = a - \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q} - i D_Q \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial q^2}. \quad (20)$$

Это типичное уравнение гидродинамики для комплексной скорости $\tilde{V}$ с чисто мнимым коэффициентом диффузии, которое в модели турбулентности было исследовано Бюргерсом [22]. В квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$, когда $D_Q \rightarrow 0$, вещественная часть уравнения (20) принимает вид одного из двух уравнений Эйлера для идеальной жидкости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a - v \frac{\partial v}{\partial q}, \quad (21)$$

являющегося следствием уравнения Гамильтона–Якоби с $v = -(1/m) \partial S / \partial q$, где S – классическое действие. (Второе уравнение – это уравнение непрерывности с плотностью потока $j = \rho v$.)

Теперь все величины, входящие в СН Шредингера (10), можно вычислить, усредняя соответствующие случайные функции координаты q по распределению вероятностей $\rho_{\text{pr}}(q)$. Прежде всего

$$\bar{u} = -\frac{\hbar}{2m} \int dq \left[\frac{1}{\rho_{\text{pr}}(q)} \frac{\partial \rho_{\text{pr}}(q)}{\partial q} \right] \rho_{\text{pr}}(q) = 0, \quad (22)$$

если только $\rho_{\text{pr}} \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \pm\infty$. Что касается величин $\bar{v}$ и $\bar{q}$, то их всегда можно обратить в нуль выбором подходящей системы отсчета.

Далее, определим импульс, соответствующий скорости $\tilde{V}$, как случайную функцию $\tilde{P}(q) = m\tilde{V}(q)$. Тогда $\bar{\tilde{P}} = 0$ и

$$(\Delta p)^2 \equiv |\bar{\tilde{P}}|^2 = m^2(\bar{v}^2 + \bar{u}^2). \quad (23)$$

Тот же результат, разумеется, получится непосредственно из квантовой механики с учетом формул (14), (17):

$$\begin{aligned} (\Delta p)^2 &= -\hbar^2 \int dq \psi^*(q) \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} = \hbar^2 \int dq \left| \frac{\partial \psi}{\partial q} \right|^2 = \\ &= m^2 \int dq \rho_{\text{pr}}(q) (v^2(q) + u^2(q)) = m^2(\bar{v}^2 + \bar{u}^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Наконец, для комплексной амплитуды $\tilde{R}_{qp}$, определяющей обобщенный коррелятор в правой части СН Шредингера (10), имеем

$$\tilde{R}_{qp} = \sigma_{qp} + ic_{qp} = m\overline{(q\tilde{V})} = m\{\overline{qv} + i\overline{qu}\}. \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что в рамках стохастической механики, используя формулы (12), (17) и условие нормировки плотности $\rho_{\text{pr}}(q)$, получим

$$\sigma_{qp} = m\overline{qv} = m \int dq q \left[\frac{\hbar}{m} \frac{\partial \varphi(q)}{\partial q} \right] \rho_{\text{pr}}(q) = m \int dq q j(q), \quad (26)$$

$$c_{qp} = m\overline{qu} = -m \int dq q \left[\frac{\hbar}{2m} \frac{1}{\rho_{\text{pr}}(q)} \frac{\partial \rho_{\text{pr}}(q)}{\partial q} \right] \rho_{\text{pr}}(q) = \frac{\hbar}{2}, \quad (27)$$

где выражение (26) для σ_{qp} с учетом того, что $\bar{q} = 0$, совпадает с выражением (11).

Разумеется, все эти выражения подтверждают результаты, полученные в п. 2.2. Однако рассмотрение с использованием комплексной скорости $\tilde{V}$ обладает тем бесспорным преимуществом, что входящие в СН Шредингера (10) величины теперь могут быть вычислены единообразно либо как дисперсии $(\Delta q)^2$ и $(\Delta p)^2$, либо как корреляторы $\overline{qv}$ и $\overline{qu}$ случайных функций q , $v(q)$ и $u(q)$ по одному и тому же распределению вероятностей $\rho_{\text{pr}}(q)$.

Более того, формулы (26) и (27) наглядно демонстрируют связь вкладов антикоммутатора σ_{qp} с фазой и коммутатора c_{qp} с амплитудой волновой функции, соответственно. Поскольку специфические особенности поведения микрочастиц в квантовой механике определяются именно фазой, роль вклада антикоммутатора может быть существенной даже тогда, когда фаза относительно мала. В свою очередь, в квазиклассическом пределе, когда $c_{qp} \rightarrow 0$, вклад антикоммутатора может оказаться определяющим.

3. КОРРЕЛИРОВАННО-КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

3.1. Классификация квантовых состояний, минимизирующих СН Шредингера. На основе анализа, проведенного в разделе 2, классифицируем квантовые состояния, минимизирующие СН Шредингера (10). Те из них, что обращают его в строгое равенство при наиболее общих условиях, когда $\sigma_{qp} \neq 0$ и $c_{qp} \neq 0$, мы будем называть ККС. Они были введены в рассмотрение для квантового осциллятора в работах [13], [14], [23].

Соответственно их частные случаи, когда обращение в равенство СН Шредингера (10) достигается при $\sigma_{qp} \equiv 0$, принято называть когерентными состояниями (КС). Первоначально они были введены также для квантового осциллятора Шредингером [24] еще в 1926 г., а затем получили большую популярность в связи с развитием квантовой оптики [11] (см. также [25], [26]). Наконец, состояния, в которых СН (10) обращается в равенство при условии $\sigma_{qp} \gg c_{qp}$, можно было бы назвать коррелированными. Их качественное отличие от КС мы продемонстрируем в п. 3.2.

Как показано в работе [27], для классификации интересующих нас квантовых состояний удобно использовать функцию Вигнера $W(q, p)$. ККС выделяются тем, что только для таких состояний функция Вигнера, имеющая смысл плотности *квазивероятности* в фазовом пространстве, является неотрицательной и остается таковой с течением времени. Она имеет вид двумерного гауссова распределения по q и p , автоматически обеспечивающего минимизацию СН Шредингера (10):

$$W(q, p) = [2\pi\Delta q\Delta p(1 - r^2)]^{-1} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r^2)} \left[\frac{(q - \bar{q})^2}{(\Delta q)^2} - \frac{2r(q - \bar{q})(p - \bar{p})}{\Delta q\Delta p} + \frac{(p - \bar{p})^2}{(\Delta p)^2} \right] \right\}. \quad (28)$$

Здесь $\bar{q}, \bar{p}$ – средние значения, $\Delta q, \Delta p$ – средние квадратичные отклонения, а r – коэффициент корреляции, используемый в классической теории вероятностей:

$$0 \leq r \equiv \frac{\sigma_{qp}}{\Delta q\Delta p} \leq 1. \quad (29)$$

В общем случае (при $r \neq 0$) функция Вигнера (28) соответствует ККС. Если же $r \equiv 0$, то она соответствует КС. Наконец, при $r \approx 1$ функция Вигнера приближенно соответствует коррелированным состояниям.

Не ставя себе целью перебрать все квантовые состояния, обращающие СН Шредингера (10) в равенство, убедимся в том [26], что к их числу относятся все состояния, амплитуда и фаза которых являются квадратичными функциями координаты q :

$$\psi(q, t) = [2\pi(\Delta q^2)]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{(q - \bar{q})^2}{4(\Delta q)^2} [1 - i\alpha(t)] + i\delta(t) \right\}, \quad (30)$$

где $\alpha(t)$ – вещественная функция времени, а $\delta(t)$ – вещественная функция времени, которая к тому же может линейно зависеть от координаты q .

Используя предложенный выше формализм, нетрудно показать, что в этом случае

$$(\Delta p)^2 = m^2 \overline{|\dot{V}|^2} = m^2 \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{(\Delta q)^2}{4(\Delta q)^4} (\alpha^2 + 1) = \frac{\hbar^2}{4} \frac{\alpha^2 + 1}{(\Delta q)^2}, \quad (31)$$

$$|\tilde{R}_{qp}|^2 = m^2 \overline{|q\dot{V}|^2} = m^2 \frac{\hbar^2}{m^2} \left[\frac{(\Delta q)^2}{2(\Delta q)^2} \right]^2 (\alpha^2 + 1) = \frac{\hbar^2 (\alpha^2 + 1)}{4}, \quad (32)$$

где вклад антикоммутатора имеет вид $\sigma_{qp} = \hbar\alpha/2$. Таким образом, выражения (31) и (32) обеспечивают обращение СН Шредингера (10) в равенство при любых $(\Delta q)^2$ и $\alpha(t)$.

Простейшим примером минимизирующего состояния вида (30) является стационарное основное состояние квантового осциллятора с энергией $\varepsilon_0 = \hbar\omega_0/2$. Поскольку соответствующая волновая функция вещественна ($\alpha = 0$, $\delta = 0$), то и СН Шредингера (10) сводится к СН Гейзенберга с $(\Delta q)^2 = l_0^2/2$ и $(\Delta p)^2 = \hbar^2/(2l_0^2)$, где $l_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ – амплитуда нулевых колебаний:

$$(\Delta q)^2(\Delta p)^2 = \frac{l_0^2}{2} \frac{\hbar^2}{2l_0^2} = \frac{1}{4} |\langle [\hat{p}, \hat{q}] \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (33)$$

Такое состояние и было исходно названо когерентным. Более сложные примеры минимизирующих состояний будут приведены ниже.

3.2. Свободная микрочастица в состоянии гауссова волнового пакета. В качестве первого примера рассмотрим достаточно реалистическую модель – одномерное свободное движение ($U(q) = 0$) микрочастицы массы m в состоянии гауссова волнового пакета. Допустим, что при $t = 0$ гауссов пакет имеет начальную ширину $\Delta q(0) = b$, а его центр движется с постоянной скоростью $v_0 = \text{const}$. В произвольный момент времени этот пакет имеет вид (30), причем в данном случае

$$(\Delta q(t))^2 = b^2 + v_Q^2 t^2 = b^2 (1 + \alpha^2(t)), \quad (34)$$

$$\alpha(t) = \frac{v_Q t}{b}, \quad (35)$$

$$\delta(q, t) = \frac{mv_0}{\hbar} q - \frac{mv_0^2}{2\hbar} t - \frac{1}{2} \arctg \alpha(t). \quad (36)$$

Величины v_0 и b имеют смысл параметров, жестко заданных внешними макроусловиями, формирующими ансамбль микрочастиц при $t = 0$. Постоянную скорость центра пакета можно исключить из анализа, перейдя в инерциальную систему отсчета, движущуюся со скоростью $V_{\text{syst}} = v_0$. Величина

$$v_Q = \frac{\hbar}{2mb}, \quad (37)$$

в соответствии с формулой (34) для $(\Delta q(t))^2$, имеет смысл скорости распыливания волнового пакета (при сохранении его гауссовой формы).

В состоянии гауссова пакета средние значения координаты и импульса равны $\bar{q} = v_0 t$, $\bar{p} = mv_0$, и их можно всегда обратить в нуль, перейдя в другую инерциальную систему отсчета. Наконец, дисперсия импульса согласно формулам (31) и (34) имеет вид

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2 (\alpha^2 + 1)}{4b^2 (\alpha^2 + 1)} = (m\Delta v)^2 = (mv_Q)^2 = \text{const}, \quad (38)$$

т.е. не зависит от величины $\alpha(t)$. Таким образом, дисперсия координаты вида (34) зависит от времени, а дисперсия импульса со временем не меняется. Скорость v_Q согласно (38) определяет среднее квадратичное отклонение скорости микрочастицы $\Delta v = \Delta p/m = v_Q$.

Для удобства дальнейшего анализа введем с помощью величины v_Q характерное квантовое время релаксации $\tau_Q \equiv b/v_Q = 2mb^2/\hbar$. Тогда в новых обозначениях формулам (34) и (38) можно придать вид

$$(\Delta q)^2 = b^2 \left(1 + \frac{t^2}{\tau_Q^2} \right) = D_Q \tau_Q \left(1 + \frac{t^2}{\tau_Q^2} \right), \quad (39)$$

$$(\Delta p)^2 = m^2 \frac{D_Q}{\tau_Q}. \quad (40)$$

Наконец, учитывая общую формулу (32) и выражение (35) для $\alpha(t)$, получим

$$\sigma_{qp} = \frac{\hbar}{2} \alpha(t) = \frac{\hbar v_Q t}{2b} = m v_Q^2 t. \quad (41)$$

Тогда согласно (32) квадрат обобщенного коррелятора $|\tilde{R}_{qp}|$ принимает вид

$$|\tilde{R}_{qp}|^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{v_Q^2 t^2}{b^2} + 1 \right) = (m v_Q^2 t)^2 + \frac{\hbar^2}{4} = (m D_Q)^2 \left(\frac{t^2}{\tau_Q^2} + 1 \right), \quad (42)$$

где учтено, что $c_{qp} = m D_Q$.

Таким образом, в данном случае не только плотность потока вероятности $j(q)$ не равна нулю, но и функция $I = \sigma_{qp}/m$ также отлична от нуля, что характерно для негармонических волн де Бройля. При этом равномерное движение центра гауссова пакета со скоростью v_0 никак не сказывается на величине I . Эта характеристика потока вероятности зависит только от скорости распыливания пакета v_Q . Следовательно, полученные выражения (39), (40) и (42) подтверждают, что состояние гауссова волнового пакета минимизирует СН Шредингера (10) не только при $t = 0$, когда его можно отнести к КС, но и в произвольный момент времени, когда обобщенный коррелятор $|\tilde{R}_{qp}| \neq c_{qp} = \hbar/2$. Это состояние в рамках предложенной выше классификации следует относить к ККС.

Отметим, что для рассматриваемого случая оба вклада (σ_{qp} и c_{qp}) в правую часть СН Шредингера (10) зависят от постоянной $\hbar$. В то же время каждая из этих величин сама по себе соответствует определенному типу корреляции среднеквадратичных отклонений координаты Δq и импульса Δp . При малых значениях $t \ll \tau_Q$ имеем $\sigma_{qp} \ll c_{qp}$, так что ККС совпадает с КС. В этом случае

$$\Delta q \approx b = \frac{\hbar}{2\Delta p}. \quad (43)$$

Наоборот, при больших значениях $t \gg \tau_Q$ имеем $\sigma_{qp} \gg c_{qp}$, так что ККС совпадает с коррелированным состоянием. В этом случае

$$\Delta q \approx v_Q t = \frac{t}{m} \Delta p. \quad (44)$$

Корреляцию (43) величин Δq и Δp при относительно малых временах можно назвать корреляцией *в противофазе*, ибо в этом случае Δq и Δp обратно пропорциональны друг другу. Корреляцию (44) тех же величин при относительно больших временах можно назвать корреляцией *в фазе*, ибо в этом случае Δq и Δp прямо пропорциональны друг

другу. В произвольный момент времени t корреляция величин Δq и Δp для микрочастицы в состоянии гауссова волнового пакета, характеризующая СН Шредингера, носит достаточно сложный характер, объединяя альтернативные типы корреляций, присущие по отдельности СН Гейзенберга ($\Delta q \sim 1/\Delta p$) и квантовому аналогу СН Эйнштейна ($\Delta q \sim \Delta p$).

Важно подчеркнуть, что в ККС тип корреляции величин, входящих в СН Шредингера (10), меняется с течением времени с одного на другой, ему альтернативный. При этом состояние микрочастицы превращается из когерентного (при $t \ll \tau_Q$) в коррелированное (при $t \gg \tau_Q$), оставаясь все время коррелированно-когерентным. Это изменение состояния от когерентного к коррелированному можно трактовать как каноническое преобразование, т.е. как переход от старых канонических переменных $(\hat{q}, \hat{p})$ к новым переменным $(\hat{Q}, \hat{P})$ вида $\hat{Q} = \hat{q} + (t/m)\hat{p}$, $\hat{P} = \hat{p}$ при неизменности СН Шредингера (10).

Наконец, отметим, что ввиду постоянства величины Δp при любом расплывании пакета со временем его форма остается гауссовой, т.е. никогда не переходит в состояние с определенным импульсом $p = mv_0$, описываемое бегущей гармонической волной де Бройля. Таким образом, в пределе $t \rightarrow \infty$ корреляция величин Δq и Δp остается корреляцией *в фазе*.

Нетрудно видеть, что введенное выше квантовое время релаксации τ_Q имеет смысл порогового момента времени, в который происходит смена типов корреляции флуктуаций координаты и импульса и, тем самым, переход от когерентного состояния к коррелированному. Действительно, согласно формуле (42) $\sigma_{qp} \ll c_{qp}$ при $t \ll \tau_Q$ и, наоборот, $\sigma_{qp} \gg c_{qp}$ при $t \gg \tau_Q$. Интересно отметить, что согласно формуле (39) те же условия определяют, насколько существенна начальная ширина волнового пакета b в сравнении с ее увеличением $v_0 t$ за счет расплывания. Следовательно, известный вклад коммутатора $c_{qp} = \hbar/2$ в СН Шредингера (10) существен лишь до тех пор, пока расплывание пакета незначительно (т.е. пока $\alpha(t) \ll 1$).

3.3. Квантовый осциллятор в КС. В качестве примера движения микрочастицы в потенциальном поле рассмотрим наиболее популярную модель такого движения – квантовый осциллятор частоты ω_0 . Как известно, на этой модели были впервые введены сами понятия КС [24] и ККС [13]. Однако из числа стационарных состояний квантового осциллятора качествами КС обладает, как было отмечено выше, только основное энергетическое состояние с $\varepsilon_0 = \hbar\omega_0/2$. Другие минимизирующие состояния можно обнаружить исключительно среди его нестационарных состояний.

Простейшие из них – это нестационарные состояния, являющиеся собственными состояниями неэрмитова оператора уничтожения $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, где α – произвольное комплексное число. В этих состояниях средняя энергия осциллятора имеет вид

$$\bar{\varepsilon} = \hbar\omega_0 \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (45)$$

где $\bar{n} = |\alpha|^2$ – среднее число квантов в состоянии $|\alpha\rangle$.

Волновая функция таких состояний в q -представлении имеет стандартный вид (30), но при этом ее фаза равна нулю. Ограничиваясь вещественными α , имеем

$$\bar{q}(t) = \sqrt{2}l_0(\text{Re } \alpha) \cos \omega_0 t, \quad (46)$$

$$\bar{p}(t) = -\sqrt{2} \frac{\hbar}{l_0}(\text{Re } \alpha) \sin \omega_0 t. \quad (47)$$

В то же время дисперсии координаты и импульса в состояниях $|\alpha\rangle$ от времени не зависят:

$$(\Delta q)^2 = \frac{l_0^2}{2}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{2l_0^2}. \quad (48)$$

Очевидно, что они совпадают со значениями дисперсий для основного стационарного состояния того же осциллятора.

Поскольку в данном случае фаза волновой функции равна нулю и тем самым $\sigma_{qp} \equiv 0$, СН Шредингера (10) для состояний $|\alpha\rangle$ совпадает с СН Гейзенберга и имеет вид равенства (33). Иными словами, любое из состояний $|\alpha\rangle$ минимизирует это СН при любом значении t , так что они по праву называются КС. Таким образом, в данном случае нестационарность состояний $|\alpha\rangle$ проявляется только в зависимости от времени средних значений $\bar{q}(t)$ и $\bar{p}(t)$ и не сказывается на гауссовой форме и характерной ширине волновой функции. Наглядно это можно представить так: с течением времени гауссов пакет фиксированной формы гармонически колеблется как целое с частотой ω_0 относительно начального среднего значения координаты $\bar{q}(0) = \sqrt{2} l_0 \operatorname{Re} \alpha$, так что в сопровождающей системе отсчета никаких изменений со временем вообще не происходит.

3.4. Квантовый осциллятор в ККС. Более общий класс нестационарных состояний гармонического осциллятора, минимизирующих СН Шредингера (10), может быть получен [26] из состояний $|\alpha\rangle$ с помощью специального канонического преобразования операторов уничтожения $\hat{a}$ и рождения $\hat{a}^\dagger$. Для этой цели воспользуемся (u, v) -преобразованием Боголюбова. Введем новые операторы уничтожения $\hat{b}$ и рождения $\hat{b}^\dagger$:

$$\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger, \quad \hat{b}^\dagger = v^*\hat{a} + u^*\hat{a}^\dagger, \quad (49)$$

где $|u|^2 - |v|^2 = 1$. Собственные состояния нового оператора уничтожения $\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$, где β – любое комплексное число, обладают качествами ККС как наиболее общих минимизирующих состояний гармонического осциллятора.

Для упрощения дальнейших вычислений параметризуем комплексные функции u и v следующим образом [26]:

$$u = \operatorname{ch} \tau e^{i\varphi}, \quad v = \operatorname{sh} \tau e^{-i(\theta+\varphi)}, \quad (50)$$

введя параметры

$$\tau = \ln(|u| + |v|), \quad \varphi = \varphi_u, \quad \theta = -\varphi_u - \varphi_v, \quad (51)$$

где φ_u и φ_v – фазы функций u и v , соответственно. Отметим, что с помощью формул

$$\tilde{\tau} = 2\tau, \quad \tilde{\varphi} = -\theta, \quad \tilde{\psi} = 2\varphi + \theta \quad (52)$$

эти параметры можно выразить через углы Эйлера $\tilde{\tau}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, область изменения которых $0 \leq \tilde{\tau} < \infty$; $0 \leq \tilde{\varphi} \leq 2\pi$; $-2\pi \leq \tilde{\psi} \leq 2\pi$. Практически не ограничивая общности, в дальнейшем положим $\theta = 0$.

Волновые функции квантового осциллятора в ККС в q -представлении имеют стандартный вид (30) [26], причем в рамках параметризации (50)

$$(\Delta q)^2 = \langle \beta | (\Delta \hat{q})^2 | \beta \rangle = \frac{l_0^2}{2} (e^{-2\tau} + 2 \sin^2 \varphi \operatorname{sh} 2\tau), \quad (53)$$

$$\alpha = \sin 2\varphi \operatorname{sh} 2\tau. \quad (54)$$

Согласно общим формулам (31) и (32) отсюда следует, что

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2 \sin^2 2\varphi \operatorname{sh}^2 2\tau + 1}{4(\Delta q)^2}, \quad (55)$$

$$|\tilde{R}_{qp}|^2 = \frac{\hbar^2}{4} [\sin^2 2\varphi \operatorname{sh}^2 2\tau + 1] = (mD_Q)^2 [\sin^2 2\varphi \operatorname{sh}^2 2\tau + 1]. \quad (56)$$

Таким образом, величины (53)–(56) не зависят от выбора ККС $|\beta\rangle$, каждое из которых минимизирует СН Шредингера (10). Подчеркнем, что в данном случае величина $I = \sigma_{qp}/m$ не равна тождественно нулю, поэтому в рассматриваемых состояниях существует отличный от нуля поток вероятности. Это служит указанием на то, что такие состояния нельзя считать стоячими.

Наконец, выбрав для простоты $\operatorname{Im} \beta = 0$, получим для средних значений координаты и импульса в состояниях $|\beta\rangle$ выражения

$$\bar{q} = \sqrt{2} l_0 e^{-2\tau} (\operatorname{Re} \beta) \cos \varphi, \quad (57)$$

$$\bar{p} = -\sqrt{2} \frac{\hbar}{l_0} e^{-2\tau} (\operatorname{Re} \beta) \sin \varphi. \quad (58)$$

Разумеется, при $\tau = 0$, $\varphi = 0$ все выражения (53)–(58) переходят в соответствующие выражения для КС $|\alpha\rangle$, а сами ККС $|\beta\rangle$ превращаются в КС $|\alpha\rangle$. В то же время при произвольных значениях τ и φ состояния $|\beta\rangle$ являются ККС квантового осциллятора с $\sigma_{qp} = (\hbar/2)\alpha \neq 0$. Выбирая параметр φ так, что $\sin 2\varphi \neq 0$, всегда можно за счет выбора параметра τ обеспечить выполнение условия $\alpha^2 \gg 1$, когда вкладом коммутатора c_{qp} можно пренебречь. В этом случае правая часть СН Шредингера (10) определяется только вкладом антикоммутатора, так что соответствующие состояния $|\beta\rangle$ приближенно можно считать коррелированными.

4. ОБЩИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КОРРЕЛИРОВАННО-КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

4.1. Сопоставление ККС квантового осциллятора и свободной микрочастицы. Прежде чем интерпретировать общие физические особенности ККС, вернемся к формулам (53)–(56) и сравним их с аналогичными формулами для свободной микрочастицы в аналогичных состояниях. С этой целью предположим, что фазы введенных выше комплексных функций u и v , входящих в (u, v) -преобразование Боголюбова, зависят от времени по закону $\varphi = \omega_0 t$. Тогда окажется, что величины $(\Delta q)^2$, $(\Delta p)^2$ и σ_{qp} также явно зависят от времени:

$$(\Delta q)^2 = \frac{l_0^2}{2} [e^{-2\tau} + 2 \operatorname{sh} 2\tau \sin^2 \omega_0 t], \quad (59)$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2 \operatorname{sh}^2 2\tau \sin^2 2\omega_0 t + 1}{4(\Delta q)^2}, \quad (60)$$

$$|\tilde{R}_{qp}|^2 = \frac{\hbar^2}{4} [\operatorname{sh}^2 2\tau \sin^2 2\omega_0 t + 1]. \quad (61)$$

При произвольных значениях t поток вероятности характеризуется функцией

$$I = \frac{\sigma_{qp}}{m} = v_Q^2 \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0}, \quad (62)$$

где квадрат характерной скорости

$$v_Q^2 = \frac{\hbar\omega_0}{m} \operatorname{sh} 2\tau, \quad (63)$$

так что функция I меняется по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$. Эффективная ширина волновой функции согласно формуле (59) также меняется периодически с частотой $2\omega_0$ в пределах

$$(\Delta q)_{\min}^2 = \frac{l_0^2}{2} e^{-2\tau} \leq (\Delta q(t))^2 \leq \frac{l_0^2}{2} e^{2\tau} = (\Delta q)_{\max}^2. \quad (64)$$

В целом поведение волновой функции $\psi_\beta(q, t)$ со временем соответствует совокупности двух движений. Координата центра гауссовой кривой меняется гармонически с частотой ω_0 , в то время как ширина волновой функции меняется также гармонически, но с частотой $2\omega_0$. В функцию I дает вклад только второе движение, которое в данном случае можно назвать *дыханием* волновой функции, включающим элементы ее периодического распыливания и стягивания.

Рассмотрим подробнее случай, когда $2\omega_0 t \ll 1$ и при этом $e^\tau \gg 1$. Тогда

$$(\Delta q)^2 \approx \frac{l_0^2}{2} e^{-2\tau} + v_Q^2 t^2 = \frac{l_{\text{ren}}^2}{2} + v_Q^2 t^2, \quad (65)$$

$$(\Delta p)^2 \approx \frac{(mv_Q^2 t)^2 + \hbar^2/4}{(l_0^2/2)e^{-2\tau} + v_Q^2 t^2} \approx (mv_Q)^2 \approx \frac{\hbar^2}{2l_{\text{ren}}^2}, \quad (66)$$

$$|\tilde{R}_{qp}|^2 = (mv_Q^2 t)^2 + \frac{\hbar^2}{4} \approx (mv_Q^2 t)^2. \quad (67)$$

Здесь $l_{\text{ren}} = l_0 e^{-\tau}$ — перенормированная амплитуда нулевых колебаний, а квадрат скорости распыливания волновой функции осциллятора, определенный формулой (63), равен

$$v_Q^2 \approx \frac{\hbar\omega_0}{2m} e^{2\tau} = \frac{\hbar^2}{2m^2 l_{\text{ren}}^2}.$$

Таким образом, при сделанном выборе параметров φ и τ характеристики волновой функции осциллятора вполне аналогичны характеристикам гауссова волнового пакета для свободной микрочастицы при условии замены $l_{\text{ren}}^2/2$ на b^2 . Иными словами, при наличии гармонической зависимости от времени фаз функций u и v , фиксирующих преобразование Боголюбова, на малых временах наблюдается характерное распыливание волновой функции осциллятора, имеющей форму гауссовой кривой. Это означает, что волновая функция осциллятора в ККС при малых временах меняет свою ширину по линейному закону, как и гауссов пакет для свободной микрочастицы.

4.2. Изменение волновых функций ККС со временем. Для дальнейшего анализа представляет интерес общий характер поведения волновых функций ККС в такие моменты времени, когда начальным вкладом в ширину гауссовой функции можно пренебречь: $b^2 \ll v_Q^2 t^2$. Напомним, что в этом случае волновые функции ККС соответствуют коррелированным состояниям, когда в обобщенном корреляторе $\sigma_{qp} \gg c_{qp}$. Поскольку волновые функции в обеих моделях в этом приближении практически совпадают, ограничимся анализом движения свободной микрочастицы в состоянии гауссова

пакета. Амплитуда и фаза соответствующей волновой функции (в инерциальной системе отсчета, где $V_{\text{syst}} = v_0$) при $t \gg \tau_Q$ принимают вид

$$|\psi(q, t)| = \sqrt{\rho_{\text{pr}}} \approx [2\pi b^2 \alpha^2(t)]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{q^2}{4b^2 \alpha^2(t)} \right\}, \quad (68)$$

$$\varphi(q, t) \approx \frac{q^2}{4b^2 \alpha^2(t)} \alpha(t) - \frac{1}{2} \arctg \alpha(t) \approx \frac{q^2}{4b^2 \alpha(t)} - \frac{\pi}{4}. \quad (69)$$

Казалось бы, в пределе $t \rightarrow \infty$ первым слагаемым в выражении для фазы $\varphi(q, t)$ вполне можно пренебречь. Если это сделать, то мы получим квантовое состояние, определяемое только плотностью вероятности $\rho_{\text{pr}}(t)$. Такое достаточно грубое приближение пригодно для вычисления любых средних значений и дисперсий, включая среднюю энергию свободной микрочастицы.

Вместе с тем при вычислении обобщенного коррелятора $|\tilde{R}_{qp}|$ и тем самым функции $I \neq 0$, характеризующей поток вероятности, роль фазы $\varphi(q, t)$ оказывается решающей, ибо $mI = \hbar \alpha(t)/2 \gg \hbar/2$. Иными словами, предельное квантовое состояние, возникающее в процессе расплывания волнового пакета, продолжает сохранять черты исходного квантового состояния, и в нем нельзя полностью пренебречь первым слагаемым в фазе $\varphi(q, t)$, зависящим от функции $\alpha(t)$. Это обстоятельство лишний раз демонстрирует необходимость явного использования антикоммутирующих в аппарате квантовой механики.

На наш взгляд, данное наблюдение представляет интерес в связи с развивающимся в последние годы анализом процесса декогеренции волновых функций открытых квантовых систем, происходящего под воздействием окружения [28], [29]. К числу таких систем относится и свободная микрочастица в состоянии гауссова волнового пакета [30]. Полученные выше асимптотические формулы (68), (69) позволяют оценить наиболее тонкие особенности процесса его расплывания. Главная из них – сохранение существенной роли фазы волновой функции $\varphi(q, t)$ в любой момент времени. Можно надеяться, что дальнейшее сопоставление процессов расплывания и декогеренции окажется полезным для построения наглядной и реалистичной модели декогеренции [31].

4.3. Средняя энергия микрочастицы в ККС и особенности ее волновых функций. Для выяснения особенностей ККС весьма важен вопрос об энергии микрочастицы в этих состояниях. Поскольку ККС свободной микрочастицы не являются собственными состояниями гамильтониана $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$, энергия в них не имеет определенного значения. Средняя энергия при этом не зависит от времени и равна [8]

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(\bar{p})^2}{2m} + \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_Q^2}{2}. \quad (70)$$

Иными словами, при отсутствии внешнего воздействия ($U(q) = 0$) средняя энергия микрочастицы не совпадает с кинетической энергией $\varepsilon = mv_0^2/2$. Из этого следует, что волновую функцию свободной микрочастицы в ККС нельзя трактовать как бегущую волну де Бройля, соответствующую только инфинитному движению. В связи с этим второе слагаемое в формуле (70) можно было бы трактовать как среднюю энергию какого-то внутреннего финитного движения микрочастицы, происходящего в области пространства, характеризуемого в среднем начальной шириной ее волновой функции

$\Delta q(0) = b$. Соответствующее такому движению состояние обладает качествами, присущими стоячим волнам де Бройля.

Чтобы в этом убедиться, учтем, что гауссов волновой пакет при $t = 0$ совпадает с волновой функцией основного стационарного состояния гармонического осциллятора, для которого квадрат амплитуды нулевых колебаний $l_0^2 = 2b^2$. Поэтому было бы вполне естественно моделировать подобное внутреннее движение эквивалентным осциллятором, представив второе слагаемое в формуле (70) как его среднюю кинетическую энергию $\overline{K}_{\text{osc}}$. Ее можно считать равной половине энергии осциллятора ε_0 в рассматриваемом состоянии:

$$\frac{mv_Q^2}{2} = \overline{K}_{\text{osc}} = \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\hbar\tilde{\omega}}{4}, \quad (71)$$

где $\tilde{\omega}$ – частота эквивалентного осциллятора, причем

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar}{ml_0^2} = \frac{\hbar}{2mb^2} = \frac{v_Q}{b} = \frac{1}{\tau_Q}. \quad (72)$$

Таким образом, волновую функцию свободной микрочастицы в ККС нельзя считать только бегущей волной де Бройля. Ее следует трактовать как бегуще-стоячую волну, поскольку движение центра пакета описывается бегущей волной, а его расплывание – стоячей волной эквивалентного осциллятора. В реальных условиях, как правило, $v_0 \gg v_Q$, так что дополнительный вклад от стоячей волны в среднюю энергию микрочастицы $\bar{\varepsilon}$ мал. Важно, однако, подчеркнуть, что формирование гауссова волнового пакета при $t = 0$ эквивалентно помещению микрочастицы в потенциальную яму осцилляторного типа, имеющую макроскопические размеры порядка b , которая далее движется вместе с микрочастицей подобно панцирю черепахи.

Аналогичным образом рассмотрим выражение для средней энергии квантового осциллятора в ККС:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2m} \overline{(p^2)} + \frac{m\omega_0^2}{2} \overline{(q^2)}. \quad (73)$$

Для вычисления $\bar{\varepsilon}$ необходимо использовать формулы (53), (55), (57) и (58). Несколько громоздкие выкладки с учетом равенств

$$\frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{l_0^2} = \frac{m\omega_0^2 l_0^2}{2} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (74)$$

приводят к выражению

$$\bar{\varepsilon} = \hbar\omega_0 \left(|\beta|^2 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_0 \left\{ 2 \operatorname{sh}^2 \tau \left(|\beta|^2 + \frac{1}{2} \right) - (\operatorname{Re} \beta)^2 \operatorname{sh} 2\tau \right\}, \quad (75)$$

не зависящему от параметра φ . После перегруппировки слагаемых в выражении для средней энергии гармонического осциллятора в состояниях $|\beta\rangle$ получим

$$\bar{\varepsilon} = \hbar\omega_0 e^{-2\tau} \left(|\beta|^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \operatorname{sh} 2\tau. \quad (76)$$

Этому выражению можно придать более простой вид, введя обозначение для перенормированной частоты $\omega_{\text{ren}} \equiv \omega_0 e^{-2\tau}$ и используя формулу (63):

$$\bar{\varepsilon} = \hbar\omega_{\text{ren}} \left(|\beta|^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{mv_Q^2}{2}, \quad (77)$$

где $|\beta|^2 = \bar{n}$ – среднее число квантов в состоянии $|\beta\rangle$.

Таким образом, выражение для средней энергии осциллятора в ККС $|\beta\rangle$ качественно отличается от соответствующего выражения (45) в КС $|\alpha\rangle$. Первое слагаемое в формуле (77), представляющее собой среднюю энергию финитного движения гармонического осциллятора, соответствует вкладу состояния типа стоячей волны де Бройля, второе слагаемое имеет вид средней кинетической энергии инфинитного движения, соответствующего состоянию типа бегущей волны де Бройля.

Следовательно, ККС $|\beta\rangle$, в отличие от КС $|\alpha\rangle$, обладают качествами стояче-бегущей волны де Бройля. Наличие вклада в среднюю энергию, соответствующего бегущей волне де Бройля, подтверждается и тем, что в состояниях $|\beta\rangle$ характеристика потока вероятности I согласно формуле (62) не равна тождественно нулю. Она определяется той же скоростью v_Q , что и дополнительный вклад в среднюю энергию в формуле (77).

Напомним, что ККС свободной микрочастицы и квантового осциллятора характеризуются прежде всего тем, что они наиболее близки к реальным микросостояниям, встречающимся в природе. Из проведенного анализа следует, что таким состояниям отвечают бегуще-стоячие или стояче-бегущие волны де Бройля, тогда как бегущие или стоячие волны характерны для наиболее идеализированных моделей. Различие между двумя типами рассмотренных моделей состоит только в том, что для свободной микрочастицы основной вклад в выражение для средней энергии дает бегущая волна, а стоячая ответственна за малую поправку к этой величине. В то же время для квантового осциллятора в ККС основной вклад в выражение для $\bar{\epsilon}$ дает стоячая волна, а за малую поправку к этой величине ответственна бегущая.

4.4. Эффективный потенциал в ККС. Проведенный анализ показал, что в рассматриваемых моделях физически реалистичные состояния – ККС – обладают свойствами бегуще-стоячих или стояче-бегущих волн де Бройля. Хотя данное обстоятельство могло бы вызвать удивление, оно имеет вполне естественное объяснение. В обеих моделях гамильтониан является квадратичной функцией координаты и импульса. Поэтому переход от КС к ККС, осуществляемый каноническим преобразованием, хотя и меняет баланс между членами гамильтониана, зависящими только от p^2 и только от q^2 , но, разумеется, оставляет его квадратичной функцией канонических переменных.

С этой точки зрения представляет интерес рассмотрение выражения для эффективного потенциала

$$U^{\text{ef}} = U(q) - \frac{\hbar^2}{2m} \rho_{\text{pr}}^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} (\rho_{\text{pr}}^{1/2}) = U + U^Q. \quad (78)$$

Как известно, он входит вместо $U(q)$ в уравнение типа Гамильтона–Якоби, получаемое из уравнения Шредингера при подстановке в него произвольной волновой функции, выраженной, как и в формуле (14), через амплитуду и фазу. Многие годы предпринимались многочисленные попытки придать дополнительному члену U^Q в выражении (78) смысл некоего *квантового потенциала*. Однако они не принесли успеха в том числе и потому, что этот член существенно зависит от плотности вероятности квантового состояния.

Вместе с тем для рассматриваемых ККС второе слагаемое в выражении (78) вычислить нетрудно, что позволяет дополнительно прояснить особенности этих состояний. После тривиального дифференцирования величины $\sqrt{\rho_{\text{pr}}} = |\psi|$, где $|\psi|$ – амплитуда вол-

новой функции вида (30), получим, что в этом случае

$$U^Q(q) = \alpha q^2 + \beta. \quad (79)$$

Как и ожидалось, переход к ККС свелся просто к квадратичной добавке в эффективный потенциал U^{ef} . Разумеется, эта добавка нарушает баланс между вкладами слагаемых, зависящих только от координат и только от импульсов в исходном выражении для гамильтониана.

Появляющуюся в итоге произвольную квадратичную функцию координаты и импульса всегда можно представить как сумму двух гамильтонианов, соответствующих поступательному движению и колебаниям осциллятора. Это обстоятельство и сближает ККС в исходно различных моделях, наделяя их одновременно свойствами бегущих гармонических волн де Бройля и стоячих волн де Бройля осцилляторного типа.

5. ВЫВОДЫ

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

1. СН Гейзенберга являются одной из частных версий универсальных и инвариантных СН Шредингера, справедливой лишь для тех состояний, в которых вклад антикоммутирующих операторов обращается в нуль.

2. СН Шредингера координата–импульс в произвольный момент времени минимизируется в ККС, частными случаями которых являются когерентные и коррелированные состояния.

3. В СН Шредингера координата–импульс оба вклада в обобщенный коррелятор – антикоммутиатора и коммутиатора соответствующих операторов – одинаково существенны, что наглядно демонстрируется в модифицированной версии стохастической механики.

4. С течением времени характер корреляции флуктуаций координаты и импульса микрочастицы, определяемый вкладами коммутиатора и антикоммутиатора соответственно, качественно меняется – от корреляции *в противофазе* к корреляции *в фазе*.

5. Вклады коммутиатора и антикоммутиатора в обобщенный коррелятор, входящий в СН Шредингера координата–импульс, определяются амплитудой и фазой волновой функции, соответственно. С течением времени роль вклада антикоммутиатора возрастает, так что в процессе расплывания волновой функции нельзя пренебречь даже малой по величине фазой.

6. ККС свободной микрочастицы и квантового осциллятора имеют характер бегущие–стоячих или стояче–бегущих волн де Бройля.

7. Существенная роль вклада антикоммутиатора в СН Шредингера позволяет поставить вопрос об изменении места антикоммутиаторов в алгебре наблюдаемых при модификации аппарата квантовой механики.

Благодарности. В данной статье затрагиваются вопросы, выходящие за рамки традиционного круга задач квантовой механики. Интересом к подобным проблемам я во многом обязан Анатолию Алексеевичу Логунову. Он являет собой яркий пример увлеченности фундаментальными основами физики, нередко приводящей к анализу и переоценке устоявшихся мнений. Я глубоко ценю его плодотворное влияние, продолжающееся уже 45 лет.

Выражаю также благодарность участникам теоретического семинара НИИЯФ МГУ и XXIV Международного совещания в ИФВЭ за дискуссию и О. Н. Голубевой за плодотворную критику и помощь в окончательном редактировании рукописи.

Список литературы

- [1] В. Гейзенберг. УФН. 1977. Т. 122. № 4. С. 657.
- [2] П. Дирак. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
- [3] Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский. Лекции по квантовой механике. Л.: ЛГУ, 1980.
- [4] В. Гейзенберг. Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука, 1989.
- [5] R. Fhrth. Z. Phys. 1933. Bd. 81. S. 143.
- [6] А. Эйнштейн, М. Смолуховский. Брауновское движение. М.: ОНТИ, 1936.
- [7] J. Uffink, van J. Lith. Found. Phys. 1998. V. 28. P. 323.
- [8] А. Д. Суханов. ЭЧАЯ. 2001. Т. 32. № 5. С. 1177.
- [9] Э. Шредингер. К принципу неопределенности Гейзенберга. В сб.: Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976. С. 210.
- [10] H. P. Robertson. Phys. Rev. A. 1930. V. 35. № 5. P. 667.
- [11] R. J. Glauber. Phys. Rev. 1963. V. 131. № 6. P. 2766.
- [12] А. М. Переломов. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
- [13] D. Stoler. Phys. Rev. D. 1970. V. 1. № 12. P. 3217; 1971. V. 4. № 8. P. 2309.
- [14] E. Y. C. Lu. Lett. Nuovo Cimento. 1971. V. 2. № 24. P. 1241.
- [15] В. В. Додонов, В. И. Манько. Тр. ФИАН. 1987. Т. 183. С. 5.
- [16] E. Nelson. Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 1079; Dynamical Theory of Brownian Motion. Princeton: Univ. Press, 1967.
- [17] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [18] Ю. А. Розанов. Случайные процессы. М.: Наука, 1971.
- [19] E. Madelung. Z. Phys. 1926. Bd. 40. S. 322.
- [20] F. Guerra. Phys. Rep. 1981. V. 77. № 3. P. 263.
- [21] S. Golin. J. Math. Phys. 1985. V. 26. № 11. P. 2781.
- [22] J. M. Burgers. Proc. Acad. Sci. Amsterdam. 1940. V. 43. P. 2; 1950. V. 53. P. 247.
- [23] В. В. Додонов, Е. В. Курмышев, В. И. Манько. Тр. ФИАН. 1986. Т. 176. С. 128.
- [24] E. Shrdinger. Naturwis. 1926. Bd. 14. S. 664.
- [25] Когерентные состояния в квантовой теории. Сб. статей. М.: Мир, 1972.
- [26] В. В. Додонов, В. И. Манько. Тр. ФИАН. 1987. Т. 183. С. 71.
- [27] В. И. Татарский. УФН. 1983. Т. 139. № 4. С. 587.
- [28] М. Б. Менский. УФН. 1998. Т. 168. № 9. С. 1017.
- [29] М. Б. Менский. Квантовые измерения и декогеренция. М.: Физматлит, 2001.
- [30] Б. В. Кадомцев. Динамика и информация. М.: Изд-во УФН, 1997.
- [31] D. Han, Y. S. Kim, M. E. Noz. Coupled harmonic oscillators and Fynman's rest of the Universe. cond-mat/9705029 v1.

Поступила в редакцию 20.II.2002 г.